

**Compito di Fisica Generale, II Semestre
Chimica Industriale
Padova - Dipartimento di Chimica - 28 agosto 2023**

Problema 1

Una carica positiva è distribuita, con densità volumetrica ρ uniforme, nella regione di spazio limitata dai piani $x = -d$ e $x = d$, con $d > 0$. Determinare

1. il campo elettrostatico per $|x| > d$,
2. il campo elettrostatico per $|x| \leq d$,
3. il potenziale elettrostatico in tutto lo spazio scegliendo la costante additiva arbitraria in modo tale che si annulli sul piano $x = 0$.
4. Si supponga che una particella carica q sia fissa in un punto arbitrario del piano $x = 2d$. Determinare il valore di q per cui una particella carica posta in quiete sul piano $x = 3d$, distante d dalla particella carica, permanga nello stato di quiete.

Domanda: si descriva la conservatività del campo elettrostatico.

Problema 2

Si consideri una spira circolare di raggio a e resistenza R , attraversata da un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, parallelo all'asse della spira. Determinare

1. il flusso del campo magnetico iniziale attraverso la spira,
2. si dica, spiegandone il motivo, se perdurando la configurazione iniziale, il campo magnetico può indurre una corrente elettrica nella spira,
3. la carica complessiva che attraversa la spira a fronte di una rotazione della stessa, rispetto al suo diametro, di A: 90° , B: 180° .

Domanda: si descriva la forza di Lorentz.

Problema 1

Di seguito riportiamo una soluzione dettagliata, richiamando vari concetti più volte illustrati a lezione.

Assumiamo per semplicità che ρ sia positiva, l'analisi nel caso $\rho < 0$ è del tutto analoga. Si osservi dapprima che nel piano $x = 0$ il campo elettrostatico è il vettore nullo, cioè $\vec{E} = \vec{0}$. Infatti, qualsiasi valore non nullo di $\vec{E}$ in $x = 0$ implicherebbe una direzione di $\vec{E}$, fatto che non sarebbe compatibile con la simmetria del problema rispetto al piano $x = 0$. In proposito si noti che la trasformazione $x \rightarrow -x$ lascia la distribuzione di carica inalterata e quindi $\vec{E}$ in $x = 0$ non può cambiare. In particolare, la componente x di $\vec{E}$ deve rimanere invariata. D'altronde $\vec{E}$ non può dipendere da y e z poiché sotto traslazioni di questi due assi la distribuzione di carica è invariante. Essendo quindi $\vec{E}(x) = E_x(x)\vec{u}_x$, si ha $\vec{E}(0) = E_x(0)\vec{u}_x = E_x(0)\vec{u}_{-x} = -E_x(0)\vec{u}_x$, la cui unica soluzione è $\vec{E}(0) = \vec{0}$.

Nella regione di spazio con $x > 0$ il campo $\vec{E}$ è parallelo a $\vec{u}_x$, mentre per $x < 0$ è parallelo a $-\vec{u}_x$. Si consideri un cilindro il cui asse è parallelo all'asse delle x , che attraversa tutta la parte carica e fuoriesca della stessa lunghezza dai due piani $x = -d$ e $x = d$. Si osservi che, poiché la direzione della superficie curva del cilindro in ogni suo punto è perpendicolare a $\vec{E}$, l'unico contributo al flusso del campo elettrostatico attraverso la superficie orientata $\vec{\Sigma}$ del cilindro è dato dalla somma dei flussi di $\vec{E}$ attraverso i dischi orientati $\vec{D}_1$ e $\vec{D}_2$, corrispondenti alle basi del cilindro, cioè

$$\Phi_{\vec{\Sigma}}(\vec{E}) := \int_{\vec{\Sigma}} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\vec{D}_1} \vec{E} \cdot d\vec{D}_1 + \int_{\vec{D}_2} \vec{E} \cdot d\vec{D}_2 = 2ED .$$

Si noti che l'ultima uguaglianza segue dal fatto che il flusso di $\vec{E}$ attraverso il disco $\vec{D}_1$ è lo stesso di quello attraverso $\vec{D}_2$. La legge di Gauss implica

$$\Phi_{\vec{\Sigma}}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tilde{V}} \rho d\tau = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tilde{V} = \frac{\rho}{\epsilon_0} 2Dd ,$$

dove V è il volume del cilindro e $\tilde{V}$ la sua parte che racchiude una densità di carica non nulla. Poiché i campi elettrici in $-x$ e x hanno lo stesso modulo, si ha

$$\vec{E}(x < -d) = -\frac{\rho d}{\epsilon_0} \vec{u}_x , \quad \vec{E}(x > d) = \frac{\rho d}{\epsilon_0} \vec{u}_x .$$

Consideriamo ora una superficie cilindrica $\vec{\Sigma}'$, con asse parallelo a $\vec{u}_x$ e l'area dei dischi delle basi sempre pari a D , posta a cavallo del piano $x = d$, con una base nella regione $x > d$ e l'altra nella regione $|x| < d$. Il flusso attraverso $\vec{\Sigma}'$ è ancora una volta dato dalla somma dei flussi di $\vec{E}$ attraverso i due dischi delle basi. Come visto sopra il flusso del campo elettrostatico attraverso il disco $\vec{D}_2$ è $E(d)D = \rho Dd/\epsilon_0$. Nel caso del disco interno alla distribuzione di carica, se questo ha ascissa $x > 0$, allora il campo elettrostatico su $\vec{D}_1$ è parallelo a $\vec{u}_x$, cosicchè, essendo $\vec{D}_1$ orientato parallelamente a $-\vec{u}_x$, il flusso di $\vec{E}$ attraverso il disco $\vec{D}_1$ è $-E(x)D$. Se invece il disco interno ha ascissa negativa, allora il campo elettrostatico è parallelo a $-\vec{u}_x$ per cui, in tal caso, il flusso è $E(x)D$. Osservando che la carica racchiusa dal cilindro è $\rho D(d-x)$, si ha per la legge di Gauss

$$\Phi_{\vec{\Sigma}'}(E) := \int_{\vec{\Sigma}'} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}' = -E(x)D + E(d)D = \frac{\rho D(d-x)}{\epsilon_0}, \quad x \in (0, d],$$

da cui $E(x) = |\vec{E}(x)| = \rho x/\epsilon_0$, ed avendo mostrato che per $x \in (0, d]$ si ha che $\vec{E}(x)$ è parallelo a $\vec{u}_x$, segue

$$\vec{E} = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \vec{u}_x.$$

Analogamente, nel caso in cui il disco D_1 abbia ascissa negativa, si ha

$$\Phi_{\vec{\Sigma}'}(E) := E(x)D + E(d)D = \frac{\rho D(d-x)}{\epsilon_0}, \quad x \in [-d, 0),$$

da cui¹ $E(x) = |\vec{E}(x)| = -\rho x/\epsilon_0$, ed avendo mostrato che per $x \in [-d, 0)$ si ha che $\vec{E}(x)$ è antiparallelo a $\vec{u}_x$, segue

$$\vec{E} = -\frac{\rho x}{\epsilon_0}(-\vec{u}_x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \vec{u}_x.$$

Si noti che questo risultato lo si può ottenere immediatamente dal precedente utilizzando la simmetria della distribuzione di carica. Ciò implica che le quantità fisiche, cioè misurabili sperimentalmente, quindi incluso $\vec{E}$, devono avere proprietà speculari rispetto al piano $x = 0$. Ciò implica che poiché per

¹Si noti che $-\rho x/\epsilon_0$ è una quantità positiva in quanto l'espressione si riferisce ad un intervallo dove $x < 0$.

$x > 0$ il campo $\vec{E}$ è parallelo a $\vec{u}_x$, si ha che per $x < 0$ il campo $\vec{E}$ deve avere la stessa intensità di $\vec{E}(|x|)$ e verso opposto, quindi $\vec{E}(x) = -\vec{E}(-x)$.

Per quanto riguarda il potenziale nell'intervallo $|x| < d$, si ha, considerando che $V(0) = 0$,

$$V(x) - V(0) = V(x) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^x x' dx' = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} x^2 . \quad (1)$$

Per $x > d$ si ha

$$V(x) - V(d) = -\frac{\rho d}{\epsilon_0} \int_d^x dx' ,$$

da cui

$$V(x) = V(d) - \frac{\rho d}{\epsilon_0} (x - d) = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} (2x - d) , \quad (2)$$

dove si è utilizzata la continuità di $V(x)$ ad $x = d$ ed il fatto che da (1) segue

$$V(d) = \lim_{x \rightarrow d} V(x) = \lim_{x \rightarrow d} -\frac{\rho}{2\epsilon_0} x^2 = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} d^2 .$$

Un'analisi del tutto analoga mostra che per $x < -d$ si ha

$$V(x) = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} (2x + d) , \quad (3)$$

risultato ottenibile anche senza far conti espliciti, in quanto, essendo $\vec{E}(-x) = -\vec{E}(x)$, segue da $E = -dV/dx$ che V è una funzione dispari, cioè $V(-x) = -V(x)$. Quindi $V(x < -d) = -V(x > d)$, per cui la (3) segue dalla (2), sostituendo x con $-x$.

Denotiamo con q' la carica posta nel piano $x = 3d$. La forza elettrostatica totale a cui è sottoposta tale carica è

$$\vec{F}_{tot} = q' \vec{E}_{tot} = q' \left(\frac{\rho d}{\epsilon_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \right) \vec{u}_x ,$$

e la condizione che la carica q' rimanga in quiete, cioè che si abbia $\vec{F}_{tot} = \vec{0}$, implica

$$q = -4\pi\rho d^2 .$$

Problema 2

Il flusso iniziale è

$$\Phi_i(\vec{B}) := \int_{\vec{\Sigma}} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = B\pi a^2 .$$

Se non c'è variazione di flusso non può esserci corrente indotta.
Dopo la rotazione di 90^0 il flusso è

$$\Phi_f(\vec{B}) = 0 ,$$

nel caso di una rotazione di 180^0

$$\Phi_i(\vec{B}) := \int_{\vec{\Sigma}} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = -B\pi a^2 .$$

Utilizzando la legge di Faraday

$$Q = -\frac{1}{R}[\Phi_f(\vec{B}) - \Phi_i(\vec{B})] ,$$

nel primo caso si ha

$$Q = \frac{B\pi a^2}{R} ,$$

mentre nel caso di rotazione di 180^0 si ha

$$Q = \frac{2B\pi a^2}{R} .$$