

**Compito di Fisica Generale, II Semestre
Chimica e Chimica Industriale
Padova - Dipartimento di Chimica - 16 Settembre 2022**

Problema 1

Si consideri un piano indefinito con densità di carica superficiale uniforme $\sigma > 0$. Alla distanza d e parallelamente al piano c'è un filo rettilineo indefinito con densità di carica lineare $\lambda < 0$. Una carica $q < 0$ di massa m emessa dal piano con velocità $\vec{v}_0$, perpendicolare sia al piano che al filo, si ferma dopo aver percorso una distanza $x_1 < d$. Determinare

1. il campo elettrostatico totale nel punto x_1 ,
2. la differenza di potenziale elettrostatico ΔV tra x_1 e il piano,
3. il modulo di $\vec{v}_0$ in termini di m , q e ΔV .

Si ricorda che il campo elettrostatico generato da un filo indefinito con densità di carica uniforme λ in un punto distante x dal filo è

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \vec{u}_x ,$$

con $\vec{u}_x$ il versore uscente da x e diretto nel verso opposto rispetto al filo.

Problema 2

Si consideri un condensatore piano con armature di area Σ , distanti d e densità di carica uniforme σ . Su di un'armatura è appoggiato un dielettrico di spessore h e costante dielettrica relativa κ . Ricordando che questo condensatore può esser interpretato come due condensatori in serie, si chiede di determinare

1. il modulo del campo elettrostatico nel dielettrico,
2. la differenza di potenziale tra le armature,
3. il rapporto tra la capacità del condensatore corrispondente alla parte senza dielettrico e quella del condensatore della parte con dielettrico.

Problema 3

Tre fili indefiniti paralleli percorsi dalla stessa intensità di corrente i , uscenti dal piano nei fili 1 e 2 ed entrante nel filo 3, intersecano il piano nei vertici di un triangolo equilatero di lato d . Nel punto di mezzo P tra i vertici 2 e 3 vi è una spira di momento di dipolo magnetico $\vec{m}$ diretto lungo l'asse x . Determinare

1. il campo magnetico in P , $\vec{B}(P)$,
2. il momento meccanico $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ delle forze che agiscono sulla spira,
3. l'energia potenziale del dipolo magnetico.

Domanda. Descrivere la corrente di spostamento.

Problema 1

1. Nel punto x_1 i campi elettrici generati dal piano e dal filo sono entrambi diretti verso il filo. Si ha quindi

$$\vec{E}(x_1) = \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x_1)} \right] \vec{u}_x ,$$

con $\vec{u}_x$ il versore uscente da x_1 e diretto verso il filo.

- 2.

$$\Delta V = - \int_0^{x_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} x_1 - \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \ln \frac{d-x_1}{d} ,$$

3. Applicando la conservazione dell'energia meccanica tra il punto di emissione della carica e x_1 , cioè

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = -q \Delta V ,$$

si ha

$$v_0 = \sqrt{-\frac{2q}{m} \Delta V} .$$

Si noti che, come deve essere, v_0 è un numero reale in quanto $-\Delta V$ è positivo. Questo segue dal fatto che $\lambda < 0$ e $\ln[(d-x_1)/d] < 0$ poiché $0 < (d-x_1)/d < 1$.

Problema 2

- 1.

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} .$$

2. Sia V_0 la differenza di potenziale elettrostatico tra gli estremi dello spazio vuoto e V_d quella relativa agli estremi del dielettrico. Si ha

$$V = V_0 + V_d = E_0(d-h) + Eh = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} [\kappa d + (1-\kappa)h] .$$

Si noti, per inciso, che questo implica che il condensatore è equivalente a due condensatori in serie. Per cui, denotando con C_0 la capacità del condensatore senza la parte di dielettrico e con C_d la capacità del condensatore con il dielettrico, si ha

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_d} = \frac{d-h}{\epsilon_0 \Sigma} + \frac{h}{\kappa \epsilon_0 \Sigma} = \frac{\kappa d + (1-\kappa)h}{\kappa \epsilon_0 \Sigma} ,$$

da cui segue

$$\frac{C_0}{C_{eq}} = 1 + \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{h}{d} ,$$

espressione non esplicitamente richiesta dal testo ma, per possibili fraintendimenti dovuti alla formulazione della domanda, è stata considerata valida al posto della numero 3.

3.

$$\frac{C_0}{C_d} = \kappa \frac{d-h}{h} .$$

Problema 3

1. I campi magnetici in P generati dalle correnti sono

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{2}{d\sqrt{3}} \vec{u}_x = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sqrt{3}} \vec{u}_x , \\ \vec{B}_2 &= \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{2}{d} \vec{u}_y = \frac{\mu_0 i}{\pi d} \vec{u}_y . \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 i}{\pi d} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \vec{u}_x + 2 \vec{u}_y \right) = \frac{\mu_0 i}{\pi d} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 2, 0 \right) .$$

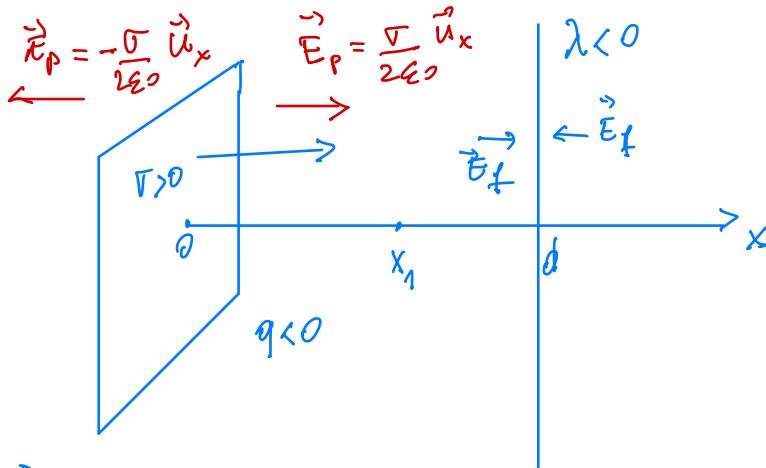
2.

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = m \vec{u}_x \times [B_1 \vec{u}_x + (B_2 + B_3) \vec{u}_y] = m(B_2 + B_3) \vec{u}_z = \frac{2m\mu_0 i}{\pi d} \vec{u}_z .$$

3.

$$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m B_1 = -m \frac{\mu_0 i}{\sqrt{3} \pi d} .$$

COMMENTI SUL I ES. SCRITTO 16.09.22



$$\vec{E}_f = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x_1)}\vec{u}_x, \quad x < d \quad \text{N.B. } |\lambda| = -\lambda$$

$$\vec{E}_{TOT}(x_1) = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x_1)} \right) \vec{u}_x$$

La particella ha una velocità iniziale v_0 diretta verso d . Il piano esercita una forza attrattiva nella carica. Il filo esercita una forza repulsiva sulla carica.

$$\vec{F}_f = q \vec{E}_f = q |\vec{E}_f| \vec{u}_x = -|q| |\vec{E}_f| \vec{u}_x \quad \text{quindi } \vec{F}_f \text{ ha verso } -\vec{u}_x$$

$$q < 0 \quad \lambda < 0 \quad \vec{F}_f = q \vec{E}_f = -|q| |\vec{E}_f| \vec{u}_x, \quad \text{quindi anche } \vec{F}_f \text{ ha verso } -\vec{u}_x.$$

Segue che la particella parte con velocità $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$
e viene rallentata da $\vec{F}_{TOT}$, che ha la forma

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_f + \vec{F}_p = -(|\vec{F}_f| + |\vec{F}_p|) \vec{u}_x$$

$\uparrow$
 ma $\vec{F}_f$ parallelo a $\vec{F}_p$

Un conto istruito: come si determinano $x(t)$ e $v(t)$

Possiamo usare $\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow$

$$\vec{a}_{TOT} = \frac{q}{m} \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x)} \right) \vec{u}_x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m} \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x)} \right) \quad 1)$$

Per trovare $x(t)$ e $v(t) = \frac{dx}{dt}$ è necessario

risolvere l'equazione differenziale 1). Questo ha la struttura

$$\ddot{x} + \frac{A}{B-x} + C = 0 \quad \text{con } A, B \text{ e } C \text{ costanti}$$

Si noti che

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^{\leftarrow v} = \frac{dv}{dx} v$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\lambda q}{m 2\pi\epsilon_0} \\ B &= d \\ C &= -\frac{q}{m} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

Quindi la b) diventa

$$v \frac{dv}{dx} + \frac{A}{B-x} + C = 0$$

Ora l'equazione può essere risolta con il metodo della separazione delle variabili

$$\underbrace{v dv}_{\text{solo } v} = - \underbrace{\left(\frac{A}{B-x} + C \right) dx}_{\text{solo } x}$$
$$\int_0^v v' dv' = - \int_0^x \left(\frac{A}{B-x'} + C \right) dx'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = A \log |B-x| - Cx + C_1 \leftarrow \text{costante d'int.} \quad 2)$$

$$v = \dot{x} \quad \rightarrow \quad (\dot{x})^2 = 2A \log |B-x| - 2Cx + 2C_1$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2A \log |B-x| - 2Cx + 2C_1} \quad 3)$$

ancora separazione delle variabili

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2A \log |B-x| - 2Cx + 2C_1}} = \pm \int dt$$

che risulta non avere una primitiva elementare.

Abbiamo però l'espressione esplicita di $v = \frac{dx}{dt}$. Supponiamo che

$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=0} = v_0$. Quindi da 2), ed anche da 3), si ha

$$v_0^2 = 2A \log|B| + 2C_1, \text{ cioè}$$

$$C_1 = \frac{v_0^2}{2} - A \log|B| \quad \text{Ma sappiamo che} \quad \begin{cases} A = \frac{\lambda q}{m 2\pi \epsilon_0} \\ B = d \\ C = -\frac{q}{m} \frac{\Gamma}{2\epsilon_0} \end{cases}$$

Quindi $C_1 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\lambda q}{2m\pi\epsilon_0} \log d$ e 2) diventa

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{\lambda q}{m} \log|B-x| - Cx + \frac{v_0^2}{2} - \frac{\lambda q}{2m\pi\epsilon_0} \log d$$

Poiché in x_1 si ha $v=0$, segue che

$$\frac{\lambda q}{m} \log|B-x_1| - Cx_1 + \frac{v_0^2}{2} - \frac{\lambda q}{2m\pi\epsilon_0} \log d = 0$$

relazione che determina x_1 in modo implicito.