

SEGNALI E SISTEMI
2 settembre 2026
terzo appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2025-2026)
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Siano dati i segnali

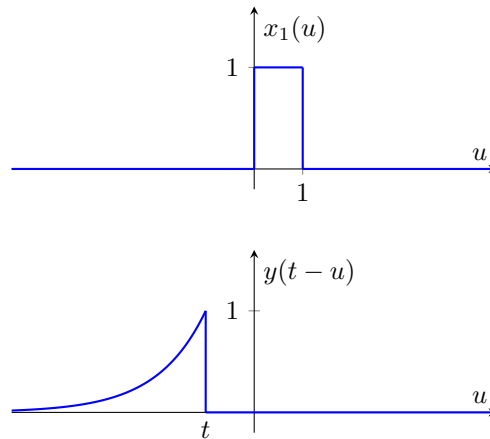
$$x(t) = \text{rep}_2 x_1(t), \quad x_1(t) = \text{rect}(t - \tfrac{1}{2}), \quad y(t) = 1(t) e^{-t},$$

dove $1(t)$ indica il gradino. Si chiede di:

1. calcolare la convoluzione $z_1(t) = x_1 * y(t)$ [3 punti];
2. (di)mostrare tramite le regole della convoluzione la correttezza dell'identità $z(t) = x * y(t) = \text{rep}_2 z_1(t)$ [2 punti];
3. calcolare la convoluzione $z(t) = x * y(t)$ [2 punti].

Soluzione.

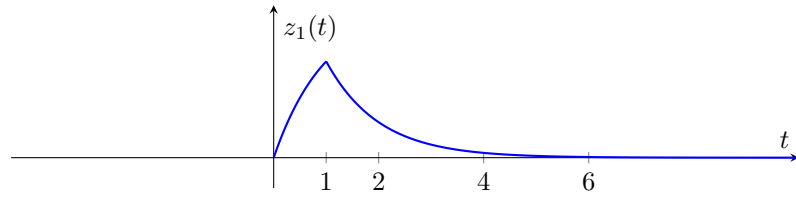
1. Osservando i segnali abbiamo



e pertanto

- (a) $z_1(t) = 0$ per $t < 0$;
- (b) $z_1(t) = \int_0^t e^{u-t} du = 1 - e^{-t}$ per $0 < t < 1$;
- (c) $z_1(t) = \int_0^1 e^{u-t} du = (e - 1) e^{-t}$ per $t > 1$.

Il risultato è illustrato in figura



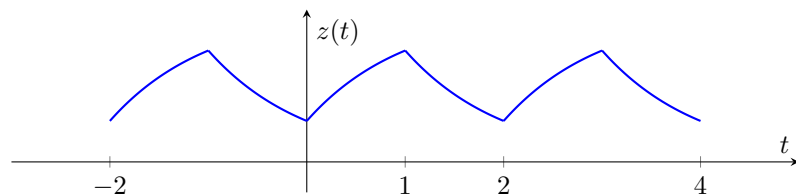
2. Dalle proprietà della convoluzione abbiamo che

$$\begin{aligned}
 z(t) &= x * y(t) \\
 &= \left(\sum_k x_1(t - 2k) \right) * y(t) \\
 &= \sum_k x_1(t - 2k) * y(t) \quad \text{proprietà distributiva} \\
 &= \sum_k x_1 * y(t - 2k) \quad \text{proprietà di traslazione} \\
 &= \text{rep}_2 z_1(t)
 \end{aligned}$$

3. Il risultato si ottiene semplicemente per ripetizione periodica. Essendo quindi $z(t)$ periodico, possiamo scegliere di calcolare il risultato nell'intervallo $[0, 2)$, dividendo opportunamente negli intervalli $[0, 1)$ e $[1, 2)$. Si ottiene

$$\begin{aligned}
 t \in [0, 1) : \quad z(t) &= 1 - e^{-t} + \sum_{k \geq 1} (e - 1) e^{-(t+2k)} \\
 &= 1 - e^{-t} + (e - 1) e^{-t} \frac{e^{-2}}{1 - e^{-2}} \\
 &= 1 - \frac{e^{-t}}{1 + e^{-1}} \\
 t \in [1, 2) : \quad z(t) &= \sum_{k \geq 0} (e - 1) e^{-(t+2k)} \\
 &= (e - 1) e^{-t} \frac{1}{1 - e^{-2}} \\
 &= e \frac{e^{-t}}{1 + e^{-1}}
 \end{aligned}$$

Il risultato è illustrato in figura



Esercizio 2 [punti 7]

Dato il segnale a tempo continuo

$$x(t) = 8 \operatorname{sinc}^2(4t) \cdot \cos(4\pi t)$$

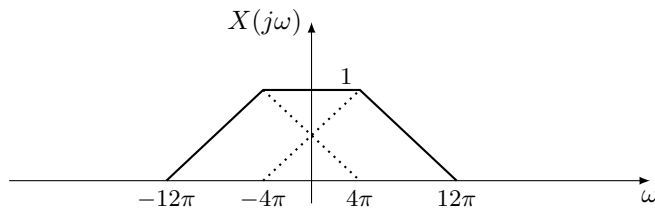
1. Calcolare e disegnare la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ [3 punti].
2. Trovare la risposta in frequenza $H(j\omega)$ e la corrispondente risposta impulsiva $h(t)$ di un filtro passabasso ideale che, dato in ingresso $x(t)$, restituisca in uscita il segnale $y(t) = 4 \operatorname{sinc}(4t)$ [3 punti].
3. Dire se il filtro è causale, giustificando la risposta [1 punto].

Soluzione.

1. Ricordando la trasformata notevole $\operatorname{sinc}^2(t) \rightarrow \operatorname{triang}(\omega/(2\pi))$, la proprietà di cambio di scala $4\operatorname{sinc}^2(4t) \rightarrow \operatorname{triang}(\omega/(8\pi))$, e la proprietà di modulazione $2z(t) \cos(\omega_0 t) \rightarrow Z(j(\omega - \omega_0)) + Z(j(\omega + \omega_0))$, si ottiene

$$X(j\omega) = \operatorname{triang}\left(\frac{\omega - 4\pi}{8\pi}\right) + \operatorname{triang}\left(\frac{\omega + 4\pi}{8\pi}\right)$$

il cui grafico è mostrato in figura.



2. Usando le regole sopra citate, la trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ in uscita dal filtro è

$$Y(j\omega) = \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{8\pi}\right)$$

e pertanto è attiva nel solo intervallo $[-4\pi, 4\pi]$ in cui $X(j\omega)$ vale 1. La risposta in frequenza del filtro passabasso che garantisce di ottenere $Y(j\omega)$ in uscita è quindi

$$H(j\omega) = \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{8\pi}\right),$$

con antitrasformata $h(t) = 4 \operatorname{sinc}(4t)$.

3. Il filtro non è causale poichè $h(t)$ non è identicamente nullo per $t < 0$.

Esercizio 3 [punti 7]

Sia dato il sistema a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale

$$y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = x'''(t) + x''(t) + x'(t) + x(t)$$

1. Identificare la funzione di trasferimento $H(s)$ [1 punto].
2. Dire se il sistema è BIBO stabile giustificando opportunamente la risposta [1 punto].
3. Trovare l'uscita se il segnale d'ingresso è $x(t) = \sin(t) \cdot 1(t)$ ($1(t)$ gradino unitario) e condizioni iniziali $y(0^-) = y'(0^-) = 0$ [3 punti].
4. Il sistema è posto in serie ad un altro sistema LTI, con funzione di trasferimento $G(s)$.

Nel caso in cui $H(s)$ non sia BIBO stabile, proporre una $G(s)$ che renda il sistema serie BIBO stabile; nel caso in cui $H(s)$ sia BIBO stabile, proporre una $G(s)$ che renda il sistema serie non BIBO stabile [1 punto].

Soluzione.

1. La funzione di trasferimento si ricava dall'equazione differenziale per ispezione:

$$H(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + 1}{s^2 + 7s + 12} = \frac{(s^2 + 1)(s + 1)}{(s + 3)(s + 4)}$$

2. Sebbene i poli $p_1 = -3$ e $p_2 = -4$ abbiano parte reale negativa, $H(s)$ è impropria con grado del numeratore maggiore di quello del denominatore. Pertanto il sistema non è BIBO stabile.
3. Per trovare l'uscita del sistema osserviamo che

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

e che la risposta libera è nulla in quanto nulle le condizioni iniziali. Pertanto l'uscita coincide con la risposta forzata, ovvero

$$Y(s) = \frac{(s^2 + 1)(s + 1)}{(s + 3)(s + 4)} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{(s + 1)}{(s + 3)(s + 4)}$$

che si può scomporre in fratti semplici nella forma

$$Y(s) = -\frac{2}{s + 3} + \frac{3}{s + 4}$$

da cui $y(t) = (-2e^{-3t} + 3e^{-4t}) \cdot 1(t)$.

4. Per rendere il sistema serie BIBO stabile, va bene qualsiasi $G(s)$ che assicuri che $H(s) \cdot G(s)$ abbia grado del numeratore minore o uguale a quello del denominatore e con poli a parte reale negativa. Per esempio

$$G(s) = \frac{1}{s + 1} \implies H(s) \cdot G(s) = \frac{(s^2 + 1)}{(s + 3)(s + 4)}.$$

Esercizio 4 [punti 3]

Il segnale

$$x(t) = \cos(\tfrac{5}{2}\pi t)$$

viene campionato a passo $T = 1$ e poi ricostruito tramite un filtro interpolatore ideale con risposta impulsiva $h(t) = \text{sinc}(t)$. Quale è il segnale $y(t)$ che si trova all'uscita del sistema di campionamento/interpolazione?

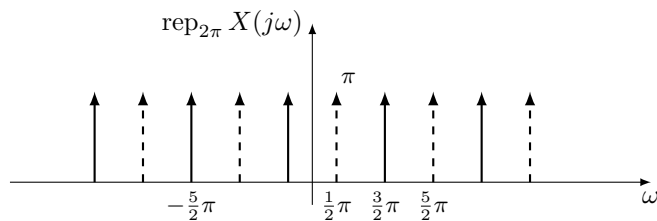
Soluzione. Il segnale ha trasformata di Fourier

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \tfrac{5}{2}\pi) + \pi\delta(\omega + \tfrac{5}{2}\pi)$$

All'uscita del sistema, invece, si ha

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot \text{rep}_{2\pi} X(j\omega), \quad H(j\omega) = \text{rect}(\omega/(2\pi))$$

in quanto $T = 1$. La situazione è illustrata in figura



da cui

$$Y(j\omega) = \pi\delta(\omega - \tfrac{1}{2}\pi) + \pi\delta(\omega + \tfrac{1}{2}\pi)$$

e pertanto

$$y(t) = \cos(\tfrac{\pi}{2}t)$$

Esercizio 5 [punti 3]

Dato il seguente sistema a tempo discreto

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} |x(n-k)| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

dire se è causale [1 punto], lineare [1 punto], tempo-invariante [1 punto]. Giustificare opportunamente le risposte.

Soluzione.

- Il sistema è causale poichè per calcolare $y(n_0)$ è sufficiente conoscere l'ingresso $x(n)$ per $n \leq n_0$. Infatti

$$y(n_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} |x(n_0-k)| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

in cui $n_0 - k \leq n_0$, essendo $k \geq 0$.

- Il sistema è evidentemente non lineare a causa della presenza del modulo, che per la generica coppia $x_1(n) \rightarrow y_1(n)$ garantisce che

$$x_2(n) = -x_1(n) \rightarrow y_2(n) = y_1(n) \neq -y_1(n)$$

e pertanto la proprietà di omogeneità non è soddisfatta.

- Il sistema è invece tempo invariante. Infatti, applicando prima la traslazione n_0 al segnale $x(n)$ e poi il sistema si ottiene

$$\Sigma[x(n-n_0)] = \sum_{k=0}^{+\infty} |x(n-k-n_0)| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

e applicando prima il sistema e poi la traslazione n_0 all'uscita si ha

$$y(n-n_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} |x(n-n_0-k)| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

I due risultati, evidentemente, coincidono.

Esercizio 6 [punti 3]

In MatLab, i valori della trasformata di Fourier di un segnale reale $x(t)$ sono collezionati nel vettore complesso X di lunghezza $N = 1024$ associato a pulsazioni spaziate di un valore ω_0 e collezionate nel vettore $\omega = [-512, 511] \cdot \omega_0$. Per ottenere una rappresentazione corretta della trasformata $X(j\omega)$ e del segnale $x(t)$ viene proposto il seguente codice:

```
T = 2π/ω0;
x = ifftshift(fft(X));
t = (0 : N - 1) * T;
subplot(2,1,1);
semilogy(ω, X);
subplot(2,1,2);
semilogy(t, real(x));
```

che però contiene vari errori. Si chiede di identificare gli errori e riscrivere il codice in maniera corretta.

Soluzione. Gli errori sono: la definizione del tempo T non è corretta in quanto dovrebbe essere $T = 2\pi/(\omega_0 N)$; l'operazione di antitrasformata scambia l'ordine delle operazioni e dimentica la divisione per T , e infatti si dovrebbe avere $x = \text{ifft}(\text{ifftshift}(X))/T$; il plot della trasformata, essendo logaritmico, richiede il valore assoluto, ovvero $\text{semilogy}(\omega, \text{abs}(X))$; il plot del segnale va usualmente fatto in forma lineare, ovvero $\text{plot}(t, \text{real}(x))$. Quindi, il codice corretto è

```
T = 2π/(ω0N);
x = ifft(ifftshift(X))/T;
t = (0 : N - 1) * T;
subplot(2,1,1);
semilogy(ω, abs(X));
subplot(2,1,2);
plot(t, real(x));
```