

Esercizio 3

Una distribuzione di cariche è tale che oltre ad una certa distanza $r \geq R$, il potenziale elettrico $V(\vec{R})$ sia costante. Poniamo per convenzione tale potenziale a 0 ($V(R) = 0$)

1. Cosa si può dedurre sulla carica totale della distribuzione?

Si assuma ora che la distribuzione sia caratterizzata da una densità di carica $\rho(\vec{r}) = a \frac{\cos(kr)}{r}$ per $r \leq R$, con k e a non nulli e positivi, e $\rho(\vec{r}) = 0$ per $r \geq R$

2. Quali sono le unità di misura di a e k ? Quali unità di misura potresti usare per scriverle?
3. Stimare la carica ΔQ contenuta in una corona sferica di raggio r' e di spessore $\Delta r' \ll r'$ assumendo che dentro di essa ρ sia costante e valga $\rho(r')$. Ricorda che un tale oggetto ha un volume approssimabile come $\Delta V = 4\pi(r')^2 \Delta r'$
4. Calcolare la carica totale della distribuzione Q in funzione di k e a . Quale è il valore minimo di k affinché si realizzi la condizione imposta inizialmente? Suggerimento: Per calcolare Q è sufficiente integrare l'espressione trovata nel punto precedente
5. Per tale k , calcolare $Q_{\text{int}}(r)$, ossia la carica totale racchiusa in una sfera di raggio r
6. Per tale k , calcolare il valore del campo elettrico in funzione della posizione dove lo si misura r

Costanti utili:

- $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{m}^{-2}\text{N}^{-1}$
- $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Soluzioni

1. Il potenziale elettrico all'esterno di una distribuzione di carica localizzata è dato da $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{tot}}}{r}$. Se il potenziale è nullo per ogni $r \geq R$, ne consegue necessariamente che la carica totale della distribuzione deve essere nulla:

$$Q_{\text{tot}} = 0$$

In termini fisici, la distribuzione è globalmente neutra; il campo elettrico all'esterno è nullo, e di conseguenza anche il potenziale.

2. L'argomento della funzione coseno deve essere adimensionale, quindi:

$$[kr] = 1 \implies [k] = L^{-1}$$

Si può misurare in $\mathbf{m}^{-1}$.

Per quanto riguarda a , dalla formula della densità di carica $\rho = a \frac{\cos(kr)}{r}$ sappiamo che $[\rho] = C/m^3$. Quindi:

$$[a] = [\rho] \cdot [r] = \frac{C}{m^3} \cdot m = \frac{C}{m^2}$$

Si può scrivere in $\mathbf{C/m^2}$.

3. Assumendo ρ costante nello spessore infinitesimo $\Delta r'$, la carica contenuta nella corona sferica è:

$$\Delta Q = \rho(r') \Delta V = a \frac{\cos(kr')}{r'} \cdot 4\pi(r')^2 \Delta r'$$

Semplificando r' , otteniamo:

$$\Delta Q = 4\pi a r' \cos(kr') \Delta r'$$

4. Per trovare Q , integriamo l'espressione precedente tra 0 e R :

$$Q = \int_0^R 4\pi a r \cos(kr) dr = 4\pi a \int_0^R r \cos(kr) dr$$

Risolvendo per parti:

$$Q = 4\pi a \left[\frac{r \sin(kr)}{k} + \frac{\cos(kr)}{k^2} \right]_0^R = \frac{4\pi a}{k^2} [kR \sin(kR) + \cos(kR) - 1]$$

Affinché la condizione iniziale ($Q = 0$) sia soddisfatta, deve essere:

$$kR \sin(kR) + \cos(kR) = 1$$

Il valore analitico minimo non nullo di $x = kR$ che soddisfa questa equazione (escludendo la soluzione $k = 0$) è $kR = 2\pi$. Infatti:

$$2\pi \sin(2\pi) + \cos(2\pi) = 0 + 1 = 1$$

Quindi il valore minimo di k è:

$$k = \frac{2\pi}{R}$$

5. Usando il valore di k trovato e integrando fino a un raggio generico $r \leq R$:

$$Q_{int}(r) = \int_0^r 4\pi a r' \cos(kr') dr' = \frac{4\pi a}{k^2} (kr \sin(kr) + \cos(kr) - 1)$$

6. Per il teorema di Gauss, il flusso attraverso una sfera di raggio r è $\Phi(E) = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}(r)}{\epsilon_0}$.

Per $r \leq R$:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{4\pi a}{k^2} (kr \sin(kr) + \cos(kr) - 1) = \frac{a}{\epsilon_0 k^2 r^2} (kr \sin(kr) + \cos(kr) - 1)$$

Per $r \geq R$: Siccome la carica totale Q è nulla, il campo elettrico è:

$$E(r) = 0$$