

**Compito di Fisica Generale, II Semestre
Chimica Industriale
Padova - Dipartimento di Chimica - 20 giugno 2023**

Problema 1

Sia $\vec{r}$ il raggio vettore che origina nel punto $O = (0, 0, 0)$ degli assi cartesiani di $\mathbb{R}^3$. Sia $\rho(r) = ar$ per $r \leq R$ e $\rho(r) = 0$ per $r > R$, la densità di carica volumetrica, con a una costante positiva. Determinare

1. le dimensioni di a ,
2. il campo elettrostatico in tutto $\mathbb{R}^3$,
3. il potenziale elettrostatico $V(r)$ in tutto $\mathbb{R}^3$ e tale che $V(R) = 0$.

Domanda

Descrivere la legge di Gauss per il campo elettrico.

Problema 2

Si considerino due fili conduttori paralleli indefiniti, distanti L ed entrambi percorsi, nello stesso verso, dalla corrente di intensità i . Determinare

1. il campo magnetico in tutto il piano $\mathbb{R}^2$ dove giacciono i fili conduttori, distinguendo le seguenti tre regioni di spazio: quella a sinistra del primo filo, quella tra i due fili, e quella alla destra del secondo filo.
2. il campo elettrostatico $\vec{E}$ eventualmente necessario affinché una carica q , complanare ai due fili e che al tempo t_0 dista $L/2$ da essi, con velocità $\vec{v}$ parallela alle due correnti, non subisca, in tale istante, alcuna accelerazione.

Domanda

Descrivere la forza di Lorentz.

Problema 1

1. $[a] = QL^{-4}$.

2. Il flusso del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso una superficie Σ è definito nel modo seguente

$$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) := \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} .$$

Se Σ è una superficie chiusa, cioè $\partial\Sigma = \emptyset$, allora, in accordo con la legge di Gauss, si ha

$$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} ,$$

dove q è la carica totale interna a Σ . Nel caso in questione si ha simmetria sferica, per cui conviene scegliere come Σ la superficie sferica di raggio r centrata in O , che denotiamo S_r^2 . In proposito si osservi che poiché $a > 0$, il campo elettrico ha la stessa direzione e verso del raggio vettore. Ciò implica la seguente semplificazione

$$\int_{S_r^2} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{S_r^2} \cos(0) E d\Sigma = \int_{S_r^2} E d\Sigma .$$

D'altronde, sempre come conseguenza della simmetria sferica, $\vec{E}$ dipende solamente dalla distanza da O , cioè $\vec{E} = \vec{E}(r)$, ed essendo l'integrazione su una superficie con r costante, S_r^2 , si ha

$$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = E \int_{S_r^2} d\Sigma = E 4\pi r^2 .$$

Per quanto riguarda la carica racchiusa da S_r , si ha

$$q(r \leq R) = \int_{V_r} \rho d\tau = 4\pi a \int_0^r r'^3 dr' = \pi a r^4 ,$$

$$q(r \geq R) = \int_{V_r} \rho d\tau = 4\pi a \int_0^R r'^3 dr' = \pi a R^4 ,$$

da cui

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{a}{4\epsilon_0} r^2 \vec{u}_r , \quad \vec{E}(r \geq R) = \frac{a}{4\epsilon_0} \frac{R^4}{r^2} \vec{u}_r .$$

3. Si ha

$$V(r \leq R) - V(R) = - \int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{r}' = - \int_R^r E dr' = - \frac{a}{4\epsilon_0} \int_R^r r'^2 dr' ,$$

quindi, poiché $V(R) = 0$,

$$V(r \leq R) = - \frac{a}{12\epsilon_0} (r^3 - R^3) ,$$

che, come deve essere, soddisfa la condizione richiesta $V(R) = 0$. Inoltre

$$V(r \geq R) - V(R) = - \int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{r}' = - \int_R^r E dr' = - \frac{aR^4}{4\epsilon_0} \int_R^r \frac{1}{r'^2} dr' ,$$

quindi

$$V(r \geq R) = \frac{aR^4}{4\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) ,$$

che, come ovvio, soddisfa la condizione $V(R) = 0$.

Problema 2

1. Denotiamo con r la distanza dal primo filo, e con I , II e III , la regione piana rispettivamente alla sinistra del primo filo, tra i due fili e alla destra del secondo filo. Scegliamo la direzione delle correnti verso l'alto del foglio e denotiamo con $\vec{u}_n$ il versore perpendicolare al foglio e uscente da esso. Si ha

$$\begin{aligned} I. \quad \vec{B}(r) &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{L+r} \right) \vec{u}_n , \\ II. \quad \vec{B}(r) &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{L-r} \right) \vec{u}_n , \\ III. \quad \vec{B}(r) &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r-L} \right) \vec{u}_n . \end{aligned}$$

2. Nella retta $r = L/2$ in II si ha $\vec{F}_L(L/2) = q\vec{v} \times \vec{B}(L/2) = \vec{0}$, quindi $\vec{E} = \vec{0}$.