

Esercizi

Calcolo di B :

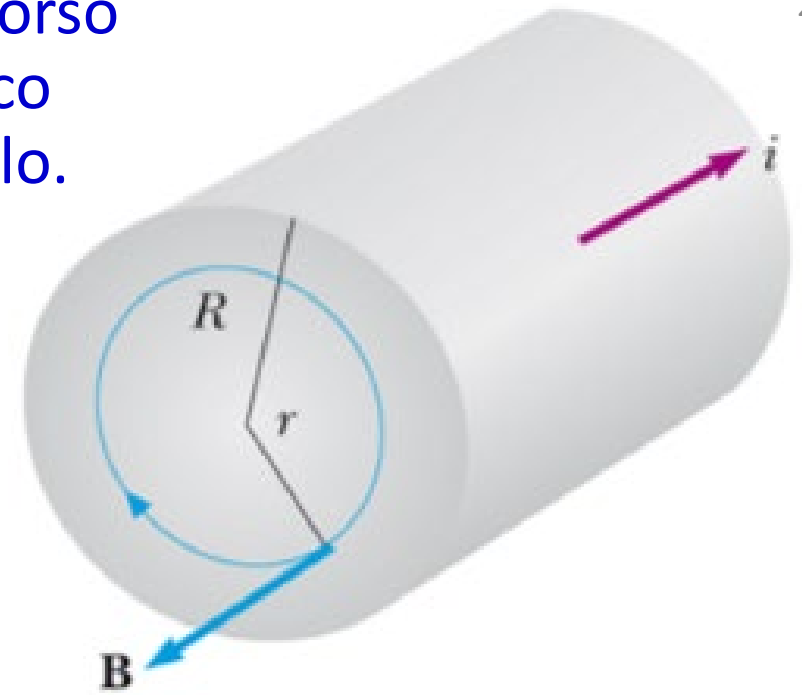
- B di un tubo
- B di un solenoide rettilineo, toroidale e finito
- Bobine di Helmholtz

Spira in B .

Fem su un conduttore in moto in B (ruota di Barlow)

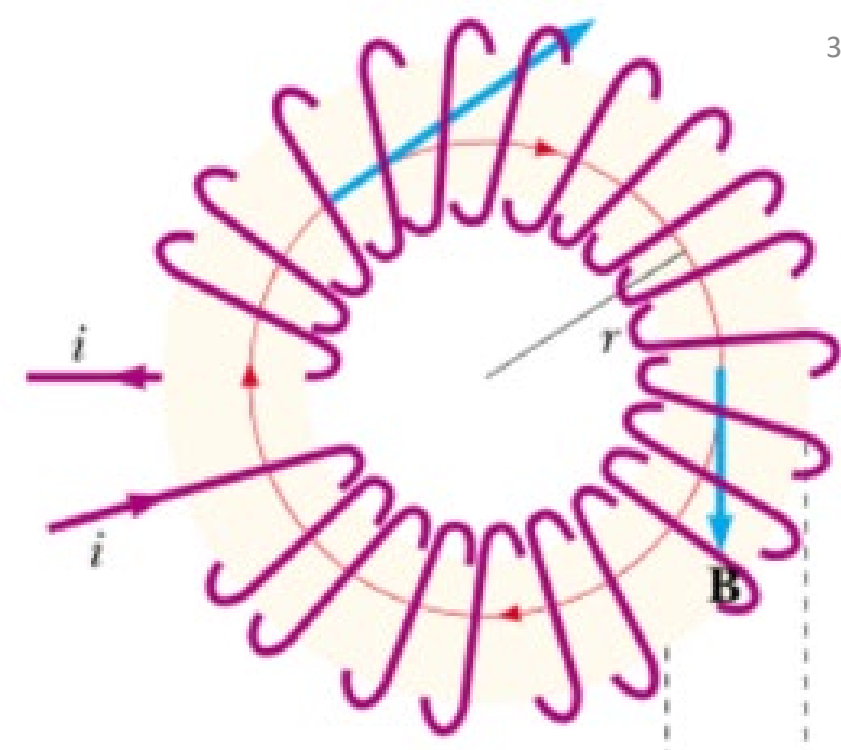
Cenni su focalizzazione magnetica agli acceleratori

Un filo rettilineo indefinito di raggio R , vedi figura, e' percorso da una corrente di intensita' i . Calcolare il campo magnetico prodotto dal filo in funzione della distanza r dall'asse del filo.



Legge di Ampere. Applicazione

Un solenoide e' costituito da N spire avvolte attorno ad una superficie toroidale. Calcolare il campo magnetico



Legge di Ampere. Applicazione

I Problema . Un sistema consiste di due fili paralleli posti ad una distanza $d=50$ cm l'uno dall'altro, e di una piccola spira di area Σ , e resistenza $R=2.5 \Omega$, che giace nel piano definito dai fili. La spira, posta ad una distanza $x=40$ cm dal primo filo, e' percorsa da una corrente costante i_s : il momento di dipolo corrispondente e' $m=2 \cdot 10^{-4} \text{ Am}^2$, orientato nella direzione ortogonale al piano. Nel primo filo scorre una corrente di intensita' i_1 e nel secondo una corrente $i_2 = 31.25 \text{ mA}$ in verso opposto alla precedente. Calcolare

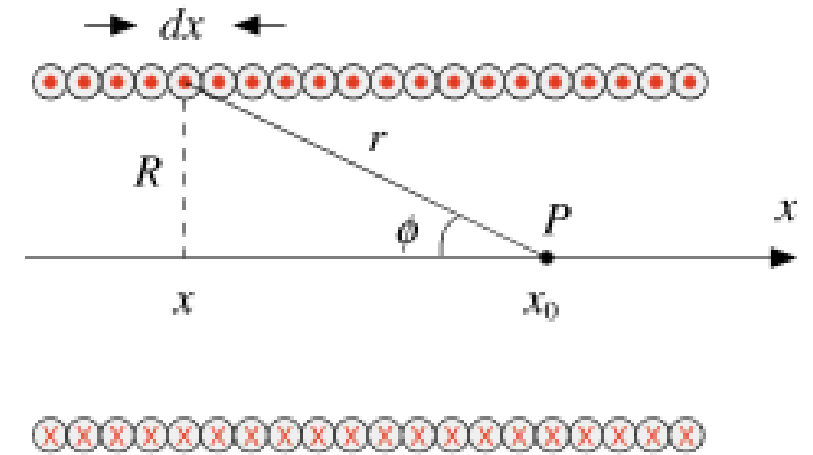
- 1) Il valore di i_1 perche' la forza agente sulla spira sia nulla.
- 2) Il modulo del lavoro, W , necessario per ruotare la spira di 90° , mantendendo costanti tutte le correnti, e con $i_1 = i_2 = 0.5 \text{ A}$.

Successivamente, si spegne la corrente nella spira. Ruotando in queste condizioni la spira di 90° la carica che circola su di essa e' $Q=1.25 \cdot 10^{-10} \text{ C}$. Ricavare :

- 3) Il valore di Σ
- 4) Il valore della corrente i_s , relativa ai punti 1 e 2 del problema.

Ex

- Calcolare il campo B sull'asse di una spira di raggio R percorsa da corrente I .
- Calcolare il campo B sull'asse di un solenoide rettilineo di raggio R , lunghezza d , densita' di spire n e percorso da corrente I .



Campo di una spira e di un solenoide.





- La legge di Biot-Savart fornisce il campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito. Proviamo ora a calcolare il campo generato da un filo semi-infinito nel punto P che si trova nel piano $\perp$ alla semiretta e passante per la sua origine.

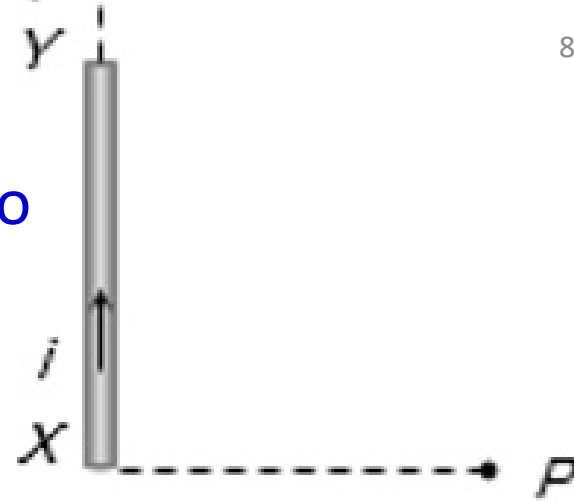
Kahoot

Δ) Non si può calcolare banalmente, la simmetria è rotta e la direzione del campo non è prevedibile senza effettuare l'integrale completo.

$\diamond$) È la metà del campo del filo infinito. Stessa direzione e stesso verso.

O) È il campo del filo infinito $/\sqrt{2}$. Direzione 45° (secondo-quarto quadrante)

$\square$) Mah!



Rail gun. Campo di un filo semi-infinito

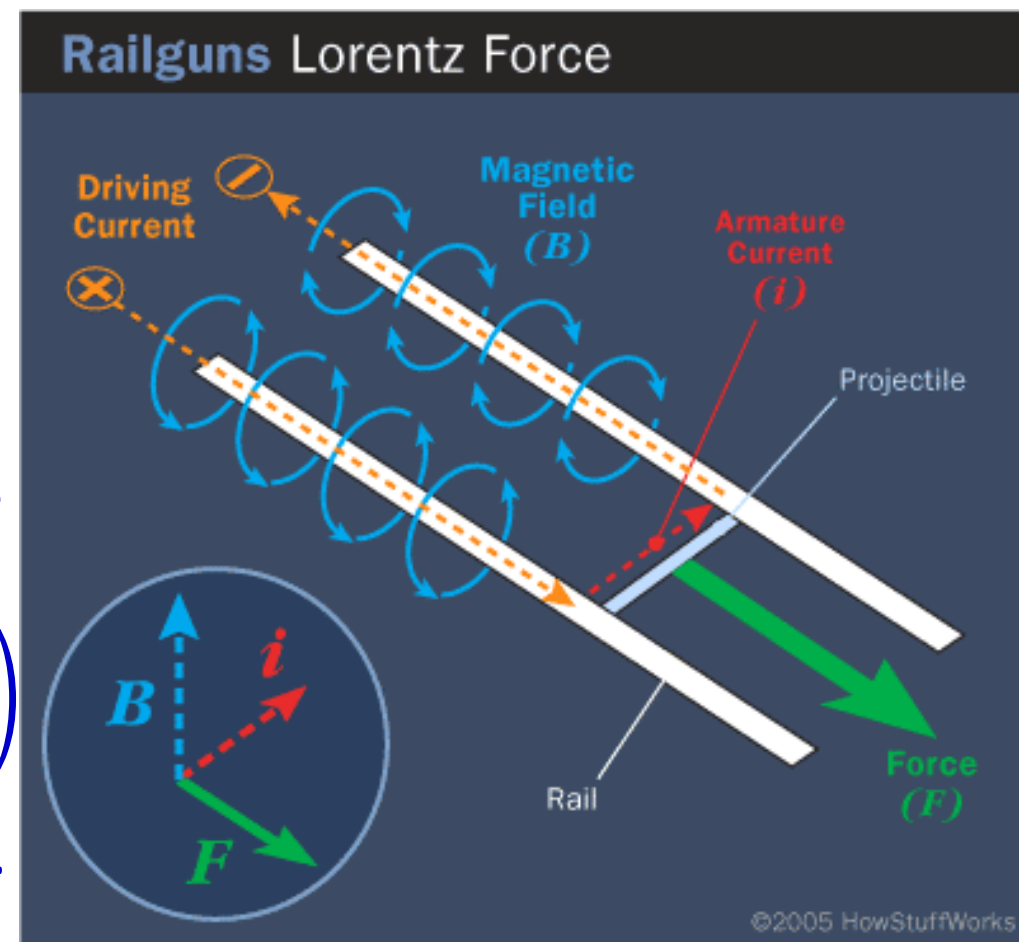
- Il campo magnetico generato da 1 conduttore semi-infinito quindi segue la legge di Biot-Savart, a meno di un fattore $\frac{1}{2}$.

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r}$$

- Il principio su cui si basa il rail-gun e' di sottoporre un conduttore mobile ad una forza di Lorentz generata dalla stessa corrente che fluisce attraverso i 2 fili («semi-infiniti»).

$$F = \int_{r_0}^{d-r_0} i(B_1(r) + B_2(r))dr = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$$

Con r_0 «spessore» del filo e d distanza tra i due fili.



Rail gun. Forza su un conduttore tra 2 fili.

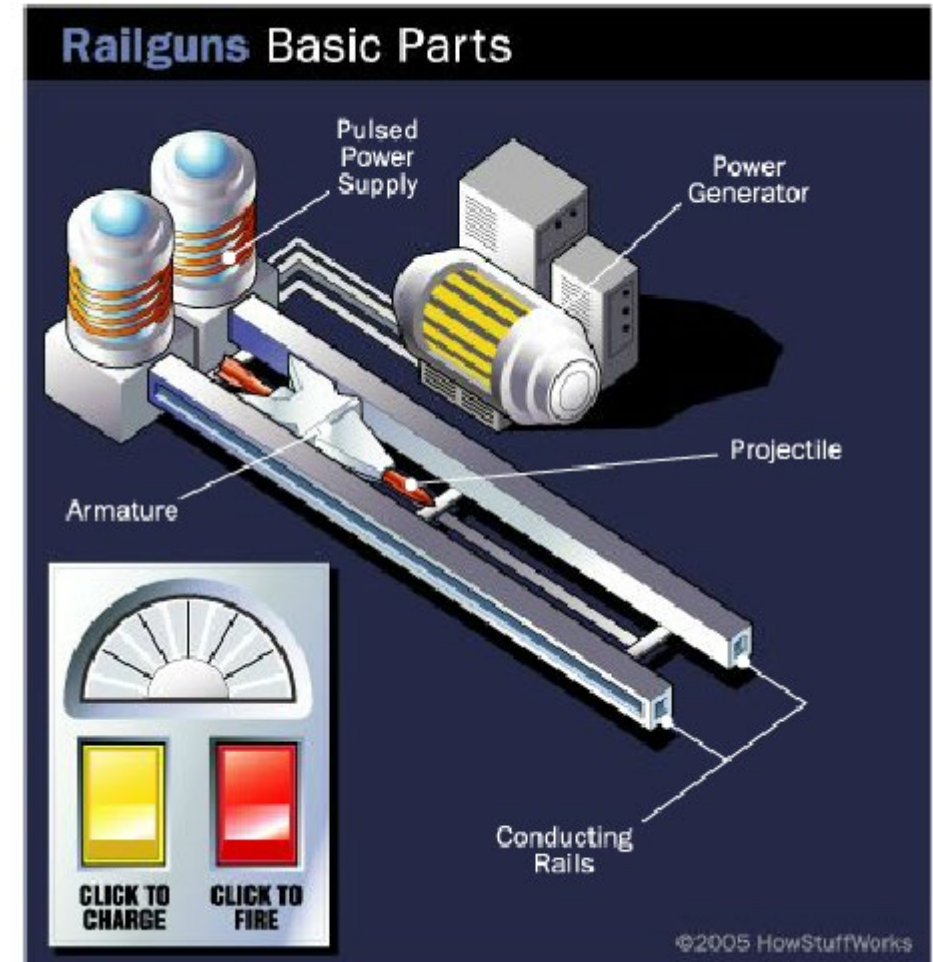
- Il campo magnetico generato da 1 conduttore semi-infinito quindi segue la legge di Biot-Savart a meno di un fattore $\frac{1}{2}$.

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r}$$

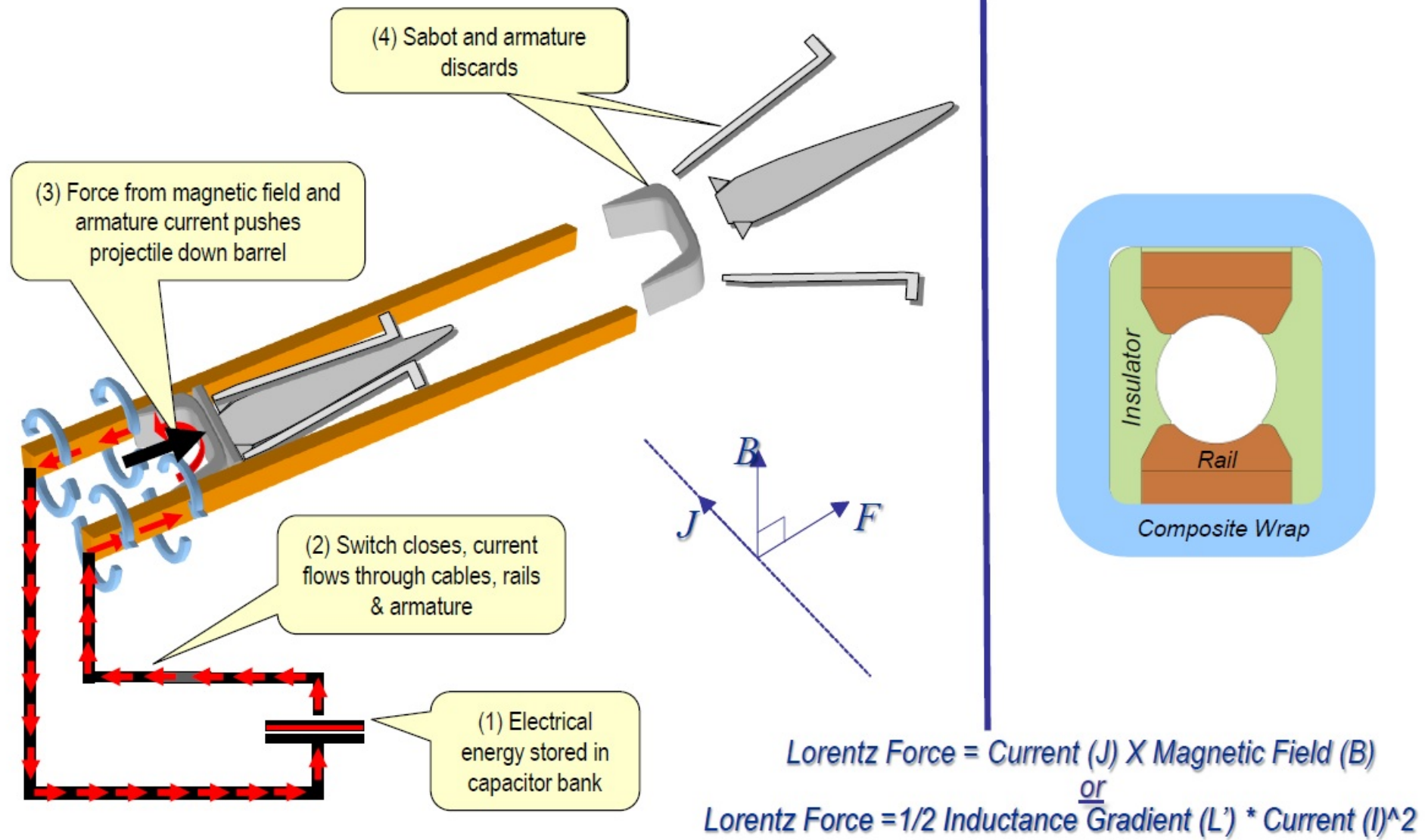
- Il principio su cui si basa il rail-gun e' di sottoporre un conduttore mobile ad una forza di Lorentz generata dalla stessa corrente che fluisce attraverso i 2 fili («semi-infiniti»).

$$F = \int_{r_0}^{d-r_0} i(B_1(r) + B_2(r))dr = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi} \ln \left(\frac{d - r_0}{r_0} \right)$$

Con r_0 «spessore» del filo e d distanza tra i due fili



Rail gun. Forza su un conduttore tra 2 fili.

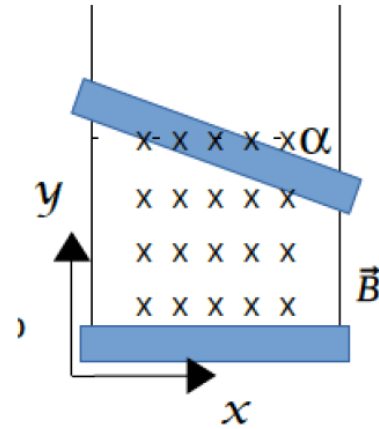


Rail gun. Forza su un conduttore tra 2 fili.

Cognome _____ Nome _____ Mat. _____ Svolge I/II/III/T

Problema 1 (ElettroMagnetismo) Una sbarretta conduttrice, massa m e resistenza $R=1\Omega$, può scorrere senza attrito a contatto con due guide conduttrici metalliche verticali, di resistenza trascurabile. La sbarretta è inclinata di un angolo $\alpha=45^\circ$ rispetto alla direzione verticale. Il circuito è chiuso da una sbarra orizzontale di resistenza $R'=R$ e lunghezza $L=0.5\text{m}$. Il sistema è in equilibrio in presenza di un campo magnetico $B_0=2\text{T}$ perpendicolare rispetto al piano del circuito orientato come in figura, se sulla sbarra circola una corrente $i_0=500\text{mA}$. Calcolare:

- 1) La massa m .
 - 2) La forza F che si sviluppa complessivamente nei punti di contatto tra le due guide e la sbarretta, attribuendo il segno consistente con il sistema cartesiano di assi descritto in figura.
- Ad un certo istante ($t_0=0$) si spegne la corrente nel circuito.
- 3) Calcolare la carica Q che circola nel circuito se la sbarra cade di un tratto $y=10\text{ cm}$, con $B=\text{costante}$.
 - 4) Si supponga viceversa che il campo magnetico vari in modo da mantenere fissa la sbarra con il suo centro alla quota $h=0.75\text{ m}$. Ricavare l'espressione di B in funzione del tempo, $B(t)$, e calcolare l'istante t_1 in cui il campo magnetico si annulla.



Ex. Compito IAS/IM 17 Feb 2016

Cognome e Nome : _____ Matr.: _____

Svolge: ☐ Campi ☐ Onde ☐ Relatività ☐ Teoria

1. Campi

Sia dato un solenoide rettilineo di lunghezza $L = 1\text{ m}$, con $N = 200$ spire (in totale) e di sezione (circolare) $\Sigma = \pi r^2$ con $r = 0.1\text{ m}$. Quando il solenoide è percorso da una corrente di intensità i il campo magnetico in prossimità dell'asse del solenoide è dato dalla espressione

$$B(x) = \frac{\mu_0 i n}{2} \left[\frac{L + 2x}{\sqrt{(L + 2x)^2 + 4r^2}} + \frac{L - 2x}{\sqrt{(L - 2x)^2 + 4r^2}} \right]$$

Dove x è la distanza (lungo l'asse) misurata dal centro del solenoide e n è la densità di spire.

- 4) La spira (ora a distanza $\bar{x} = 1.5\text{ m}$ dal centro del solenoide, e con asse ortogonale a quello del solenoide) viene ora collegata ad un generatore di corrente costante in modo che il suo momento di dipolo magnetico sia $m = 10^{-6}\text{ A} \cdot \text{m}^2$. Quanto vale la forza netta agente sulla spira?

$$[\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{ H/m}]$$

- 5) Quanto vale il momento torcente sulla spira?

- 6) Approssima la spira ad un anello di rame con momento di inerzia $I = 10^{-7}\text{ kg m}^2$. Se la spira viene lasciata libera di ruotare (ma non di traslare) attorno ad un asse $\perp$ all'asse del solenoide, quale è la velocità angolare della spira quando $\theta = 0$?

Ex. Compito IAS/IM 13 Feb 2017

Cognome e nome _____, #Matricola _____, Svolge: I II III Teoria

I Problema Un filo conduttore rettilineo infinito e' disposto lungo l'asse orizzontale z ed e' percorso da una corrente uniforme con densità $\vec{j} = 1.3 \frac{A}{mm^2} \hat{z}$. Il raggio del filo e' $R=1.2 \text{ cm}$. Il campo magnetico dentro il filo ha la forma $\vec{B} = k(-y, x, 0)$ dove k dipende dai dati del problema.

1.1) Calcolare il modulo del campo magnetico B a distanza $d=0.7 \text{ cm}$ dall'asse del filo.

Una piccola bobina piana quadrata di lato $l=3\text{cm}$ e $N=100$ spire giace sul piano yz con due lati paralleli al filo, a una distanza $D=0.5\text{m}$ da esso e vi si avvicina a velocità $v=6\text{m/s}$.

1.2) Calcolare la f.e.m. indotta $\mathcal{E}_i$ nella bobina.

1.3) Calcolare il campo elettrico $\vec{E}$ all'interno del filo sapendo che la sua conducibilità elettrica e' $\sigma=10^8 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$.

1.4) Si ricava una piccola cavità' in prossimità' dell'asse del filo e vi si pone un dipolo magnetico con momento $\vec{m} = (10^{-6}, 0, 0) \text{ Am}^2$. Calcolare la forza F sul dipolo nell'approssimazione che le piccole dimensioni della cavità' non perturbino la forma del campo B .

Ex. (quasi) compito 17 Feb 2015

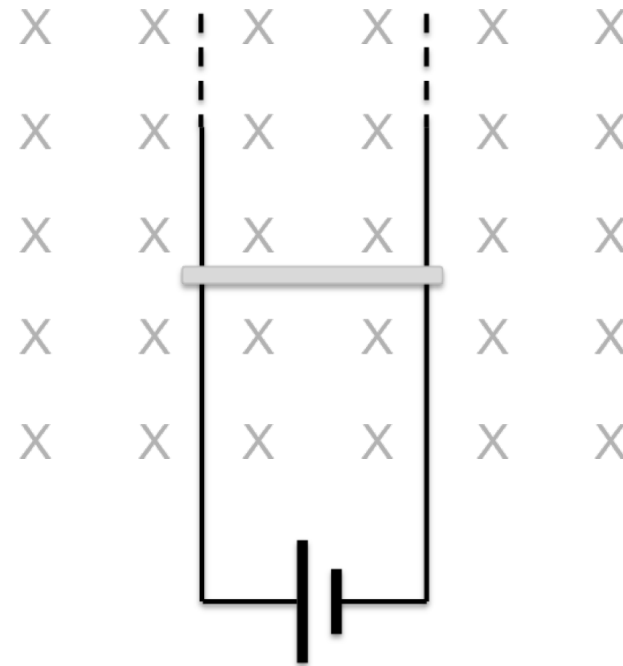
5.20. Una spira circolare di raggio $R = 10 \text{ cm}$, percorsa da una corrente $i_1 = 50 \text{ A}$, è disposta verticalmente. Una piccola spira quadrata, di lato $d = 5 \text{ mm}$, percorsa da una corrente $i_2 = 0.1 \text{ A}$, concorde a i_1 , è complanare e coassiale alla spira più grande. Se la spira piccola è libera di ruotare attorno ad un asse verticale passante per il suo centro, rispetto al quale presenta un momento d'inerzia $I = 10^{-9} \text{ Kg m}^2$, calcolare qual è il periodo delle piccole oscillazioni. Se invece la spira piccola, restando verticale, è disposta a 90° rispetto a quella grande e risente di un momento torcente di costante $K = 6.10 \cdot 10^{-10} \text{ Nm/rad}$, calcolare qual è la sua posizione di equilibrio.

$$T = 7.1 \text{ s}$$

$$\mu B \cos \alpha = K \alpha$$

Nigro-Voci

Problema 2.

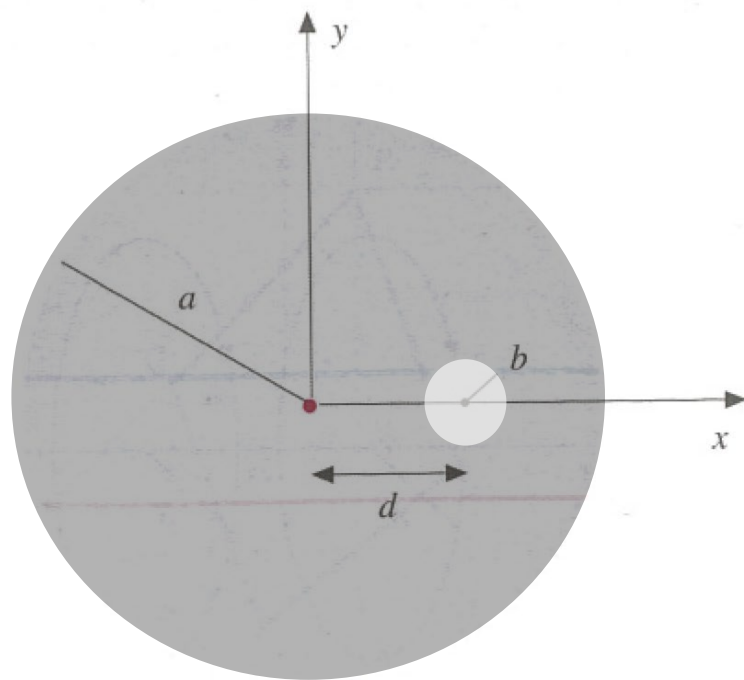


Un'asta conduttrice di lunghezza $d = 20$ cm, massa $m = 0.2$ kg e resistenza $R = 0.5 \Omega$ può scorrere senza attrito su due guide verticali conduttrici, connesse come in figura ad un generatore di forza elettromotrice con il polo positivo a sinistra. Nella regione esiste un campo magnetico $B = 1$ T (entrante nel foglio in figura) perpendicolare al piano del circuito. All'istante $t = 0$, mentre l'asta è ferma, poggiata su due supporti laterali, l'interruttore viene chiuso: l'asta comincia a muoversi verso l'alto raggiungendo in pratica, dopo una fase transitoria, una certa velocità limite v_f . Tenendo conto della gravità (con $g = 9.8$ m/s²) e supponendo che il resto del circuito abbia resistenza trascurabile, determinare:

- (a) la forza elettromotrice $\mathcal{E}_0$ del generatore, sapendo che la velocità limite è $v_f = 10$ m/s;
- (b) la potenza P erogata dal generatore a regime e quella P_g spesa contro la forza di gravità;
- (c) l'accelerazione iniziale a_0 dell'asta, trascurando l'induttanza del circuito all'istante iniziale.

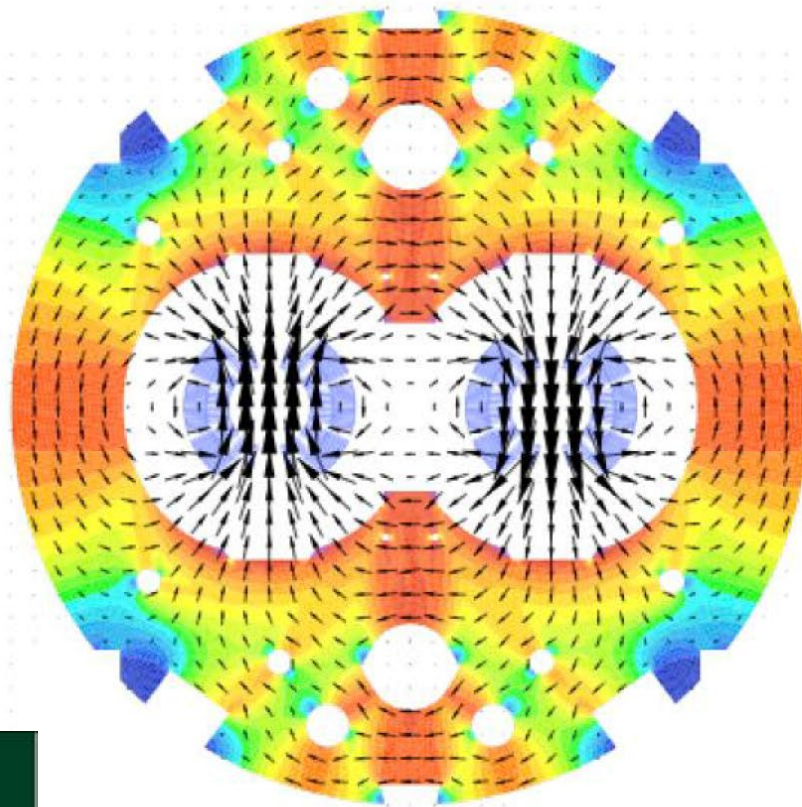
Ex 2016

8.12 Un conduttore cilindrico molto lungo di raggio $a = 2$ cm ha nel suo interno una cavità cilindrica di raggio $b = 0.3$

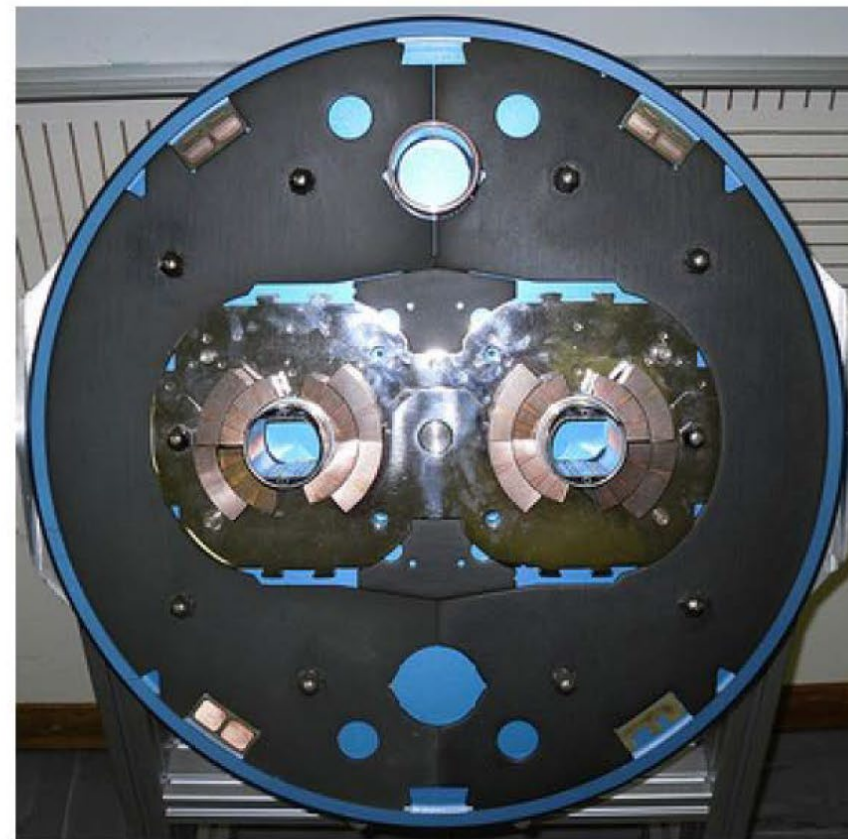


cm, essa pure molto lunga. Gli assi dei due cilindri sono paralleli e distano $d = 1$ cm. Nel conduttore fluisce una corrente $i = 20$ A, distribuita uniformemente. Dimostrare che il campo magnetico $\mathbf{B}$ all'interno della cavità è costante, calcolandone modulo e direzione. ~~Calcolare inoltre l'energia magnetica e l'induttanza per unità di lunghezza del conduttore.~~

Ex 8.12 MNV

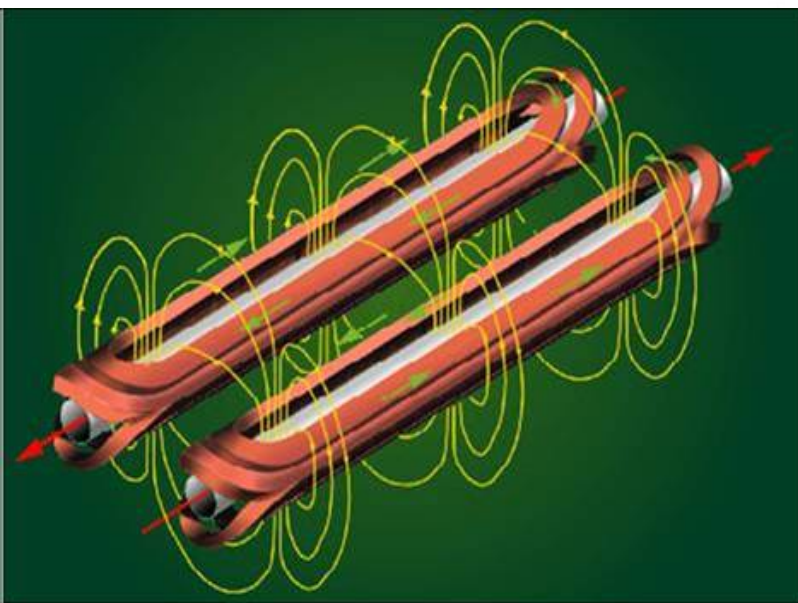


(a)



(b)

Fig. 1: (a) Magnetic field in a dipole magnet; (b) and cross-section through a LHC dipole



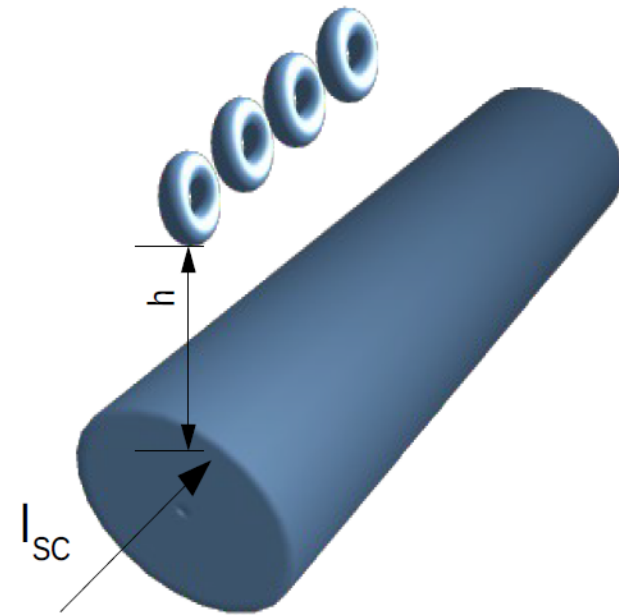
- Calcolare il campo magnetico generato da due spire circolari coassiali di raggio uguale R poste a distanza d nel piano xy percorse da una corrente i .
- Caso con $d=R$

[BobineHelmholtz.ggb](#)

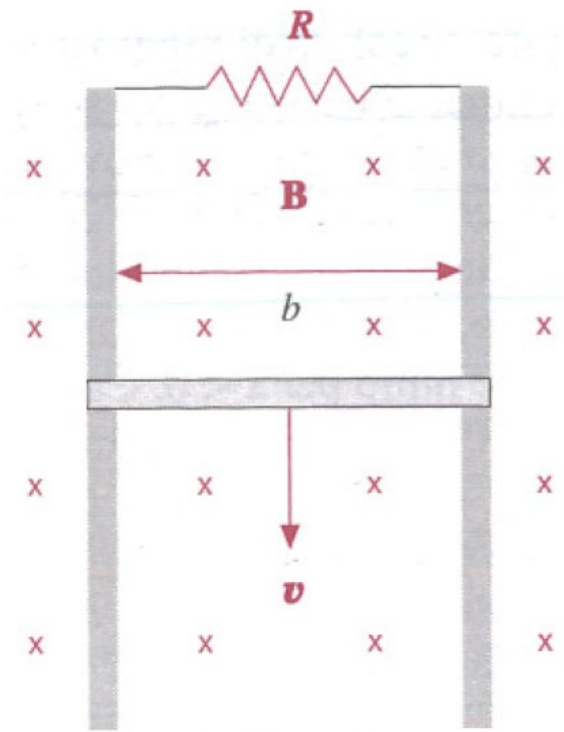
Campo di due spire. Bobine di Helmholtz.

Cognome _____ Nome _____ Mat. _____

Problema 1 (ElettroMagnetismo) Sul pianeta Bih i mezzi di trasporto utilizzano la levitazione magnetica per spostarsi. Le strade sono costituite da un binario cilindrico sul cui asse si trova un filo superconduttore percorso da una corrente $i_{SC}=100$ kA. Il sistema di levitazione di un veicolo e' composto da $n=15$ bobine di raggio r e $N=3 \cdot 10^4$ avvolgimenti percorse da una corrente costante $i_B=24$ A disposte lungo un asse orizzontale parallelo al binario ad un'altezza $h=20.4$ cm da questo. Si approssimino le bobine come dipoli magnetici puntiformi. Calcolare:
EM.1) distanza d dall'asse del binario per cui B vale 0.033 T;
EM.2) il raggio delle bobine r se il veicolo in equilibrio ha massa $M=1500$ Kg.



10.7 Due guide conduttrici parallele, distanti $b = 20$ cm, sono chiuse ad un estremo da un resistore con $R = 4 \Omega$. Lungo le guide può scivolare senza attrito, sotto l'azione del proprio peso, una sbarretta conduttrice di massa $m = 10^{-2}$ kg. Il dispositivo è immerso in un campo magnetico $B = 1$ T uniforme e costante, ortogonale al piano del circuito. Calcolare come variano nel tempo la velocità $v(t)$ della sbarretta e la corrente $i(t)$, i valori limite v_0 e i_0 , l'energia W_1 dissipata nel circuito per ogni centimetro percorso dalla sbarretta in queste ultime condizioni.

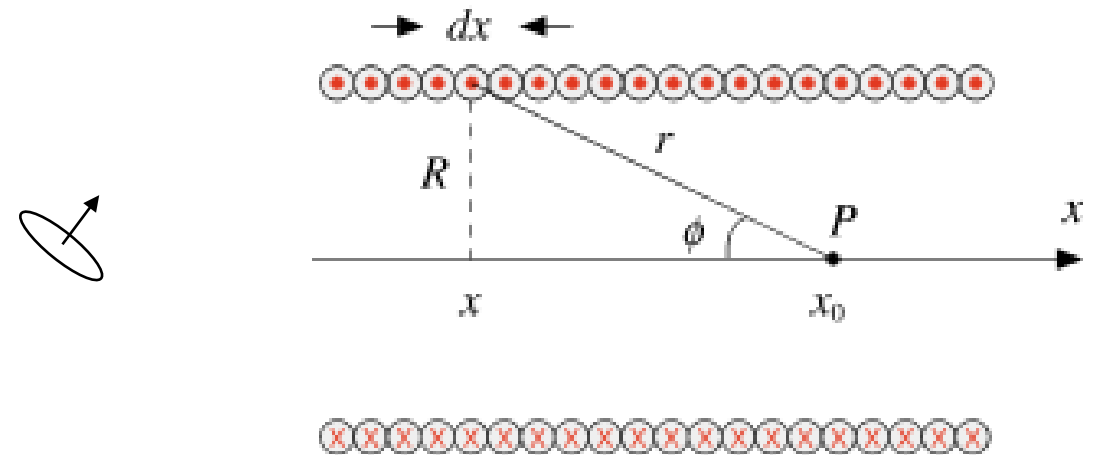


Ex 10.7 MNV

- Una regione di spazio e' sede di un campo magnetico B e un campo elettrico E entrambi uniformi: i vettori E e B sono ortogonali. Un elettrone entra in questa regione e continua a muoversi di moto rettilineo uniforme.
- Ricavare la relazione tra i vettori v_0 , E e B .

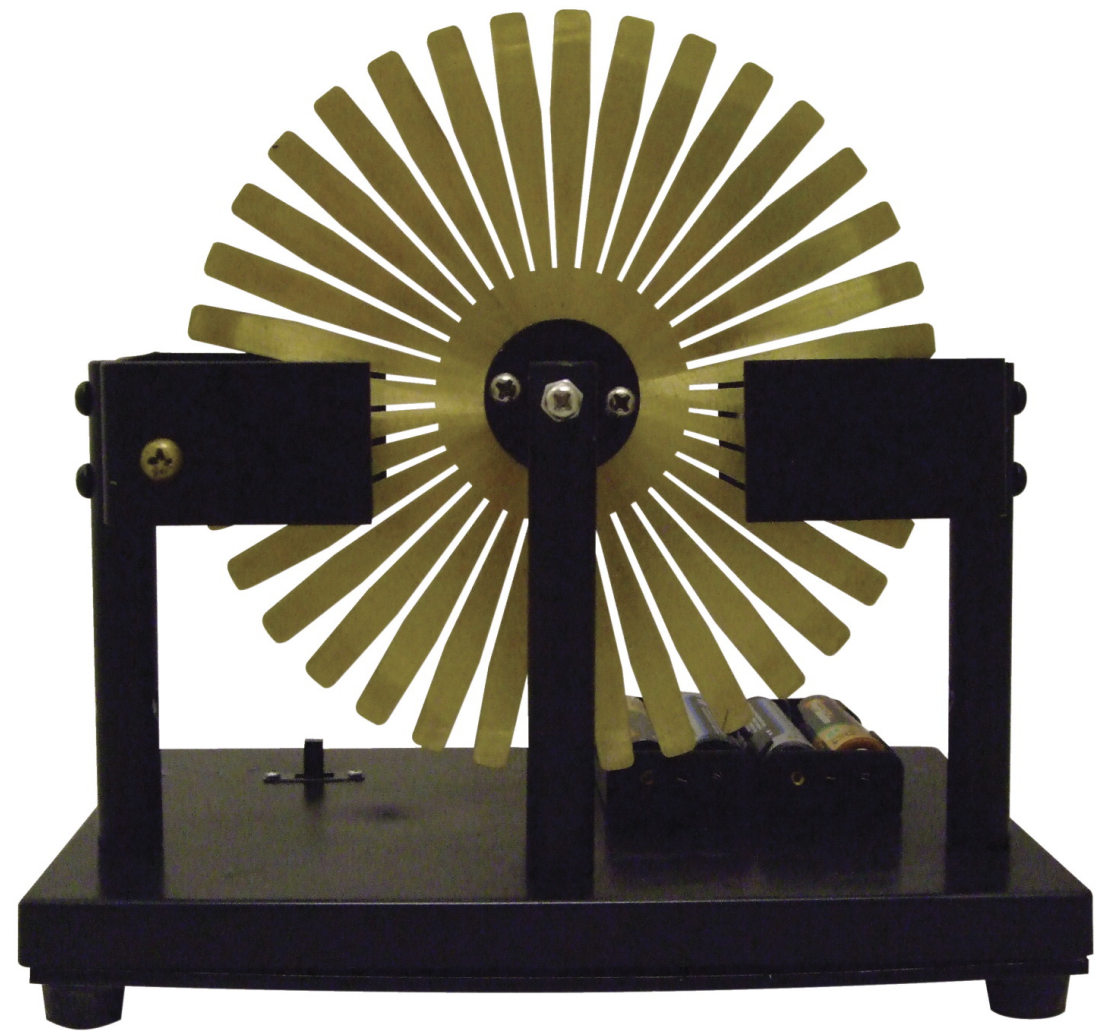
Particella in moto in E , B uniformi e ortogonali

- Una piccola bobina circolare (I, N, r noti) e' posta sull'asse di un solenoide cilindrico di lunghezza d , raggio $R(>>r)$ e con densita' di spire n . Sia α l'angolo tra i due assi.
- Calcolare F e τ agenti sulla spira
- Si studino le linee di campo di B generato dal solenoide in prossimita' della spira e si dia una spiegazione qualitativa di come agisce F nel caso in cui α sia pari a 0 o π .
- Ricorda che $\nabla \cdot \vec{B} = 0$



Interazione spira-solenoid

- Calcola la fem in funzione di B , R , ω .

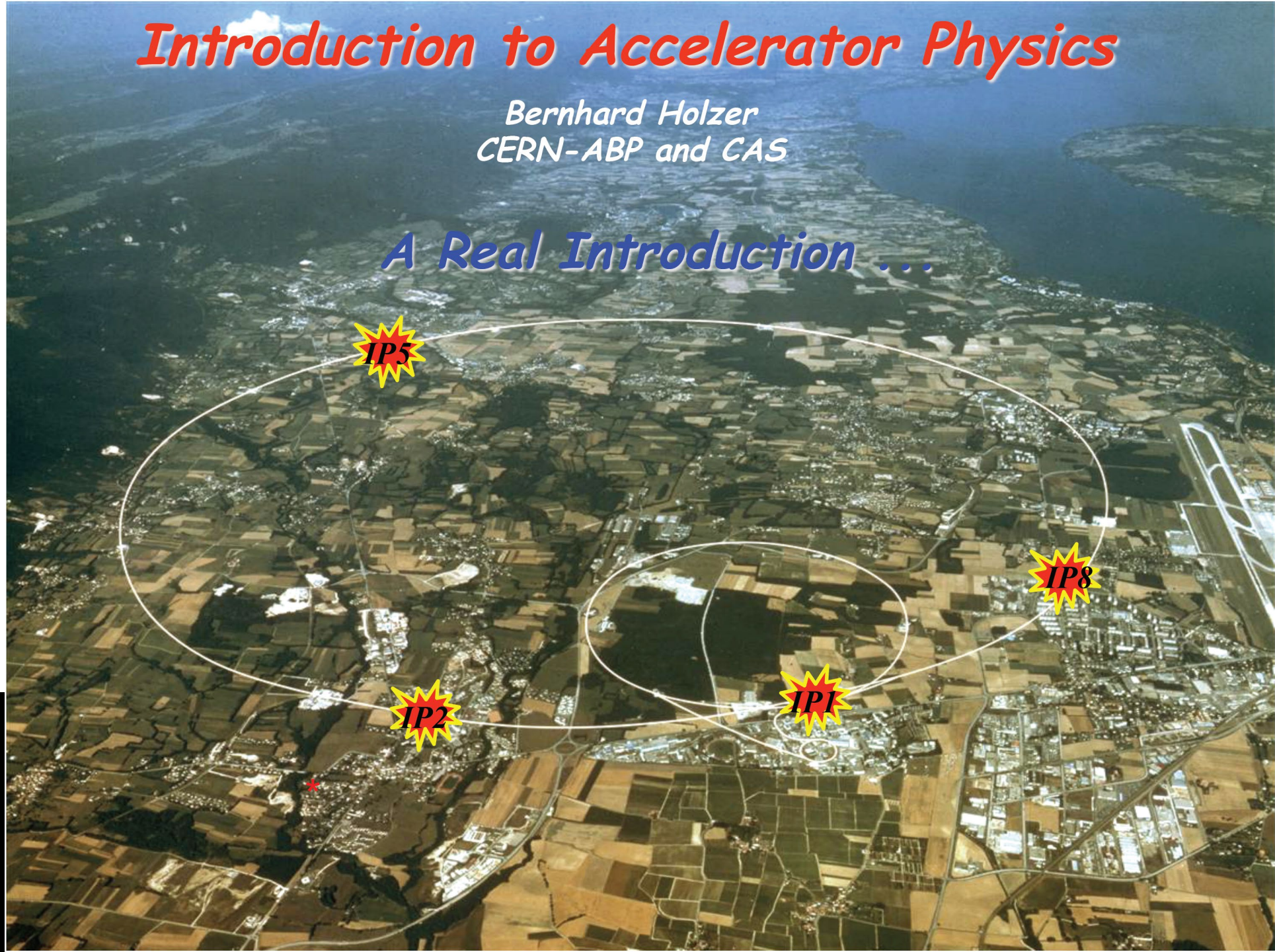


Barlow

Introduction to Accelerator Physics

*Bernhard Holzer
CERN-ABP and CAS*

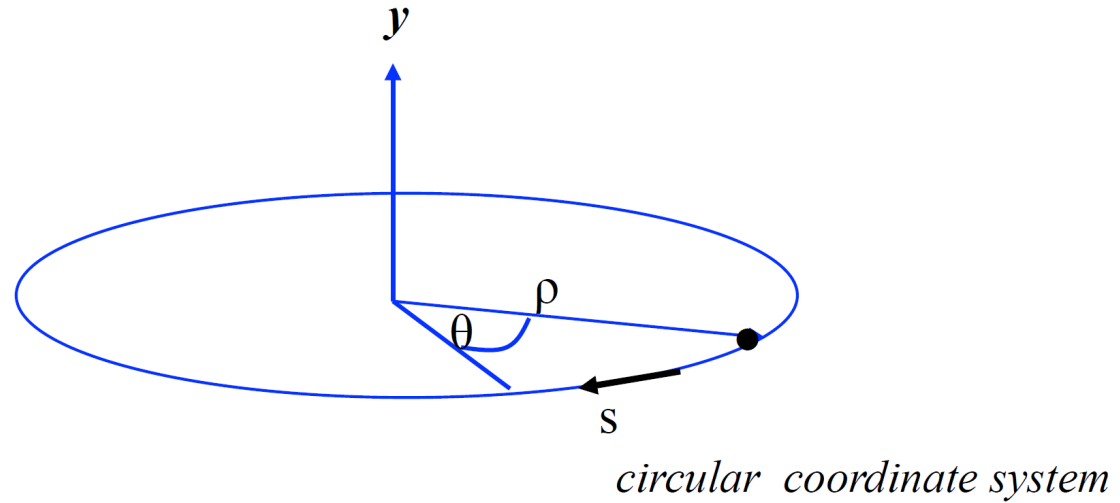
A Real Introduction ...



Pearl of Wisdom:

if you are clever, you use magnetic fields in an accelerator wherever it is possible.

The ideal circular orbit



Condition for circular orbit:

Lorentz force

$$F_L = e v B$$

centrifugal force

$$F_{centr} = \frac{\gamma m_0 v^2}{\rho}$$

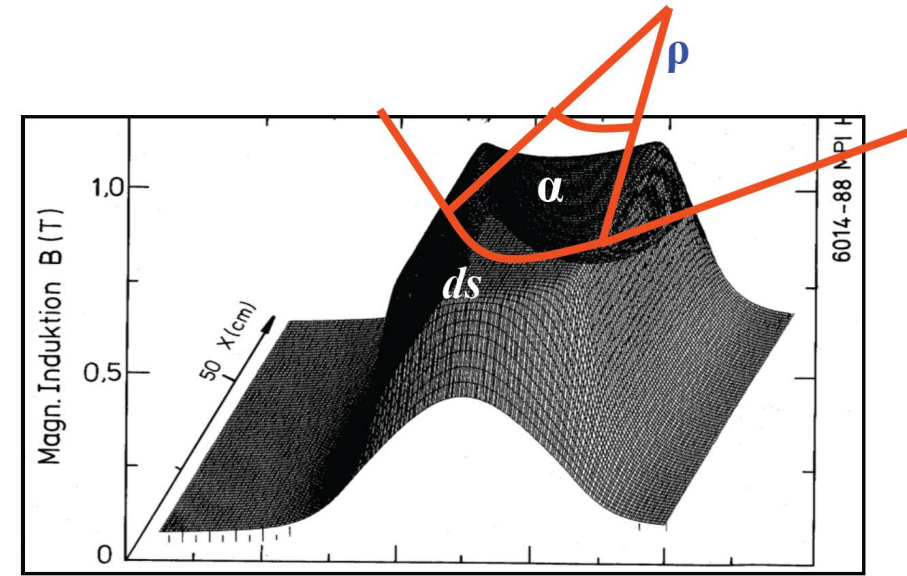
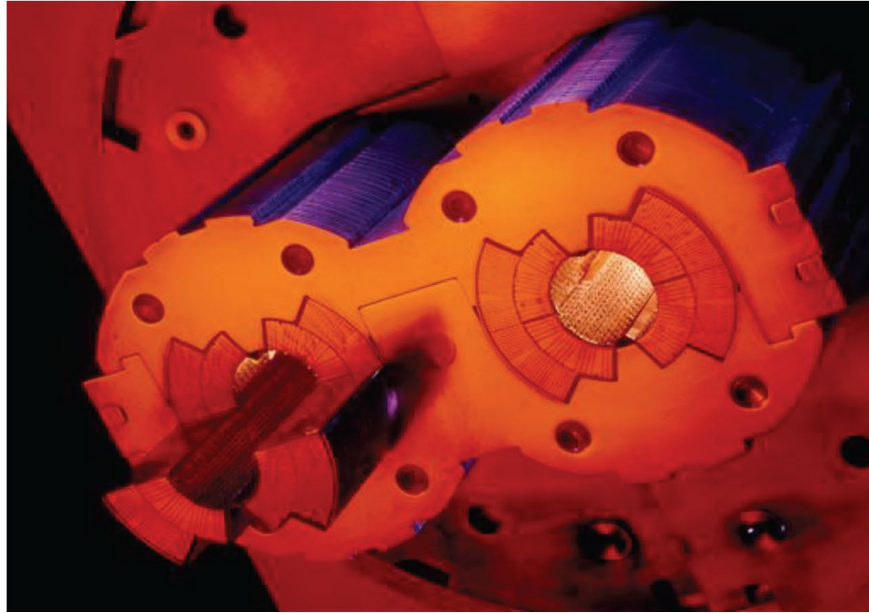
$$\frac{\gamma m_0 v^2}{\rho} = e v B$$

$$\frac{p}{e} = B \rho$$

$B \rho = \text{"beam rigidity"}$

The Magnetic Guide Field

27



field map of a storage ring dipole magnet

$$\rho = 2.8 \text{ km} \quad \longrightarrow \quad 2\pi\rho = 17.6 \text{ km} \approx 66\%$$

$$B \approx 1 \dots 8 \text{ T}$$

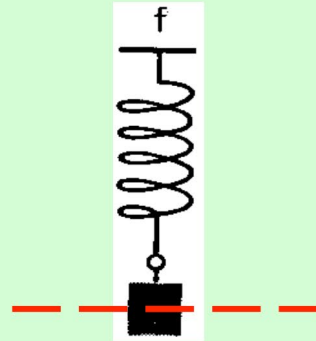
rule of thumb:

$$\frac{1}{\rho} \approx 0.3 \frac{B[T]}{p[\text{GeV}/c]}$$

„normalised bending strength“

Focusing Properties and Quadrupole Magnets

classical mechanics:
pendulum



there is a **restoring force**, proportional
to the elongation x :

$$m * \frac{d^2 x}{dt^2} = -c * x$$

general solution: free harmonic oscillation

$$x(t) = A * \cos(\omega t + \varphi)$$

this is how grandma's Kuckuck's clock is working!!!

Storage Rings: **linear increasing Lorentz force** to keep trajectories in vicinity of
the ideal orbit

linear increasing magnetic field

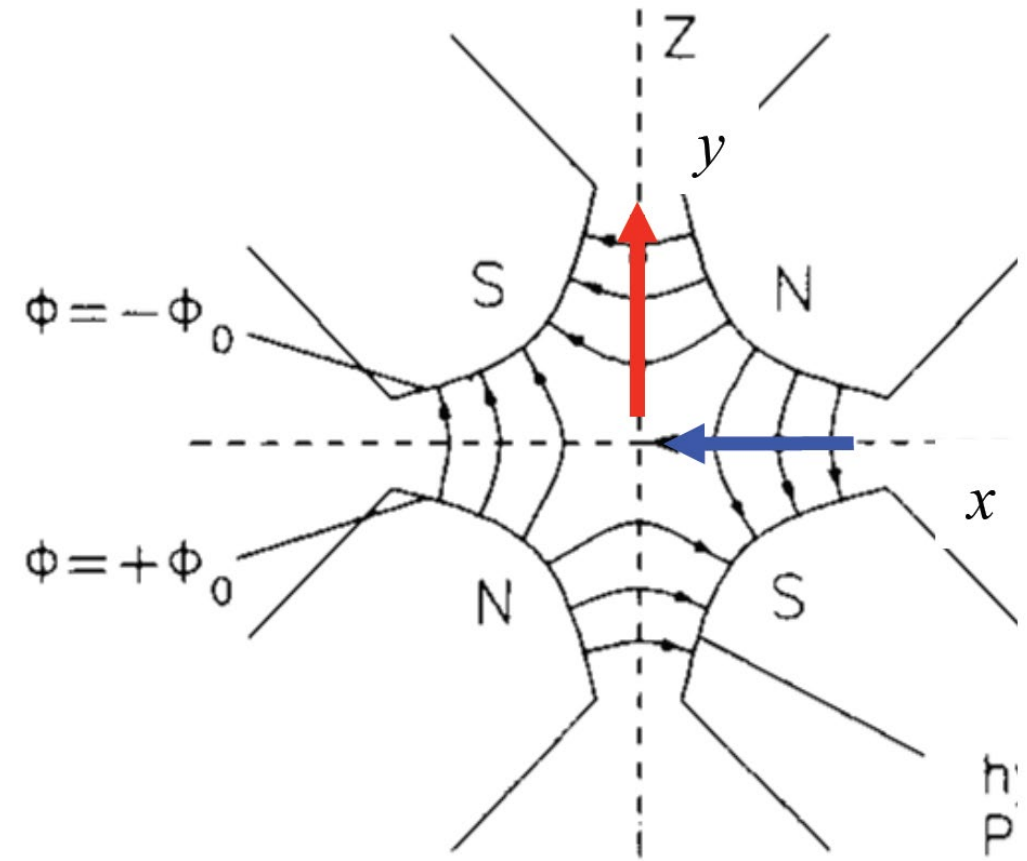
$$B_y = g x \quad B_x = g y$$

$$F(x) = q * v * B(x)$$

LHC main quadrupole magnet $g \approx 25 \dots 220 \text{ T / m}$



- Studiamo ora il moto di una carica q con velocità v quasi parallela all'asse z in un campo magnetico $\vec{B} = \nabla(bxy)$.
- Avendo scritto $\vec{B}$ come gradiente di un 'potenziale magnetico' V_m il campo magnetico soddisfa automaticamente l'equazione di Maxwell nel vuoto, $\nabla \times \vec{B} = 0$. Siccome $\nabla^2 V_m = 0$ soddisfa anche a $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.
- Le linee equipotenziali si ottengono con dei magneti quadrupolari sagomati come delle iperboli.



Carica in quadrupolo
Ex. 105. Esercizi di EM (A. Strumia)

- Valgono:

$$B_x = by \quad B_y = bx \quad B_z = 0$$

L'eq. del moto e':

$$m\ddot{x} = -qvbxm \quad \ddot{y} = +qvby$$

Assumendo che la particella si muova circa lungo l'asse z e venga deflessa poco possiamo approssimare $d/dt = v d/dz$ ottenendo

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -k^2x, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = +k^2y$$

Dove $k^2 = qb/mv$

La soluzione e':

$$x(z) = x_0 \cos kz + x'_0 \frac{1}{k} \sin kz, \quad y(z) = y_0 \cosh kz + y'_0 \frac{1}{k} \sinh kz$$

Carica in quadrupolo
Ex. 105. Esercizi di EM (A. Strumia)

$$\begin{aligned}
 x(z) &= x_0 \cos kz + x'_0 \frac{1}{k} \sin kz, & y(z) &= y_0 \cosh kz + y'_0 \frac{1}{k} \sinh kz \\
 x'(z) &= -x_0 k \sin kz + x'_0 \cos kz, & y'(z) &= y_0 k \sinh kz + y'_0 \cosh kz
 \end{aligned}$$

- Quindi un fascio di particelle viene focalizzato lungo l'asse x e defocalizzato lungo l'asse y.
- Più precisamente, assumendo che L sia la lunghezza della zona dove $B \neq 0$ un fascio avente $x'_0 = 0$ passa per $x(z) = 0$ a

$$z - L = \frac{1}{k} \cot(kL) \approx \frac{1}{k \sin kL}$$

Cioè il campo magnetico si comporta come una lente di distanza focale

$$f = \frac{1}{k \sin kL}$$

Carica in quadrupolo
Ex. 105. Esercizi di EM (A. Strumia)

Riscriviamo le eq. per il piano x (focalizzante in questo caso)

$$\begin{aligned}x(z) &= x_0 \cos kz + x'_0 \frac{1}{k} \sin kz \\x'(z) &= -x_0 k \sin kz + x'_0 \cos kz\end{aligned}$$

E' comodo scrivere queste relazioni in termini matriciali:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_z = M_{foc} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 \quad \text{con} \quad M_{foc} = \begin{pmatrix} \cos kz & \frac{1}{k} \sin kz \\ -k \sin kz & \cos kz \end{pmatrix}$$

Lo stesso si puo' fare per il piano y (defocalizzante)

$$M_{defoc} = \begin{pmatrix} \cosh kz & \frac{1}{k} \sinh kz \\ k \sinh kz & \cosh kz \end{pmatrix}$$

Matrici di trasporto. Foc-defoc

Il formalism matriciale si puo' adottare anche per il volo libero in assenza di campi.

33

$$\begin{aligned}x(z) &= x_0 + x'_0 z \\x'(z) &= x'_0 \\M_{drift} &= \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dove con L abbiamo indicato la lunghezza (in z) del tratto di volo libero.

Matrici di trasporto. Moto libero

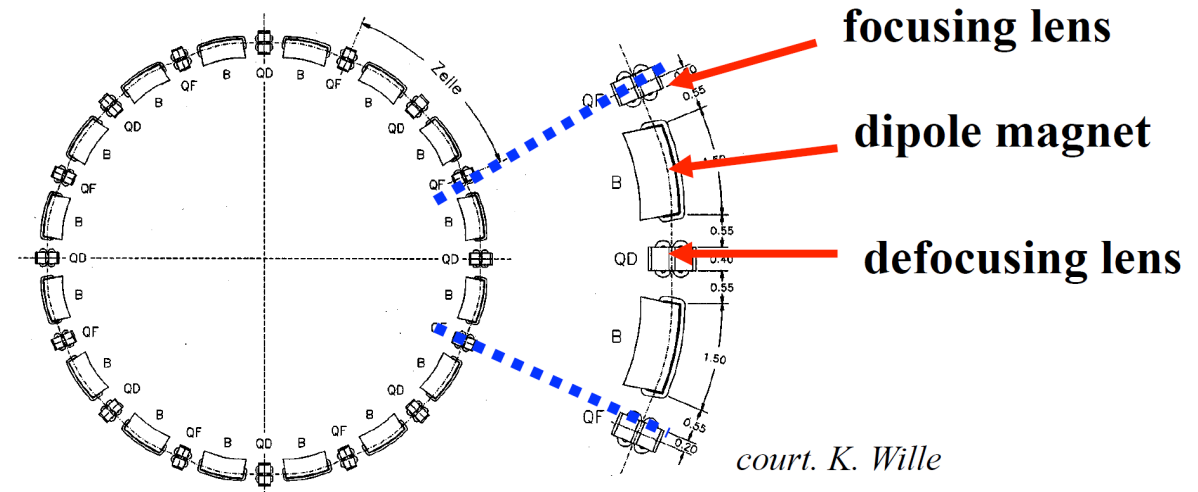
La posizione delle particelle lungo la linea di fascio si ottiene moltiplicando le matrici corrispondenti ad ogni tratto di acceleratore

Transformation through a system of lattice elements

combine the single element solutions by multiplication of the matrices

$$M_{total} = M_{QF} * M_D * M_{QD} * M_{Bend} * M_D * \dots$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s2} = M(s_2, s_1) * \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s1}$$



Modello matriciale di una linea di fascio

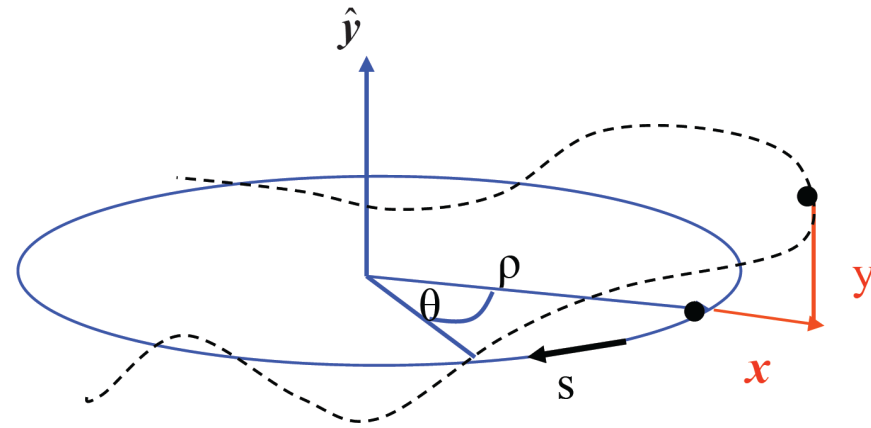
The Equation of Motion:

* Equation for the *horizontal motion*:

$$x'' + x \left(\frac{1}{\rho^2} + k \right) = 0$$

x = particle amplitude

x' = angle of particle trajectory (wrt ideal path line)



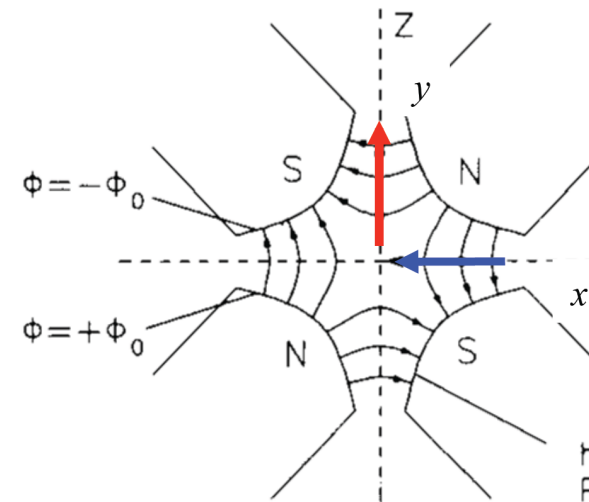
* Equation for the *vertical motion*:

$$\frac{1}{\rho^2} = 0$$

no dipoles ... in general ...

$k \Leftrightarrow -k$ *quadrupole field changes sign*

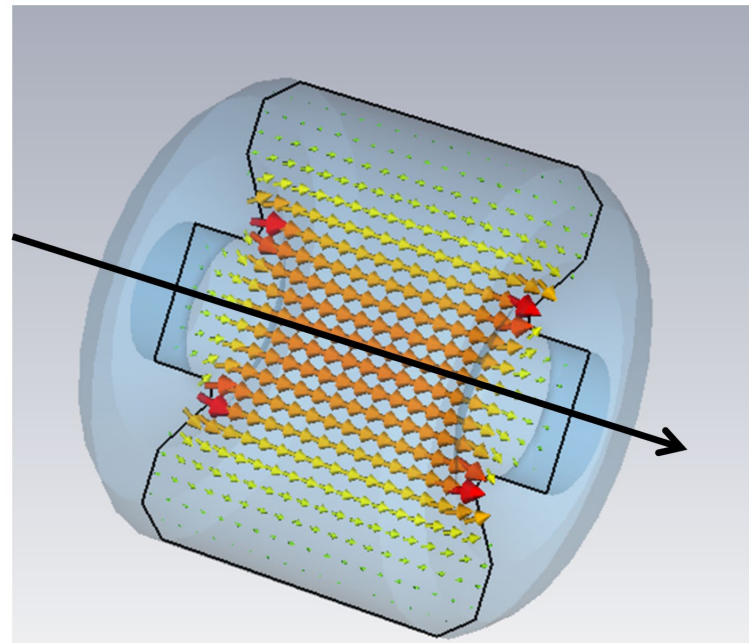
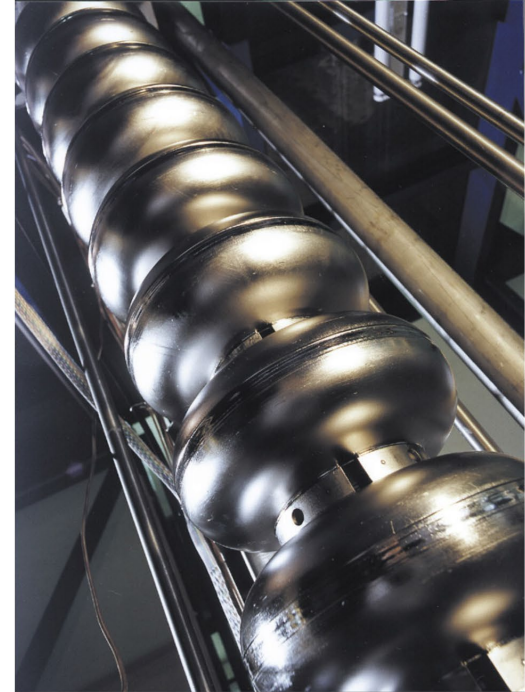
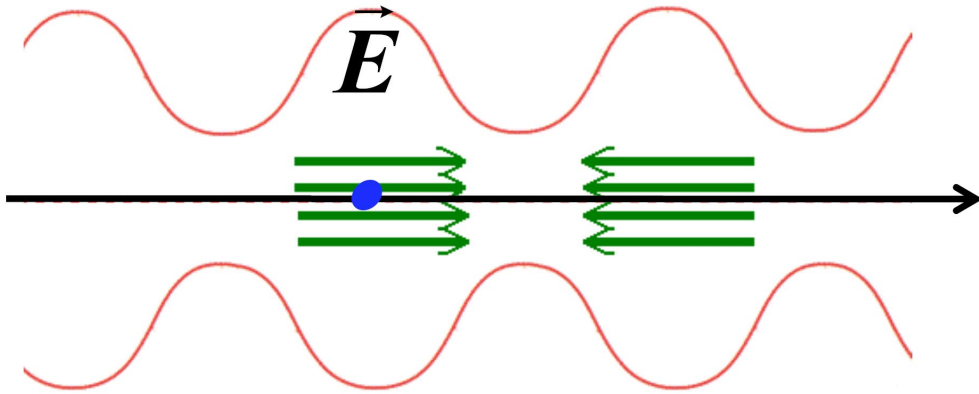
$$y'' - k y = 0$$



III. The Acceleration

Where is the acceleration?

Install an RF accelerating structure in the ring:



*B. Salvant
N. Biancacci*

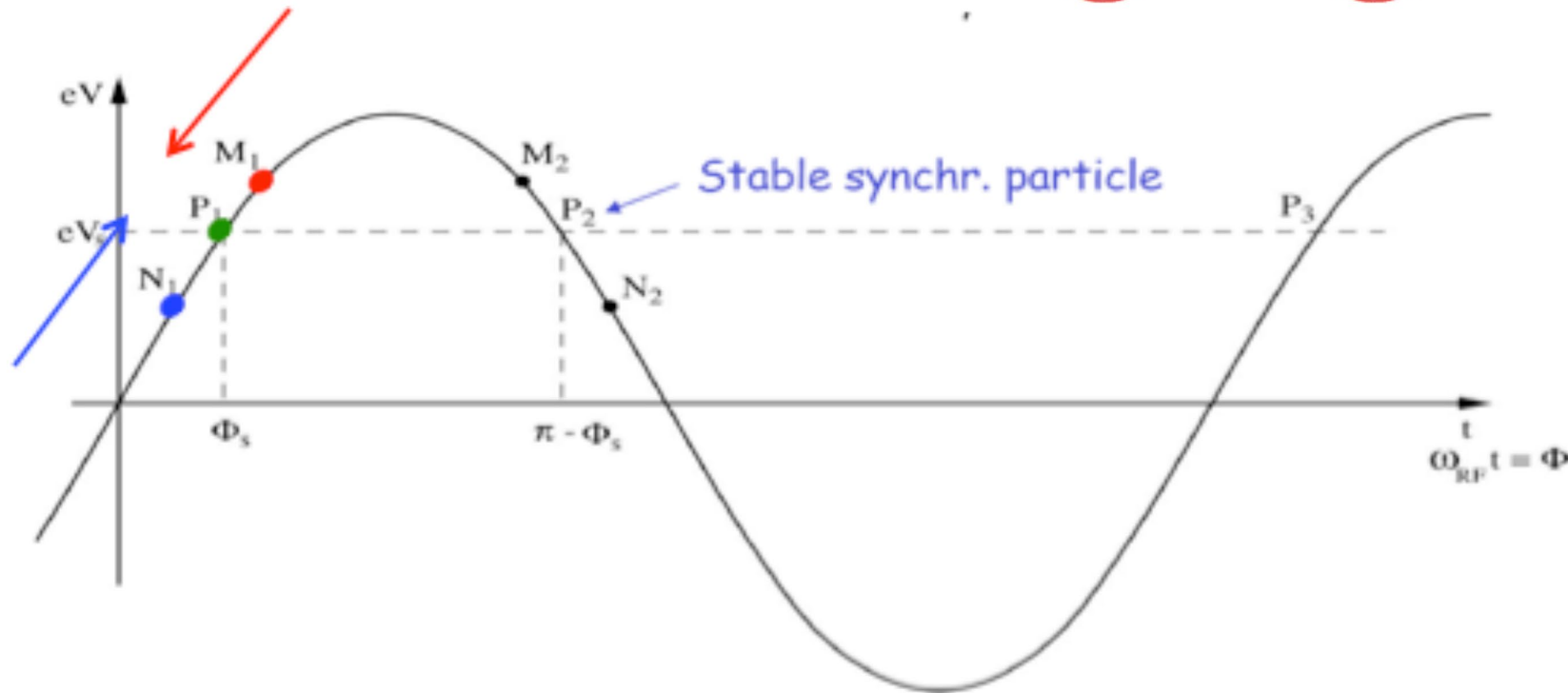
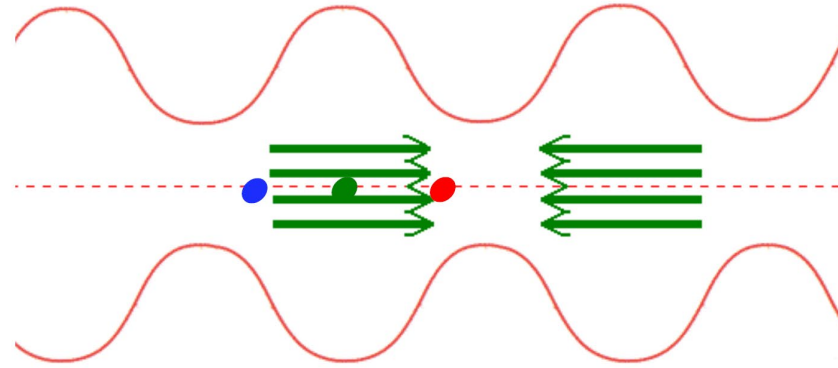
The Acceleration & "Phase Focusing"

$\Delta p/p \neq 0$ below transition

ideal particle •

particle with $\Delta p/p > 0$ • faster

particle with $\Delta p/p < 0$ • slower

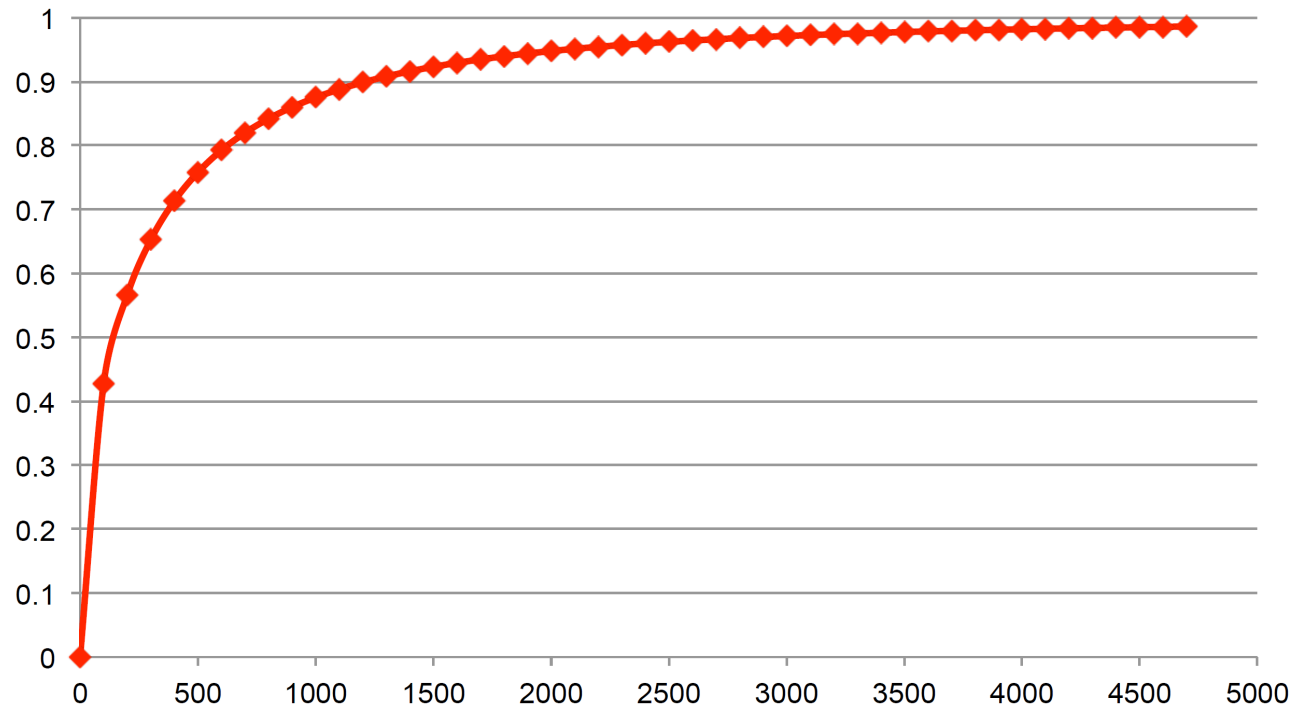


Focussing effect in the longitudinal direction keeping the particles close together ... forming a “bunch”

... so sorry, here we need help from Albert:

$$\gamma = \frac{E_{total}}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \longrightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{mc^2}{E^2}}$$

v/c



kinetic energy of a proton

*... some when the particles
do not get faster anymore*

.... but heavier !

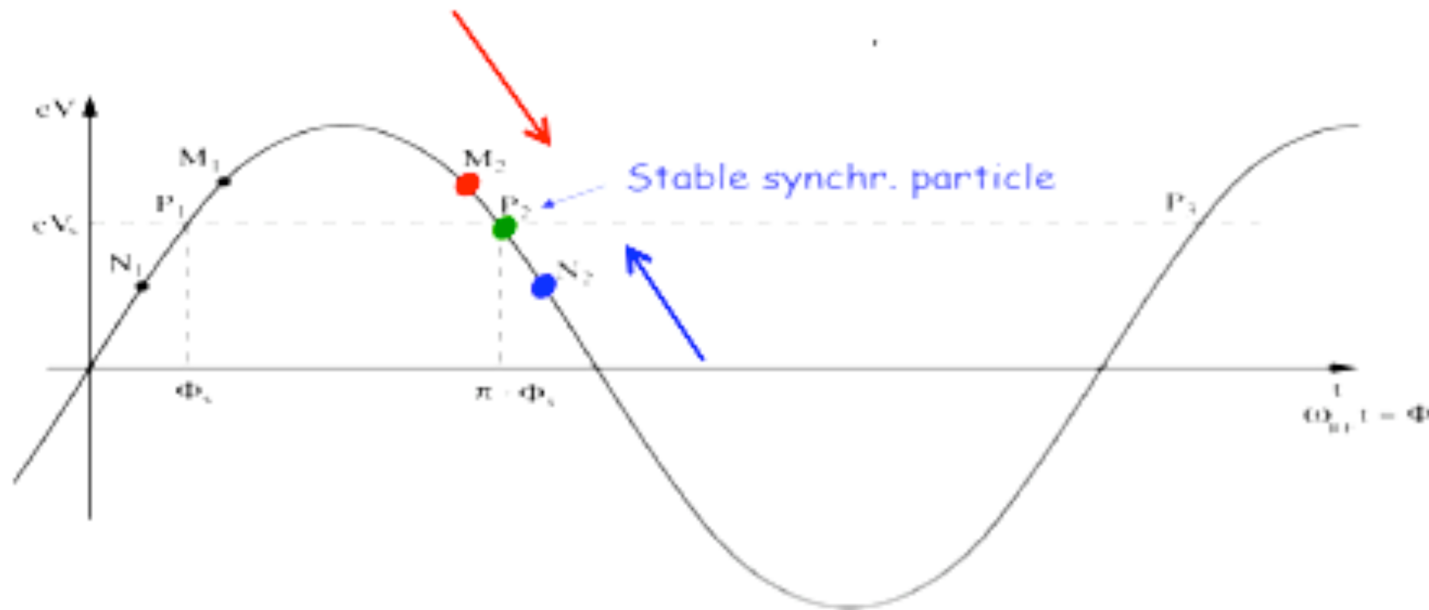
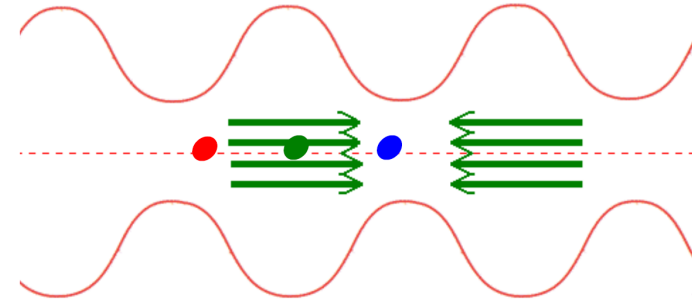
The Acceleration *above transition*

39

ideal particle •

particle with $\Delta p/p > 0$ • *heavier*

particle with $\Delta p/p < 0$ • *lighter*



Focussing effect in the longitudinal direction

keeping the particles close together ... forming a “bunch”