

Esercizio 5

Un solenoide cilindrico considerabile ideale con raggio $r = 10$ cm, numero di spire $N = 1.0 \cdot 10^3$ e lunghezza $L = 1.0$ m è centrato nell'origine ed ha come asse l'asse z . Il solenoide ha resistenza $R = 2.9 \cdot 10^6 \Omega$ e massa $M = 53$ kg.

1. Viene fatta passare nel solenoide una corrente $I_0 = 1,0 \cdot 10^{-2}$ A. Un protone è posto nell'origine e ha velocità $\vec{v} = (v_0, 0, 2v_0)$. Qual è il valore massimo di v_0 affinché il protone non colpisca la superficie laterale del solenoide?

Viene rimosso il protone e, a partire dall'istante $t = 0$, viene fatta passare nel solenoide una corrente $I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \cos(2\pi t/\tau)$ con $\tau = 1.5$ s.

2. Qual è il flusso del campo magnetico $\Phi_{\text{spira}}(t)$ attraverso una singola spira del solenoide (ossia una circonferenza di raggio r) nell'istante t ? Qual è il flusso del campo magnetico attraverso tutto il solenoide $\Phi_{\text{sol}}(t)$?
3. Quanta corrente ΔI_{ind} viene indotta nel solenoide da tale flusso nell'istante $t = 0$?
4. Data la precisione dei dati, ΔI_{ind} è trascurabile rispetto a $I(t = 0)$?
5. Quanta carica Q attraversa una spira circolare di raggio $r/2$ e resistenza $R' = 10 \Omega$ centrata nell'origine e giacente sul piano xy nell'intervallo tra $t = 0$ e $t = \tau$?

Costanti utili:

- $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{m}^{-2}\text{N}^{-1}$
- $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Soluzioni

1. Il campo magnetico all'interno di un solenoide ideale è uniforme, diretto lungo l'asse z (asse del solenoide) e ha modulo:

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I_0$$

Un protone (massa $m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, carica $q = e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C) viene lanciato dall'origine con velocità $\vec{v} = (v_0, 0, 2v_0)$. La componente della velocità lungo l'asse z ($v_z = 2v_0$) parallela al campo non subisce alcuna forza di Lorentz, determinando un moto rettilineo uniforme lungo z . La componente perpendicolare sul piano xy determina un moto circolare uniforme con raggio di curvatura:

$$R_L = \frac{m_p v_{\perp}}{eB} = \frac{m_p v_0}{eB}$$

La traiettoria complessiva è un'elica cilindrica. Poiché il protone parte dal centro ($x = 0, y = 0$), la distanza massima raggiunta dall'asse z durante il moto circolare è pari al diametro della sua orbita, ovvero $2R_L$. Per evitare che il protone colpisca la superficie laterale del solenoide di raggio r , dobbiamo imporre:

$$2R_L \leq r \implies 2 \left(\frac{m_p v_0}{eB} \right) \leq r \implies v_0 \leq \frac{eBr}{2m_p}$$

Sostituendo il valore di B :

$$v_0 \leq \frac{e\mu_0 N I_0 r}{2m_p L}$$

Inserendo i dati:

$$B = 1.257 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

$$v_{0,\max} = 60.2 \text{ m/s}$$

2. La corrente varia nel tempo come $I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \cos(2\pi t/\tau)$. Il campo magnetico istantaneo è $B(t) = \mu_0 \frac{N}{L} I(t)$.

Il flusso del campo magnetico attraverso una singola spira di area $S = \pi r^2$ è:

$$\Phi_{\text{spira}}(t) = B(t) \cdot S = \mu_0 \frac{N}{L} \pi r^2 I_0 e^{-t/\tau} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$$

Il flusso attraverso tutto il solenoide (composto da N spire) è semplicemente N volte il flusso della singola spira:

$$\Phi_{\text{sol}}(t) = N \cdot \Phi_{\text{spira}}(t) = \mu_0 \frac{N^2}{L} \pi r^2 I_0 e^{-t/\tau} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$$

3. Per la legge di Faraday-Lenz, la forza elettromotrice indotta nel solenoide dall'autoinduzione è data da $\mathcal{E}_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi_{\text{sol}}(t)}{dt}$. La corrente indotta nel solenoide è $\Delta I_{\text{ind}}(t) = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}(t)}{R}$.

Calcoliamo la derivata temporale di $\Phi_{\text{sol}}(t)$ usando la regola del prodotto:

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-t/\tau} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right] = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) - \frac{2\pi}{\tau} e^{-t/\tau} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$$

Valutando la derivata all'istante $t = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt} \left[e^{-t/\tau} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right] \right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}$$

Quindi, la f.e.m. indotta all'istante $t = 0$ è:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}(0) = - \left(-\frac{1}{\tau} \mu_0 \frac{N^2}{L} \pi r^2 I_0 \right) = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I_0}{\tau L}$$

La corrente indotta a $t = 0$ risulta:

$$\Delta I_{\text{ind}}(0) = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}(0)}{R} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I_0}{\tau L R}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\Delta I_{\text{ind}}(0) = 9.07 \cdot 10^{-11} \text{ A}$$

4. All'istante $t = 0$, la corrente nominale che scorre nel solenoide è $I(0) = I_0 = 1.0 \cdot 10^{-2} \text{ A}$.

Confrontando i due valori:

$$\frac{\Delta I_{\text{ind}}(0)}{I(0)} = \frac{9.07 \cdot 10^{-11} \text{ A}}{1.0 \cdot 10^{-2} \text{ A}} \approx 9.07 \cdot 10^{-9}$$

Data l'estrema piccolezza del rapporto (dell'ordine di 10^{-8}), la corrente indotta è trascurabile rispetto a $I(0)$

5. Consideriamo la spira interna di raggio $r' = r/2$ e resistenza $R' = 10 \Omega$. Il campo magnetico che la attraversa è sempre il campo interno del solenoide $B(t)$. Il flusso attraverso questa specifica spira è:

$$\Phi'(t) = B(t) \cdot \pi (r')^2 = B(t) \cdot \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Phi_{\text{spira}}(t)$$

Per la legge di Faraday, la carica totale Q che scorre in un circuito di resistenza R' a causa di una variazione di flusso dipende solo dal flusso iniziale e finale:

$$Q = \frac{|\Delta \Phi'|}{R'} = \frac{|\Phi'(\tau) - \Phi'(0)|}{R'}$$

Calcoliamo i flussi negli istanti richiesti:

- A $t = 0$: $\cos(0) = 1$ e $e^0 = 1 \implies \Phi'(0) = \frac{1}{4} \mu_0 \frac{N}{L} \pi r^2 I_0$
- A $t = \tau$: $\cos(2\pi) = 1$ e $e^{-1} \implies \Phi'(\tau) = \frac{1}{4} \mu_0 \frac{N}{L} \pi r^2 I_0 e^{-1}$

La variazione in modulo è:

$$|\Delta \Phi'| = \Phi'(0) - \Phi'(\tau) = \frac{\mu_0 N \pi r^2 I_0}{4L} (1 - e^{-1})$$

La carica passata è quindi:

$$Q = \frac{\mu_0 N \pi r^2 I_0}{4LR'} (1 - e^{-1})$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\Phi'(0) = 9.872 \cdot 10^{-8} \text{ Wb}$$

$$Q = 6.24 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$