

Oscillazioni elettriche

- Circuiti RC e RL, recap
- Oscillazioni smorzate in un circuito RLC
- Circuiti in corrente alternata

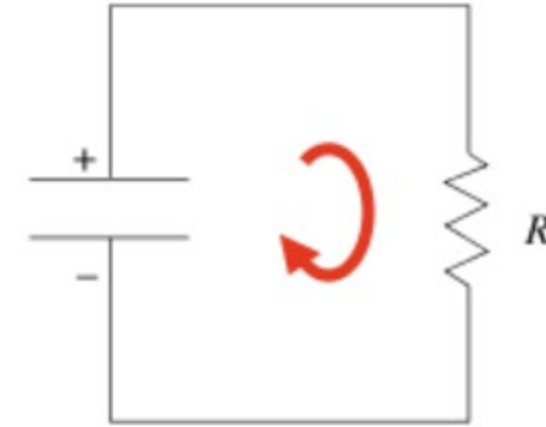
Esempi di correnti variabili nel tempo sono i circuiti RC e RL

- RC: le armature di un condensatore carico di capacità C vengono collegate con un resistore R , si ha una corrente dall'armatura positiva a quella negativa che scarica il condensatore. Sia V_C la d.d.p. ai capi del condensatore, valgono le equazioni:

$$V_C = \frac{q}{C} = RI, \quad I = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{RC} \Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ con } \tau = RC$$

L'energia elettrica $\frac{1}{2} CV_0^2$ viene dissipata per effetto Joule su R .



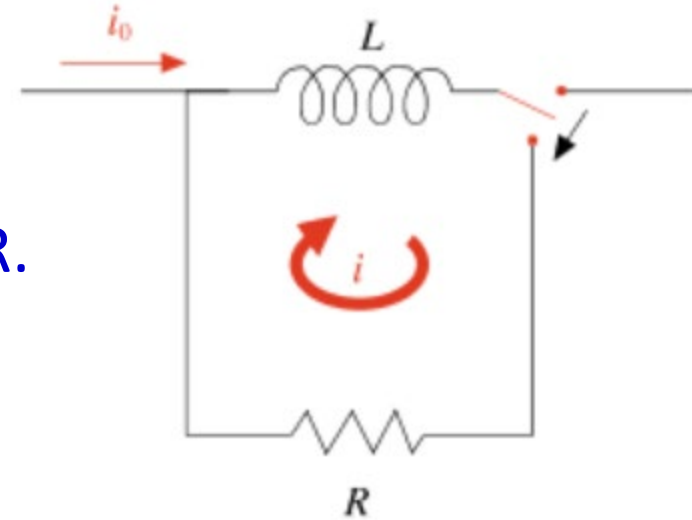
Circuito a corrente variabile. RC, recap

- RL: quando un induttore L percorso da una corrente costante i_0 viene chiuso su un resistore R , l'equazione del circuito e':

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt} = RI \Rightarrow$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{con } \tau = L/R$$

L'energia magnetica $\frac{1}{2}LI_0^2$ viene dissipata per effetto Joule su R .



Circuito a corrente variabile. RL, recap

- In entrambi i casi RC e RL l'equazione del circuito e' del tipo

$$\frac{dI}{dt} = -kI$$

equazione differenziale lineare del prim'ordine a coefficienti costanti, la cui soluzione generale e'

$$I(t) = Ae^{-kt}$$

essendo la costante A determinata dalla condizione iniziale.

La diminuzione della corrente e' causata dalla presenza dell'elemento dissipativo R che assorbe la potenza $P_R = RI^2$

Circuito a corrente variabile.

- Se si considerano i corrispondenti processi di carica, con un generatore di f.e.m. costante, abbiamo ancora una corrente decrescente esponenzialmente nel tempo $I(t) = Ae^{-kt}$ per il circuito RC, nel quale a regime la corrente è nulla,
- Nel circuito RL la corrente ha l'espressione
$$I(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau})$$

tendente al valore costante di regime.

Il lavoro necessario per mantenere queste correnti è fornito dal generatore, che inoltre eroga le energie immagazzinate nel condensatore o nell'induttore.

In ogni caso si tratta di fenomeni transitori, la cui durata tipica è regolata dalla costante di tempo, pari a RC o a L/R.

Circuito a corrente variabile.

Sia dato un condensatore carico che all'istante $t = 0$ viene connesso ad un induttore e ad un resistore in serie; il circuito si chiama RLC in serie.

Alla chiusura del circuito inizia a passare una corrente e nell'induttore compare la f.e.m. di autoinduzione

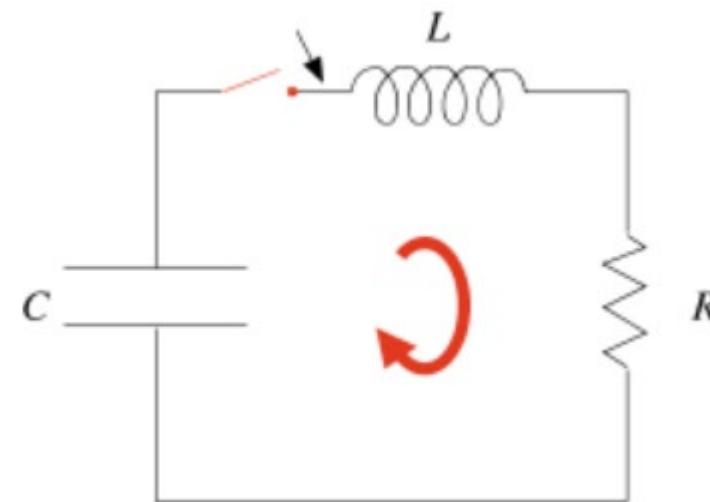
$\mathcal{E}_L = -L \, dI/dt$; vale inoltre:

$$\mathcal{E}_L + \frac{q}{C} = RI$$

Derivando e ponendo $I = -dq/dt$ si ottiene

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0$$

Avendo posto $\gamma = \frac{R}{2L}$ (coefficiente di smorzamento) e $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (pulsazione propria).



Circuito RLC in serie

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0$$

Si tratta della stessa equazione che regola il moto dell'oscillatore armonico smorzato da una forza di attrito proporzionale alla velocità (attrito viscoso).

La soluzione generale di questa equazione è (per soluzioni α_1 e α_2 distinte):

$$I(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$$

Dove $\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ e $\alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ sono le soluzioni della equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

Circuito RLC in serie

La corrente ha un andamento temporale differente a seconda della relazione tra γ e ω_0 . Consideriamo tre situazioni:

8

- **smorzamento forte:** $\gamma > \omega_0^2 \Rightarrow R^2 > 4L/C$

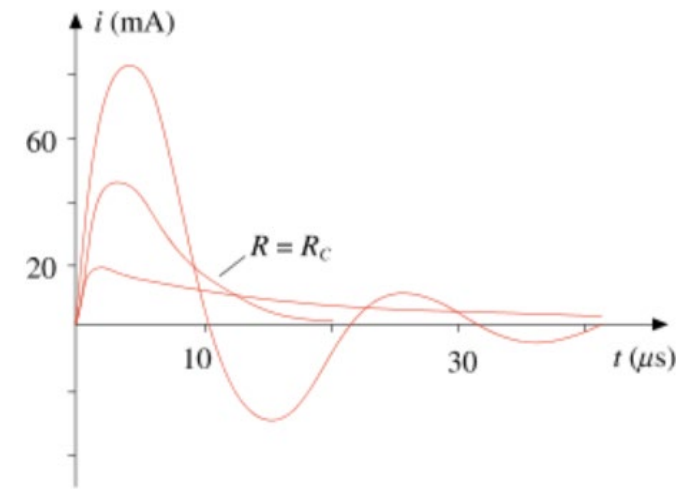
$$I(t) = e^{-\gamma t} (A e^{t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} + B e^{-t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}})$$

- **smorzamento critico:** $\gamma = \omega_0^2 \Rightarrow R^2 = 4L/C$

$$I(t) = e^{-\gamma t} (A + Bt)$$

- **smorzamento debole:** $\gamma < \omega_0^2 \Rightarrow R^2 < 4L/C$

$$I(t) = D e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) \quad , \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



Nei primi due casi l'andamento predominante e' esponenziale decrescente, nel terzo caso si ha un'oscillazione smorzata. Si tratta sempre di un fenomeno transitorio in quanto e' dominante il fattore di smorzamento $e^{-\gamma t}$.

Il ruolo dell'attrito viscoso e' svolto dalla resistenza del circuito. La quantita' $R_c^2 = \frac{4L}{C}$ prende il nome di **resistenza critica**.

Circuito RLC in serie

Nel caso ideale di $R=0$ l'equazione del circuito diventa:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{LC} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 I}{dt^2} + \omega^2 I = 0$$

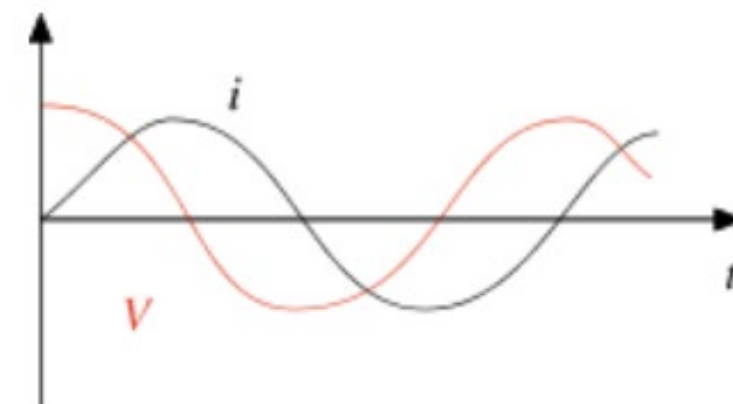
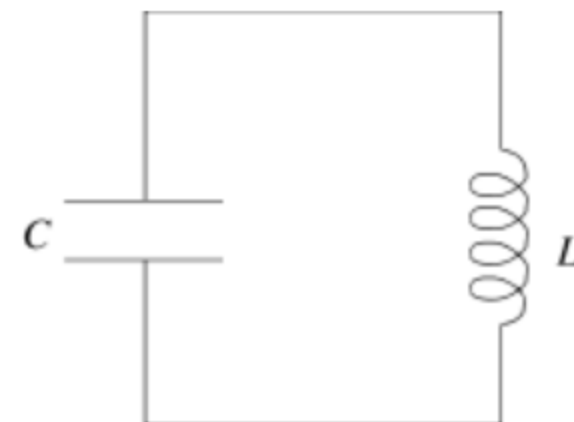
Che e' l'equazione di un oscillatore armonico con soluzione:

$$I(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

Mentre

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \omega L A \cos(\omega t + \phi)$$

Si vede che in generale $I(t)$ e $V_C(t)$ sono in quadratura di fase, cioe' le loro fasi differiscono di $\pi/2$.



Circuito LC

- Nell'istante in cui il condensatore è completamente carico ($\frac{dq}{dt} = 0 = -I$) con $V_C = V_0$ tutta l'energia è elettrica non essendoci energia magnetica ($I = 0$);
- successivamente il condensatore si scarica, la corrente cresce, l'energia è in parte elettrica e in parte magnetica
- fino a che $V_C = 0$, $i = i_0$, istante in cui tutta l'energia è magnetica
- Etc.

Il bilancio energetico in un istante generico è:

$$U = \frac{1}{2} C V_C^2 + \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} L I_0^2$$

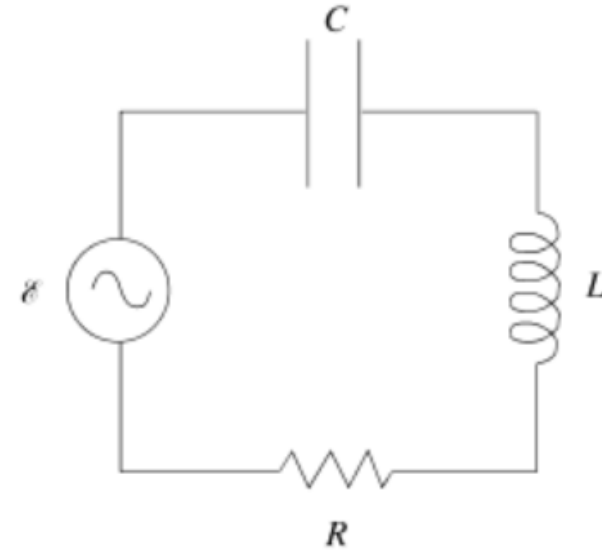
Il circuito LC è sede di un'oscillazione elettrica permanente (non smorzata) e per questa ragione viene anche chiamato **circuito oscillante**.

Circuito LC. Bilancio energetico

- Per mantenere un'oscillazione elettrica permanente in un circuito RLC occorre fornire con continuità la potenza che viene dissipata nel resistore, per esempio attraverso un generatore di fem variabile $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$.
- L'equazione del circuito è

$$\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi) + \mathcal{E}_L = \frac{q}{C} + RI$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = -\frac{\omega \mathcal{E}_0}{L} \sin(\omega t + \phi) \quad (*)$$



Oscillazioni permanenti in un circuito RLC

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = -\frac{\omega \mathcal{E}_0}{L} \sin(\omega t + \phi) \quad (*)$$

La soluzione generale e' la somma della soluzione generale della omogenea associata (RLC serie non forzato) e una soluzione particolare della (*), questa soluzione particolare e' di forma sinusoidale, e.g.: $I = I_0 \cos \omega t$. Infatti:

$$\begin{aligned} -\omega^2 I_0 \cos \omega t - \frac{R}{L} \omega I_0 \sin \omega t + \frac{I_0}{LC} \cos \omega t &= -\frac{\omega \mathcal{E}_0}{L} (\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi) \\ \Rightarrow -\frac{R}{L} \omega I_0 \sin \omega t + I_0 \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right) \cos \omega t &= -\frac{\omega \mathcal{E}_0}{L} \cos \phi \sin \omega t - \frac{\omega \mathcal{E}_0}{L} \sin \phi \cos \omega t \end{aligned}$$

L'eguaglianza deve essere valida in qualsiasi istante e quindi:

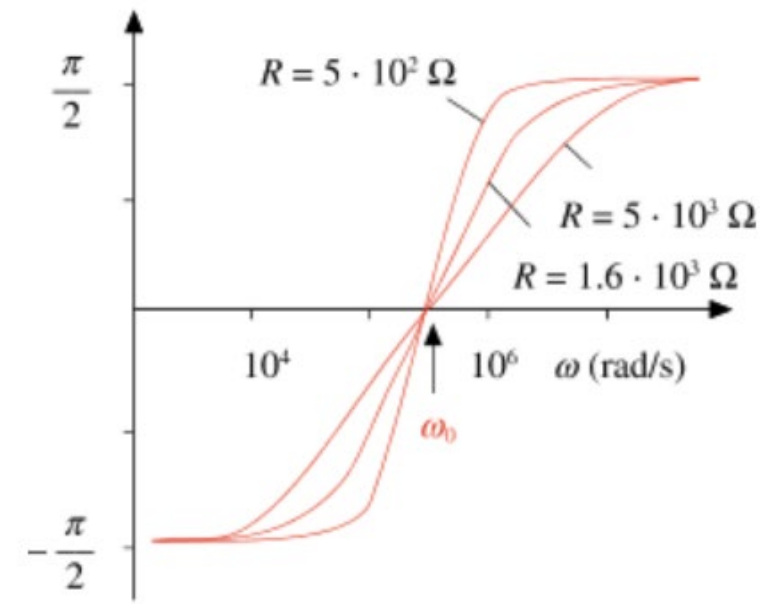
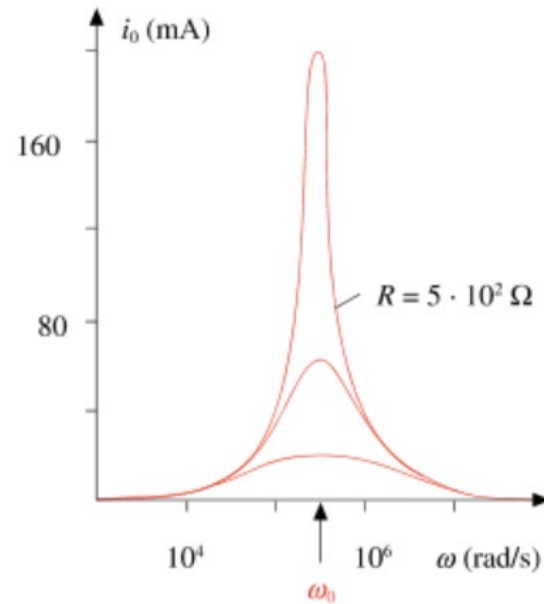
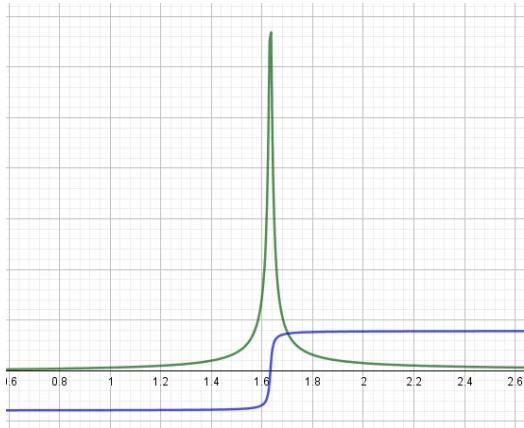
$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Oscillazioni permanenti in un circuito RLC

E' dunque possibile instaurare un'oscillazione elettrica permanente nel circuito RLC: applicando la f.e.m. variabile $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$ si ha nel circuito la corrente $I = I_0 \cos \omega t$, con la stessa pulsazione ω della f.e.m. applicata, e ampiezza dipendente da $\mathcal{E}_0$, ω e dai parametri del circuito, ma NON dalle condizioni iniziali

La f.e.m. pero' e' sfasata rispetto alla corrente di un angolo ϕ , anch'esso dipendente da ω e dai parametri del circuito.

[RLC resonance.ggb](#)



Oscillazioni permanenti in un circuito RLC

I grafici e le equazioni

$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Mostrano come quando la pulsazione della f.e.m. applicata e' eguale alla pulsazione propria del circuito, $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega^2 = 1/LC$:

- la corrente nel circuito RLC sia massima, $I_0 = \mathcal{E}_0/R$
- lo sfasamento tra corrente e f.e.m. sia nullo.

Il sistema e' in condizioni di **risonanza**. Il circuito si comporta come se fosse puramente resistivo.

Risonanza in un circuito RLC

Si definisce larghezza della risonanza la differenza tra i valori ω_2 e ω_1 , in corrispondenza dei quali la corrente massima assume il valore $\frac{\varepsilon_0}{R\sqrt{2}}$, cioè I_0^{res} ridotto di un fattore $\sqrt{2}$.

$$\text{Risolvendo } \frac{\varepsilon_0}{R\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} : \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}, \quad \omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$$

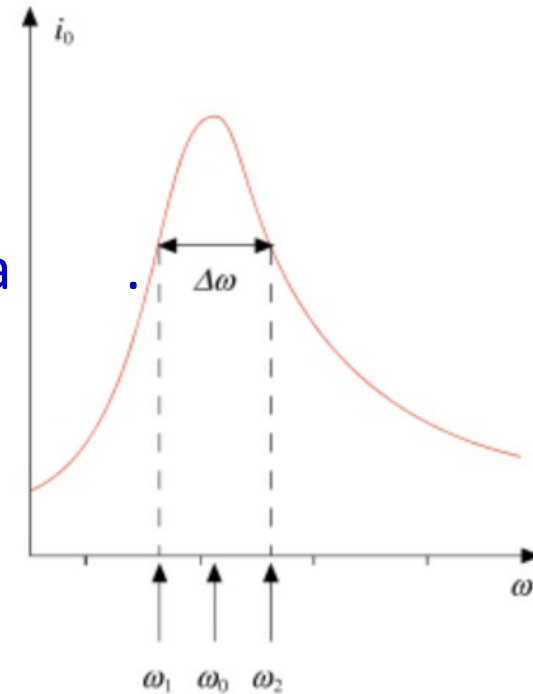
La larghezza della risonanza è definita come

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{con}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \text{chiamato fattore di merito della risonanza}$$

Il Q della risonanza è tanto maggiore quanto più stretta è la risonanza, cioè quanto più piccola è la resistenza R rispetto a $\omega_0 L$.

- Notiamo inoltre che $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$ ma che ω_1 e ω_2 non sono equidistanti da ω_0 .
- In particolare $\tan \phi_1 = -1$ e $\tan \phi_2 = 1$ ($\tan \phi_n = (\omega_n L - \frac{1}{\omega_n C})/R$)



Risonanza in un circuito RLC

Un circuito con una f.e.m. e una corrente che variano periodicamente con valor medio nullo si chiama circuito in regime alternato. Nell'uso comune il termine e' riservato alle variazioni sinusoidali, che sono un caso particolare.

Esaminiamo il comportamento in regime alternato sia dei singoli elementi di circuito che di alcune semplici combinazioni. Per poter assumere condizioni di stazionarieta' il periodo di oscillazione deve essere tale che $T \gg d/c$ con d dimensioni del circuito.

Circuiti in corrente alternata

Applicando ai capi di un resistore una f.e.m. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ si ha un passaggio di corrente attraverso R in accordo con la legge di Ohm:

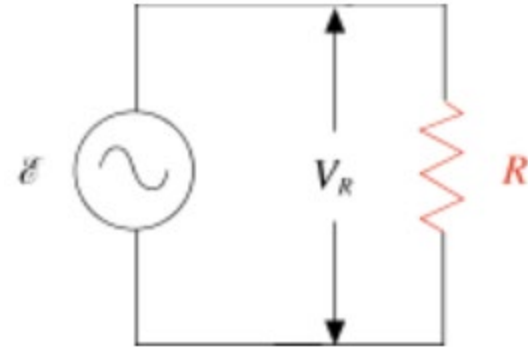
$$\mathcal{E} = RI \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos \omega t = I_0 \cos \omega t$$

In generale, se $I = I_0 \cos \omega t$ e' la corrente che scorre attraverso R

$$V_R = RI = RI_0 \cos \omega t = V_0 \cos \omega t$$

La corrente e' sempre in fase con la f.e.m. e tra i valori massimi sussiste la relazione

$$V_0 = RI_0$$

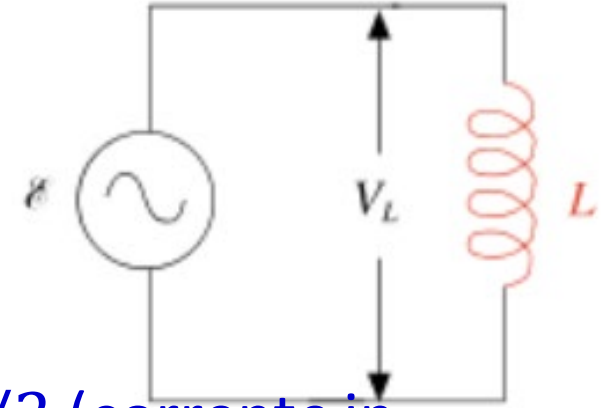


Circuiti con R

L'equazione di un circuito contenente una f.e.m. alternata e un induttore con resistenza nulla e':

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t \Rightarrow$$

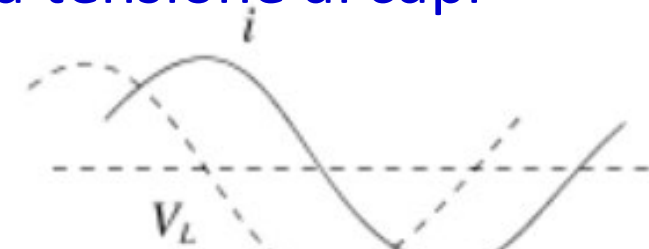
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$$



il valore massimo e' dato da $I_0 = \mathcal{E}_0 / \omega L$ e lo sfasamento vale $\pi/2$ (corrente in quadratura e in ritardo rispetto alla f.e.m.).

Se $V_L = -L dI/dt = -\omega L I_0 \sin \omega t = \omega L I_0 \cos(\omega t + \pi/2)$ e' la tensione ai capi della induttanza, questa e' in anticipo di $\pi/2$ sulla corrente e tra i valori massimi sussiste la relazione

$$V_0 = \omega L I_0$$



Il termine ωL si chiama **reattanza dell'induttore** e cresce linearmente con ω . Lo sfasamento e' invece indipendente da ω .

Circuiti con L

In caso di connessione di un C ad una f.e.m. alternata

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t = \frac{q}{C} \Rightarrow q = C\mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

la corrente vale

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega C\mathcal{E}_0 \sin \omega t = \omega C\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \pi/2)$$

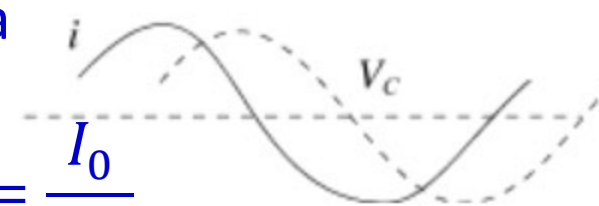
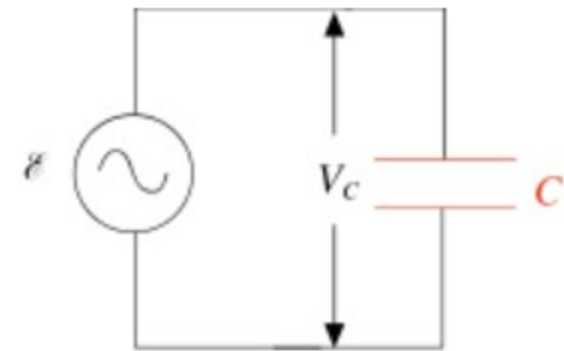
ed e' quindi in anticipo di $\pi/2$ rispetto alla f.e.m. e il suo valore massimo e' $I_0 = \omega C\mathcal{E}_0$

Per un condensatore inserito in un circuito qualsiasi e attraversato dalla corrente $I = I_0 \cos \omega t$, possiamo scrivere,

$$V_C = \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \pi/2) = V_0 \cos(\omega t - \pi/2), V_0 = \frac{I_0}{\omega C}$$

Il termine $1/\omega C$ si chiama **reattanza del condensatore** e dipende da ω .

Lo sfasamento e' invece indipendente da ω .



Circuiti con C

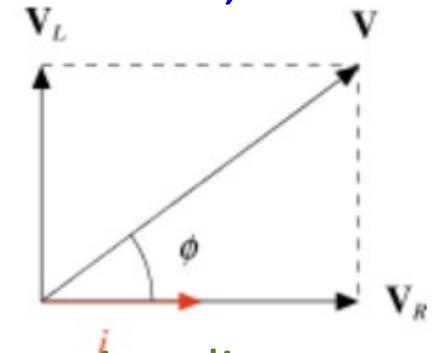
Applicando una f.e.m. alternata alla serie di un resistore e di un induttore abbiamo:

$$I = I_0 \cos \omega t, \quad V_R = RI_0 \cos \omega t, \quad V_L = \omega LI_0 \cos(\omega t + \pi/2)$$

Se rappresentiamo V_R e V_L con due vettori rotanti, $\vec{V}_L$ precede $\vec{V}_R$ di $\pi/2$ come mostrato nella figura. In questa figura il vettore rotante che rappresenta la corrente i è parallelo e concorde a $\vec{V}_R$. La somma $\vec{V}_R + \vec{V}_L$ è data dal vettore risultante $\vec{V}$, il cui modulo V_0 e la cui fase ϕ rispetto ad I sono espressi da

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I_0, \quad \tan \phi = \frac{\omega L}{R}$$

La proiezione $V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ è la tensione ai capi della serie.



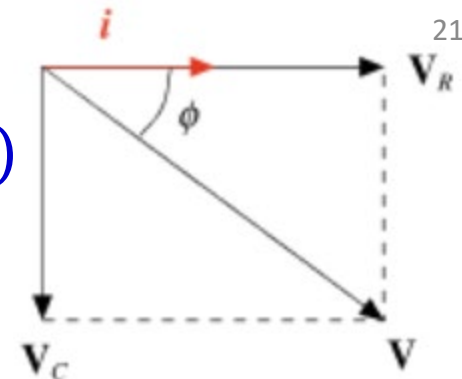
- Tale tensione è in anticipo di fase sulla corrente e i valori massimi sono proporzionali tra loro. Lo sfasamento dipende dal rapporto $\frac{\omega L}{R}$ e tende a $\pi/2$ se $R \ll \omega L$ (circuito praticamente soltanto induttivo) oppure a zero se $R \gg \omega L$ (circuito praticamente soltanto resistivo)

Circuiti con RL serie

Adottando la stessa costruzione, con V_C che segue V_R di $\pi/2$, si ha:

$$I = I_0 \cos \omega t, \quad V_R = RI_0 \cos \omega t, \quad V_C = \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \pi/2)$$

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi), \quad V_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} I_0, \quad \tan \phi = \frac{1}{\omega CR}$$



La fase ϕ è negativa in quanto V è sempre in ritardo rispetto a V_R (vedi figura); la tensione dunque è in ritardo rispetto alla corrente e i valori massimi sono proporzionali tra loro. L'importanza relativa dei termini R e $1/\omega C$ dipende dalla pulsazione, oltre che dai valori di R e C .

- $1/\omega C$ predomina al diminuire di ω (comportamento capacitivo), mentre al crescere di ω il comportamento tende a diventare resistivo.

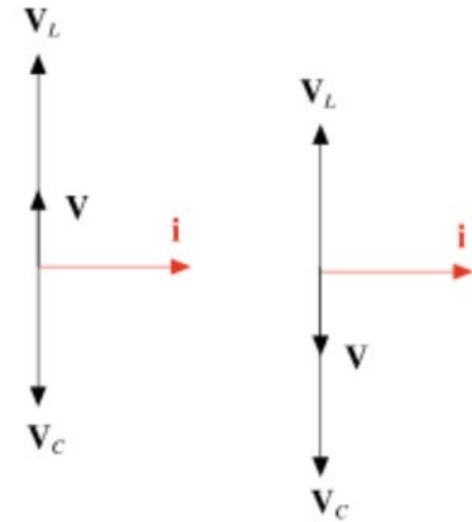
Circuiti con RC serie

- In questo caso abbiamo solo i vettori $\vec{V}_L$ e $\vec{V}_C$, paralleli e discordi, entrambi ortogonali al vettore $\vec{I}$:

$$I = I_0 \cos \omega t, V_L = \omega L I_0 \cos(\omega t + \pi/2), V_C = \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \pi/2)$$

$$\text{se } \omega L > \frac{1}{\omega C} \quad V = V_0 \cos(\omega t + \pi/2), V_0 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_0$$

$$\text{se } \omega L < \frac{1}{\omega C} \quad V = V_0 \cos(\omega t - \pi/2), V_0 = \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) I_0$$

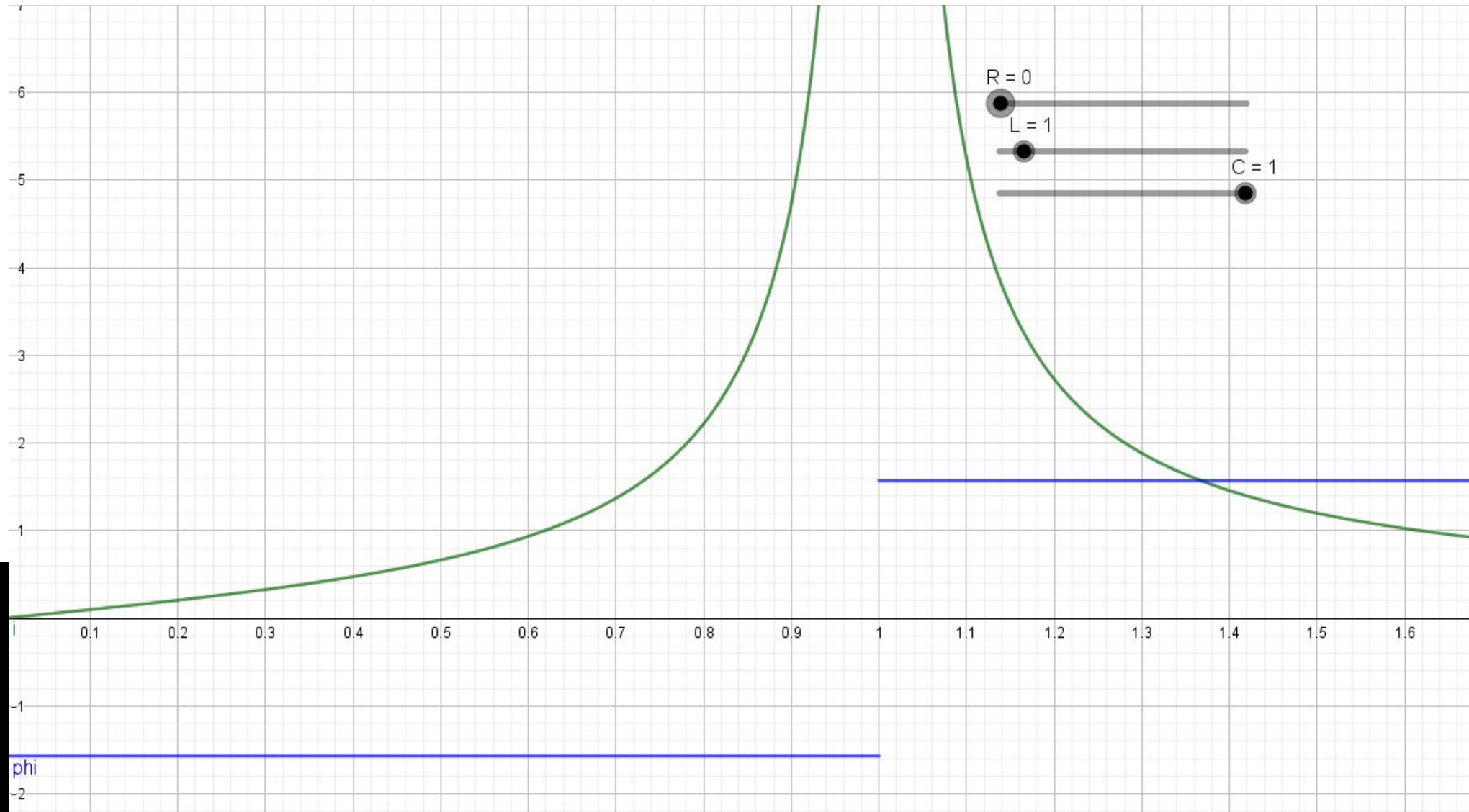


- A seconda della relazione tra ωL e $1/\omega C$, dipendente dalla pulsazione, il circuito si comporta come un induttore di induttanza L' tale che $\omega L' = \omega L - 1/\omega C$ o come un condensatore di capacità C' tale che $1/\omega C' = 1/\omega C - \omega L$.
- Il comportamento induttivo si ha per $\omega > \omega_0$, quello capacitivo per $\omega < \omega_0$. Se $\omega = \omega_0$, $\vec{V}_L$ e $\vec{V}_C$ sono eguali ed opposti per cui la tensione ai capi della serie LC è eguale a zero.

Circuiti con LC serie

$$\begin{aligned} \text{se } \omega > \omega_0 \quad V &= V_0 \cos(\omega t + \pi/2), \\ \text{se } \omega < \omega_0 \quad V &= V_0 \cos(\omega t - \pi/2), \end{aligned}$$

- Il comportamento induttivo si ha per $\omega > \omega_0$, quello capacitivo per $\omega < \omega_0$.



- Mettiamo assieme tutti gli ingredienti nel circuito RCL:

$$I = I_0 \cos \omega t ,$$

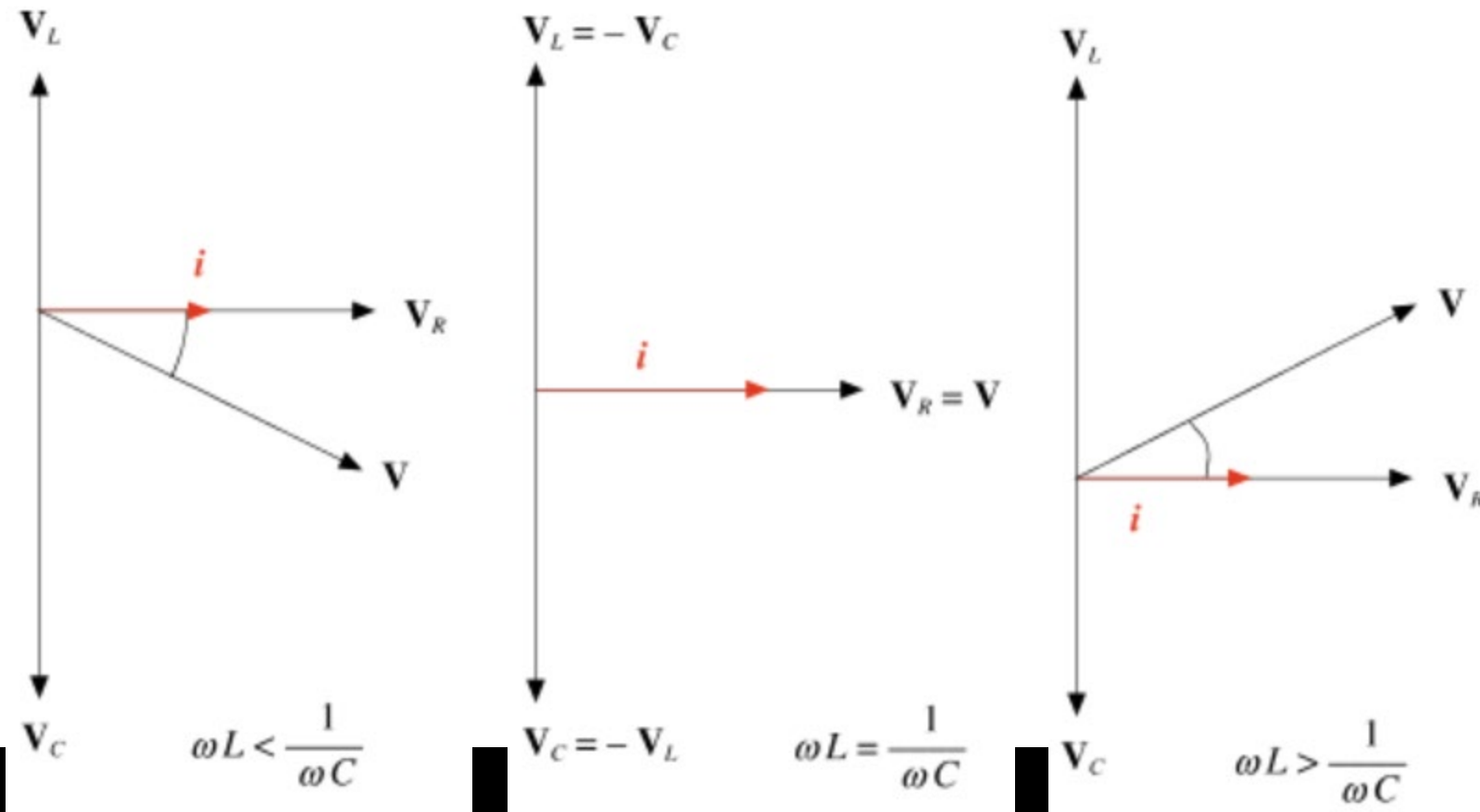
$$V_R = RI_0 \cos \omega t , V_L = \omega LI_0 \cos(\omega t + \pi/2) , V_C = \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \pi/2)$$

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi) , V_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_0 , \tan \phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

- Si vede come al crescere di ω il circuito passi dalla situazione in cui $1/\omega C$ e' preponderante rispetto a ωL
 - (comportamento capacitivo, $\phi < 0$, come se fosse una serie RC)
- a quella in cui ωL e' preponderante rispetto a $1/\omega C$
 - (comportamento induttivo, $\phi < 0$, come se fosse una serie RL).
- La condizione di risonanza e' quella in cui c'e' la transizione da un regime all'altro

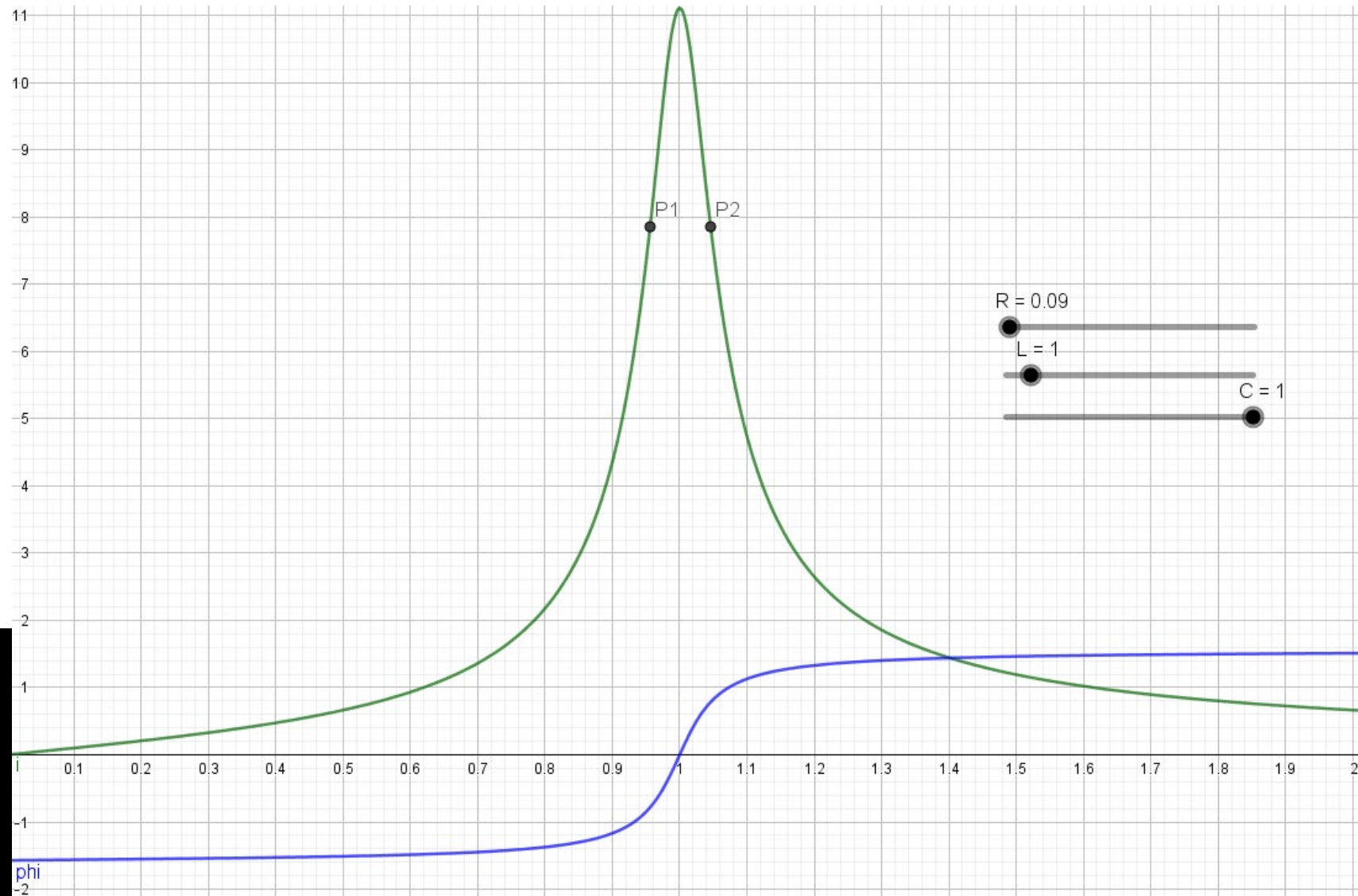
Circuiti con RLC serie

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi), V_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_0, \tan \phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$



Circuiti con RLC serie

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi), V_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_0, \tan \phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$



I risultati trovati possono essere riassunti nel modo seguente: quando attraverso uno o piu' elementi R, L, C in serie viene fatta passare una corrente alternata

$$I = I_0 \cos \omega t$$

(ad esempio perche' si collega alla serie un generatore di f.e.m. alternata) la tensione ai capi della serie e':

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Dove il valore V_0 e' legato al valore massimo I_0 dalla relazione di proporzionalita'

$$V_0 = Z_0 I_0$$

Sia la grandezza Z_0 , detta **impedenza della serie**, che la fase ϕ dipendono dai parametri del circuito e dalla pulsazione ω .

Circuiti RCL serie

Partiamo da questi risultati per introdurre un metodo simbolico generale per studiare circuiti con elementi RCL (in serie e/o parallelo) in regime sinusoidale:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi), \quad I = I_0 \cos \omega t, \quad \mathcal{E}_0 = Z_0 I_0$$

L'effetto dell'elemento attraversato dalla corrente i è espresso dall'impedenza Z_0 e dallo sfasamento ϕ . Negli elementi singoli si è trovato:

$$R \quad Z_0 = R \quad \phi = 0$$

$$L \quad Z_0 = \omega L \quad \phi = \pi/2$$

$$C \quad Z_0 = 1/\omega C \quad \phi = -\pi/2$$

In un circuito composto da più elementi l'effetto complessivo è dato da una $Z_0(\omega)$ e da una $\phi(\omega)$.

Metodo simbolico

Se riprendiamo l'equazione del circuito in figura

$$\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi) + \mathcal{E}_L = \frac{q}{C} + RI$$

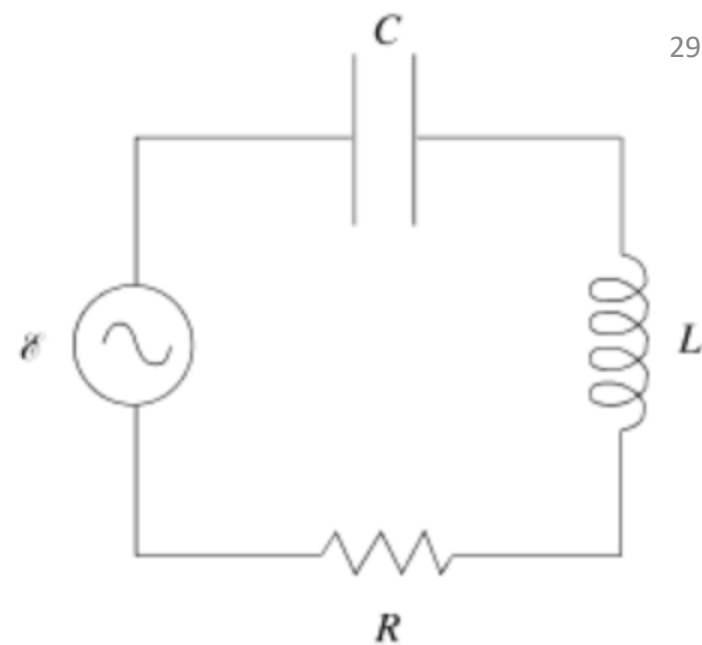
e scriviamo la fem in forma complessa $\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ otteniamo

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = i\omega \frac{\mathcal{E}_0}{L} e^{i(\omega t + \phi)}$$

che ha come soluzione particolare $I = I_0 e^{i\omega t}$.

Verifichiamo che questa soluzione porge anche che:

$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



Metodo simbolico

Pertanto, quando si considera una f.e.m. complessa $\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ l'equazione del circuito ammette come soluzione una corrente complessa $I = I_0 e^{i\omega t}$.

Trovata la soluzione complessa corrispondente alla data sollecitazione complessa, la parte reale e' a sua volta una soluzione, corrispondente alla parte reale della sollecitazione.

Ricordando inoltre che $\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \phi)} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} e^{i\phi}$ e che nel caso di un RCL avevamo

$$\text{trovato che } \mathcal{E}_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_0 = Z_0 I_0 \text{ si puo' scrivere}$$

$$\mathcal{E} = Z_0 I_0 e^{i\omega t} e^{i\phi} = Z_0 e^{i\phi} I_0 e^{i\omega t} = ZI$$

le grandezze complesse $\mathcal{E}$ e I sono tra loro proporzionali.

Il coefficiente di proporzionalita' Z e' detto **impedenza complessa** del circuito.

Impedenza complessa

$$\mathcal{E} = Z_0 e^{i\phi} I_0 e^{i\omega t} = ZI$$

L'impedenza complessa riassume in se' l'effetto del circuito:

- il suo modulo da' il rapporto tra i valori massimi di f.e.m. e corrente
- la sua fase da' lo sfasamento introdotto dal circuito tra f.e.m. e corrente reali.

Possiamo scrivere relazioni analoghe per i singoli elementi R, L, C di un circuito.

Impedenza complessa

$$\mathcal{E} = Z_0 e^{i\phi} I_0 e^{i\omega t} = ZI$$

- Nel caso resistivo:

$$\mathcal{E} = Z_R I = RI \Rightarrow Z = R \text{ (reale)}$$

- Nel caso induttivo ($I = I_0 e^{i\omega t}$):

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} = i\omega LI = Z_L I \Rightarrow Z_L = i\omega L = \omega L e^{i\pi/2}$$

- Nel caso capacitivo ($V_C = V_0 e^{i(\omega t + \phi)}$):

$$I = I_0 e^{i\omega t} = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} = i\omega C V_0 e^{i(\omega t + \phi)} = i\omega C V = I \Rightarrow$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2}$$

Impedenza di R, L, C

L'aver stabilito una relazione lineare tra tensione e corrente (complesse) anche per un induttore e per un condensatore permette di estendere i risultati per le serie e i paralleli di resistenze alle serie e ai paralleli di impedenze.

In regime sinusoidale i circuiti con elementi R, L e C si possono trattare come circuiti ohmici una volta che si utilizzino le impedenze complesse.

Per es:

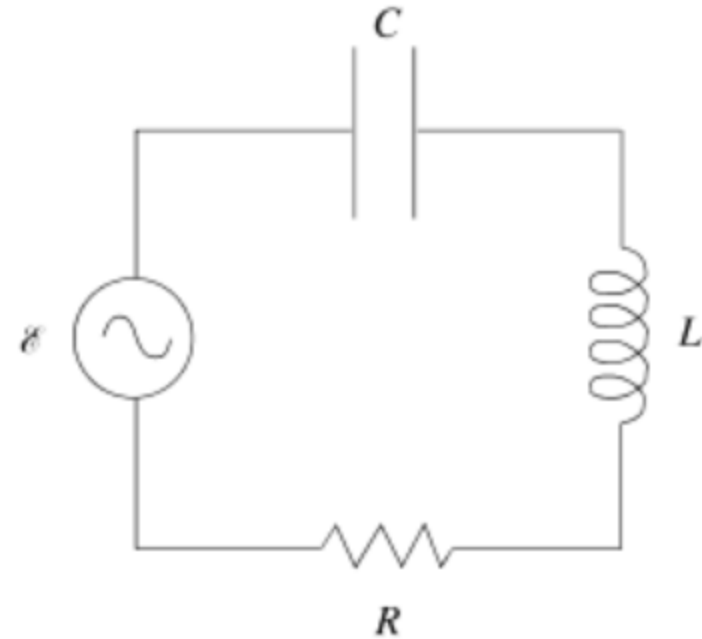
- Un RCL serie e' descritto $\mathcal{E} = Z_{TOT}I = (Z_R + Z_C + Z_L)I$
- Un RCL parallelo e' descritto da $\mathcal{E} = Z_{TOT}I = \left(\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L}\right)^{-1} I \Rightarrow I = Y_{TOT}\mathcal{E}$
con $Y = \frac{1}{Z}$ ammettenza. In questo caso e' comodo scrivere $Y_{TOT} = Y_R + Y_C + Y_L$

Legge di Ohm generalizzata

Risolviamo il circuito RCL serie in alternata utilizzando il metodo simbolico

34

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= Z_{TOT}I = (Z_R + Z_C + Z_L)I \\ Z_{TOT} &= R - \frac{i}{\omega C} + i\omega L = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \\ &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{i\phi} \\ \tan \phi &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\end{aligned}$$



Esempio: circuito RLC serie

L'applicazione di una f.e.m. alternata ad una rete lineare provoca il passaggio di una corrente alternata e l'erogazione di una potenza il cui valore istantaneo e' dato dal prodotto $\wp(t) = \mathcal{E}(t)I(t)$.

Con i metodi descritti nei paragrafi precedenti siamo in grado di calcolare la $I(t)$ per una data $\mathcal{E}(t)$ e quindi la potenza.

Riferendoci ad un generico circuito o ad una qualsiasi sua parte e chiamando $V(t)$ la tensione ai capi quando la corrente vale $I(t)$ e ϕ lo sfasamento tra le due grandezze, abbiamo:

$$\begin{aligned}\wp(t) &= V(t)I(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) I_0 \cos(\omega t) = \\ &= V_0 I_0 (\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) \cos \omega t = V_0 I_0 (\cos^2 \omega t \cos \phi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \phi)\end{aligned}$$

Il valore medio in un periodo e':

$$\wp_m = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \phi = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \phi = V_{eff} I_{eff} \cos \phi$$

Potenza in regime alternato

$$\wp = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \phi = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \phi = V_{eff} I_{eff} \cos \phi$$

Questa e' la formula di Galileo Ferraris; il termine $\cos \phi$ chiamato **fattore di potenza**.

La potenza media, detta potenza reale, dissipata nel circuito (o da una sua componente) e' in generale diversa da zero, a meno che non sia $\phi = \pi/2$, fatto che si verifica solo per un induttore o per un condensatore o per una loro combinazione, qualora si possano trascurare le resistenze intrinseche di tali elementi e quelle dei collegamenti.

La condizione $\phi = 0$, $\cos \phi = 1$ viceversa si realizza quando la reattanza del circuito e' nulla, come avviene per un circuito puramente resistivo o in particolari situazioni, come quelle di risonanza.

Potenza in regime alternato

$$\wp = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \phi = V_{eff} I_{eff} \cos \phi$$

Per un dato circuito o per un dato elemento di circuito V_0 e I_0 sono legati da $V_0 = Z_0 I_0$, dove Z_0 e' il modulo dell'impedenza complessa; analogamente $V_{eff} = Z_0 I_{eff}$. Si puo' pertanto scrivere:

$$\wp = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{Z_0} \cos \phi = \frac{1}{2} Z_0 I_0^2 \cos \phi = \frac{V_{eff}^2}{Z_0} \cos \phi = Z_0 I_{eff}^2 \cos \phi$$

Potenza in regime alternato

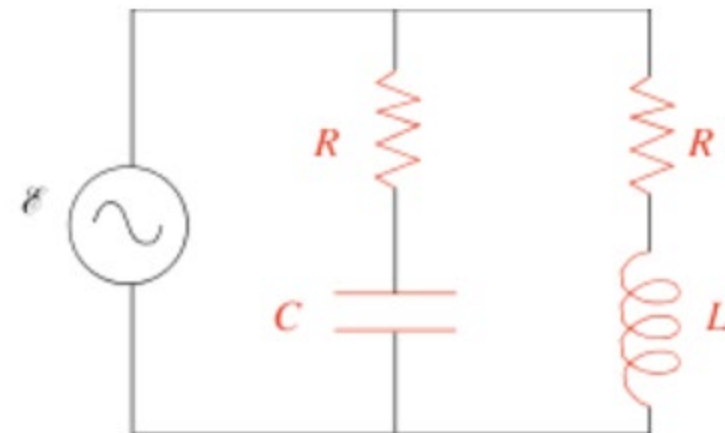
Esempio 11.4

Calcolare per il circuito in figura, a cui è applicata la f.e.m. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, con $\mathcal{E}_0 = 10 \text{ V}$ e $\omega = 500 \text{ rad/s}$, il valore della corrente nei singoli rami e quello della corrente totale. Si ponga $R = 8 \, \Omega$, $C = 100 \, \mu\text{F}$, $L = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ H}$.

Verificare per quando $\omega = 1/\sqrt{LC}$ l'impedenza diventa reale

Calcolare la potenza media dissipata sul primo ramo (RC) del circuito

Calcolare la potenza media erogata dal generatore nel caso in cui $\omega^2 = 1/LC$



Esempio