

Esercizio 4

Uno ione ${}^4\text{He}^+$ si muove sul piano xy . In tale piano, il campo magnetico ha valore:

$$\vec{B} = \begin{cases} B_0 \hat{z} & \text{per } 0 \leq x \leq d \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

Dove $d = 5.1 \text{ cm}$ e $B_0 = 1.0 \text{ T}$. La particella, nell'istante $t = 0$, si trova in $P = (0, 0)$ e ha velocità $v_0 = \frac{c}{100}$ diretta lungo l'asse x . Dopo un qualche tempo la particella si trova in un qualche punto p' con $x' \geq d$ e ha velocità $\vec{v}_f$.

1. Di quanto è cambiata l'energia totale della particella tra P e P' ? Perché?
2. Nell'istante $t = 0$, quanto vale $\vec{F}$?
3. Qual è il raggio di curvatura della traiettoria?
4. Qual è l'angolo tra $\vec{v}_0$ e $\vec{v}_f$?
5. Qual è l'intervallo di valori possibili di d per cui una particella ${}^4\text{He}^{2+}$ torna indietro, mentre una particella ${}^4\text{He}^+$ supera la barriera?

Costanti utili:

- $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{m}^{-2}\text{N}^{-1}$
- $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- $m_p = m_n = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
- $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Soluzioni

1. La forza di Lorentz $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ è sempre perpendicolare alla velocità istantanea della particella. Poiché il lavoro W è definito come $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$, e in questo caso $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$, il campo magnetico non compie lavoro e l'energia totale si conserva. Quindi la variazione di energia totale è nulla, ovvero $\Delta E = 0$.

2. L'espressione della forza è determinata dalla forza di Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{v}_0 \times \vec{B}) = e \left(\frac{c}{100} \hat{i} \times B_0 \hat{k} \right) = -\frac{ecB_0}{100} \hat{j}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\vec{F} = -(1.6 \cdot 10^{-19}) \cdot (3 \cdot 10^6) \cdot 1.0 \hat{j} = -4.8 \cdot 10^{-13} \text{ N} \hat{j}$$

3. Il raggio R per lo ione ${}^4\text{He}^+$ è:

$$R = \frac{mv_0}{qB_0} = \frac{4 \cdot (1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) \cdot (3 \cdot 10^6 \text{ m/s})}{(1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (1.0 \text{ T})} \approx 0.125 \text{ m} = 12.5 \text{ cm}$$

4. Dalla geometria della deflessione in un campo di spessore d :

$$\sin \theta = \frac{d}{R} = \frac{5.1 \text{ cm}}{12.5 \text{ cm}} \approx 0.408$$

$$\theta = \arcsin(0.408) \approx 24.1^\circ$$

5. Affinché la particella ${}^4\text{He}^{2+}$ (carica $2e$) torni indietro, deve essere $d > R_{He^{2+}}$. Affinché la particella ${}^4\text{He}^+$ (carica e) superi la barriera, deve essere $d < R_{He^+}$. Calcoliamo i due raggi:

- $R_{He^+} = \frac{mv_0}{eB_0} = 12.5 \text{ cm}$
- $R_{He^{2+}} = \frac{mv_0}{2eB_0} = \frac{12.5}{2} = 6.25 \text{ cm}$

L'intervallo richiesto è quindi:

$$6.25 \text{ cm} \leq d < 12.5 \text{ cm}$$