

Esercizio 2

Siano $R = 15$ mm, $r = 10$ mm, $P = (0, r, \frac{r}{2})$ e $\rho = 1,2 \cdot 10^{-4}$ C/m³

1. Si prenda un cilindro C_R di lunghezza infinita avente raggio R uniformemente carico con densità di carica ρ . Sia l'asse del cilindro l'asse z . Si prenda una superficie cilindrica Ω_1 di raggio r e altezza $2r$ coassiale a C_R . Si calcoli Φ_1 , ossia il flusso del campo elettrico attraverso Ω_1 .
2. Si usi il risultato precedente, e considerazioni di simmetria per dedurre $\vec{E}_1$, il campo elettrico generato da C_R nel punto P .
3. Si segua un procedimento analogo per trovare $\vec{E}_2$, ossia il campo elettrico nel punto P , se al posto del cilindro C_R , ci fosse una sfera uniformemente carica S_R di raggio R , centrata nell'origine e con densità di carica ρ .
4. Si consideri la regione di spazio A_R definita dalle disequazioni $x^2 + y^2 \leq R^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$. Calcolare $\vec{E}_3$, ossia il campo generato da un oggetto uniformemente carico di forma A_R , con densità di carica ρ e misurato nel punto P .

Suggerimenti:

- Ricorda che gli esercizi richiedono $\vec{E}$ e non E
- A_R è costruibile combinando in maniera opportuna C_R e S_R

Costanti:

- $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C²m⁻²N⁻¹
- $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
- $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C

Soluzioni:

1. La superficie Ω_1 si trova interamente all'interno della distribuzione di carica ($r < R$). Per la legge di Gauss, il flusso Φ_1 è

$$\Phi_1 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot V_{\Omega_1}}{\epsilon_0}$$

Il volume di Ω_1 è $V = \pi r^2(2r) = 2\pi r^3$. Quindi:

$$\Phi_1 = \frac{2\pi\rho r^3}{\epsilon_0} \approx 85.2 \text{ V} \cdot \text{m}$$

2. Per ragioni di simmetria, il campo elettrico prodotto da un cilindro infinito carico uniformemente è puramente radiale rispetto all'asse z . In coordinate cartesiane, nel punto $P(0, r, r/2)$, la distanza dall'asse z è esattamente r .

Sia $E_1(r)$ il modulo del campo a distanza r . Applicando Gauss a un cilindro di raggio r e lunghezza L :

$$E_1 \cdot (2\pi r L) = \frac{\rho(\pi r^2 L)}{\epsilon_0} \implies E_1 = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

Il punto P ha coordinate $(0, r, r/2)$, quindi il vettore posizione radiale nel piano xy è diretto lungo l'asse y . Il campo è dunque:

$$\vec{E}_1 = \left(0, \frac{\rho r}{2\epsilon_0}, 0\right) \approx (0; 6.78 \cdot 10^4; 0) \text{ V/m}$$

3. Il punto P dista dall'origine $d = \sqrt{0^2 + r^2 + (r/2)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}r^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}r \approx 11.18 \text{ mm}$. Dato che $d < R$, il punto è interno alla sfera. Per una sfera uniformemente carica, il campo interno a distanza $\vec{d}$ dal centro è:

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{d} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(0, r, \frac{r}{2}\right) = \left(0, \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, \frac{\rho r}{6\epsilon_0}\right) \approx (0; 4.52 \cdot 10^4; 2.26 \cdot 10^4) \text{ V/m}$$

4. La regione A_R è definita come l'interno del cilindro ($x^2 + y^2 \leq R^2$) privato dell'interno della sfera ($x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$). Per il principio di sovrapposizione, il campo generato da questa distribuzione è la differenza tra il campo del cilindro pieno e quello della sfera piena:

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$$

Sostituendo le espressioni vettoriali:

$$\vec{E}_3 = \left(0, \frac{\rho r}{2\epsilon_0}, 0\right) - \left(0, \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, \frac{\rho r}{6\epsilon_0}\right) = \left(0, \frac{\rho r}{6\epsilon_0}, -\frac{\rho r}{6\epsilon_0}\right) \approx (0; 2.26 \cdot 10^4; -2.26 \cdot 10^4) \text{ V/m}$$