



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Docente:
Michele Doro
michele.doro@unipd.it

Corso di Fisica STAG 2019/20

Fluidostatica –

Tensione superficiale / Legge di Laplace



Forze di coesione: Tensione superficiale

Tensione superficiale



Alcuni insetti sfruttano la tensione superficiale per "camminare" sull'acqua

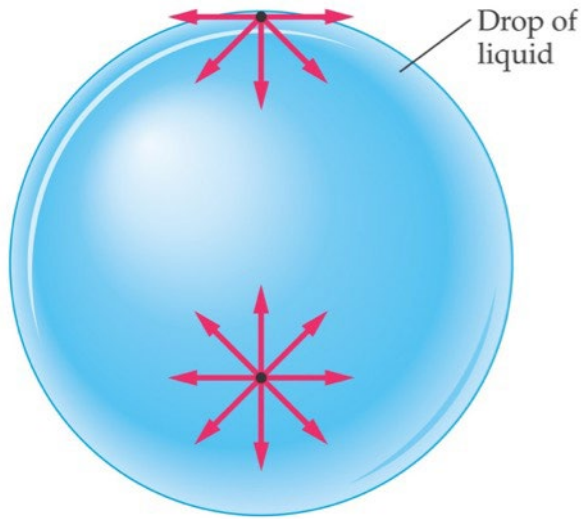


La tensione superficiale impedisce alla moneta di affondare

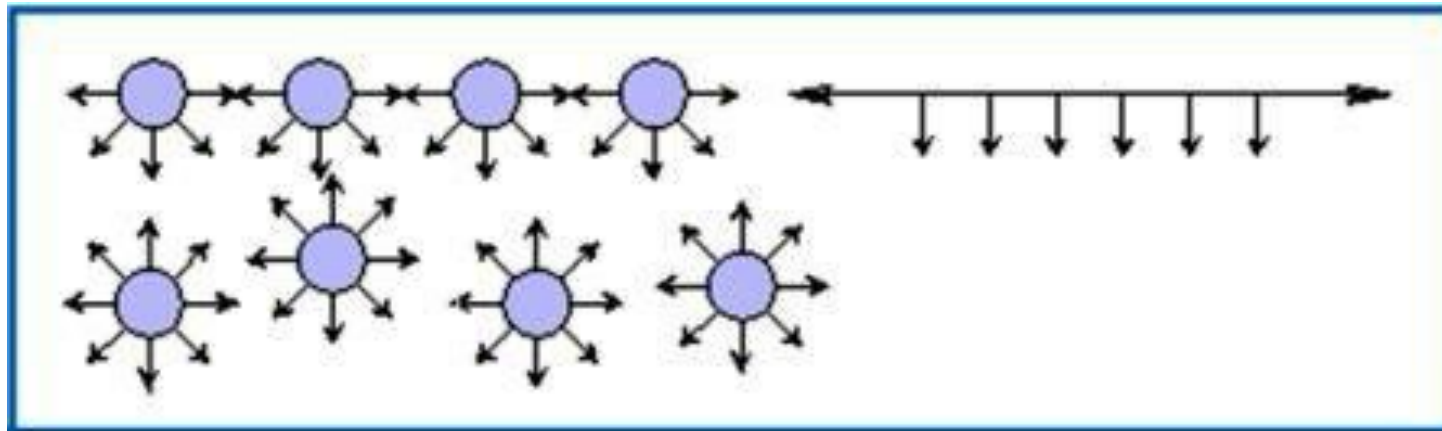


- Piccoli corpi densi, come gli insetti e gli aghi, o una moneta, sono in grado di rimanere sulla superficie dell'acqua anche se sono troppo densi per galleggiare.
- Due goccioline separate su una superficie tendono ad unirsi, se sono molto vicine o a contatto
- Questi fenomeni si spiegano con **tensione superficiale** e **forze di coesione** all'interno di un liquido (no gas)

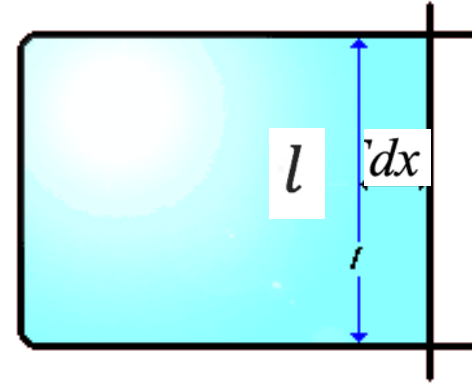
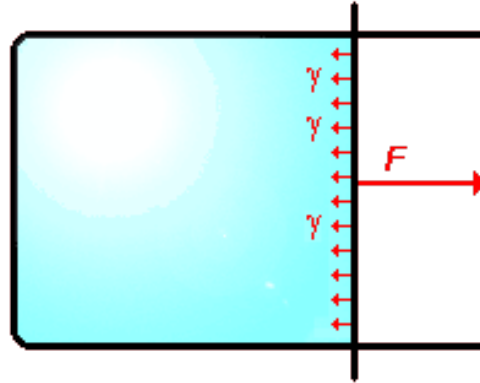
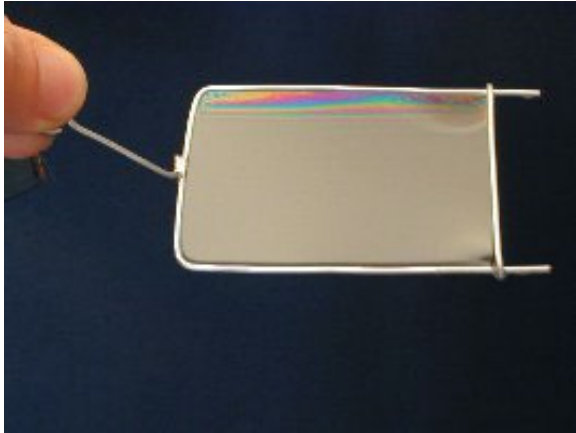
Tensione superficiale – spiegazione molecolare



- Una molecola al centro di una goccia di fluido è soggetta alle forze esercitate **in tutte le direzioni dalle molecole circostanti**.
- Una molecola sulla superficie della goccia, invece, è soggetta a una **forza risultante diretta verso l'interno**.
- Sotto l'azione di questa spinta la superficie della goccia tende ad **assumere l'area minima**.



Perche si chiama tensione e come si misura?



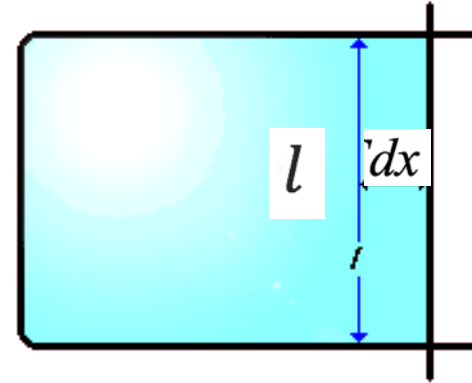
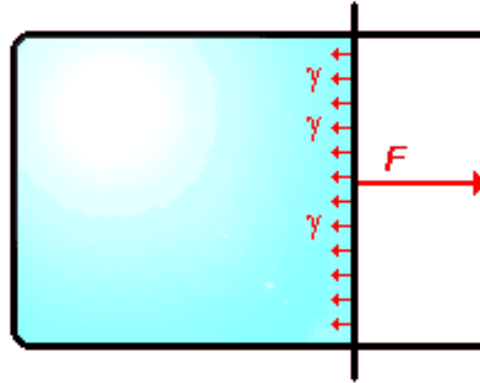
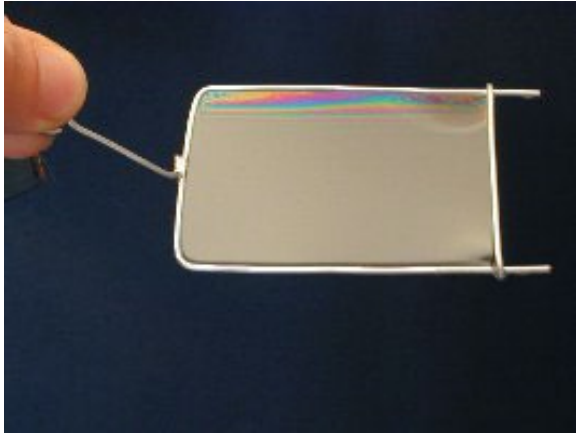
- Prendiamo un telaio metallico, con un lato mobile e lo immergiamo in una miscela di sapone e acqua. Se tiro il lato mobile, faccio “fatica” quindi faccio un lavoro. Contro cosa? Contro le forze di tensione superficiale
- Se allungo di dx , la superficie aumenta di $l dx$ (lato sopra) + $l dx$ (lato sotto)
 $\rightarrow dA = 2 l dx$. Il lavoro e' quindi

$$dL = F dx = F \frac{dA}{2l} = \tau dA$$

2 facce del liquido
 τ : tensione superficiale

- Ovvero $\tau = \frac{dL}{dA}$ è lavoro (energia) che serve per fare aumentare area di dA

Perche si chiama tensione?



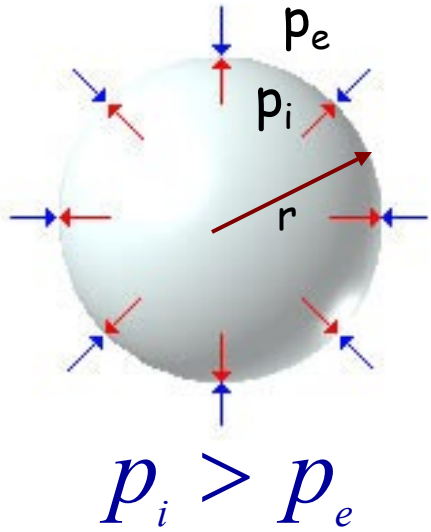
$$dL = Fdx = F \frac{dA}{2l} = \tau \cdot dA$$

$$\tau \equiv \frac{F}{2l}$$

tensione superficiale

Materiale ♦	Tensione superficiale (N/m) ♦
Acqua	0,073
Mercurio	0,559
Benzene	0,029
Olio di oliva	0,0319

Legge di Laplace



- All'equilibrio ci sono 3 contributi:
 - pressione interna P_i del liquido (tende espandere)
 - pressione esterna P_e e tensione superficiale tendono a comprimere

- All'equilibrio **pressione interna maggiore di quella esterna**:

$$\Delta P = P_i - P_e = 2 \frac{\tau}{r}$$

[Legge di Laplace*]

τ = raggio sfera

- In una goccia d'acqua di 1mm di raggio c'è una leggera sovrappressione interna.
 - Per acqua $\Delta P = 2 \cdot \frac{0.073}{0.001} = 146 \text{ Pa}$
- Se superficie è piatta ($r = \infty$) differenza di pressione è zero

* Dimostrazione
alla fine delle
slides

La goccia piccola



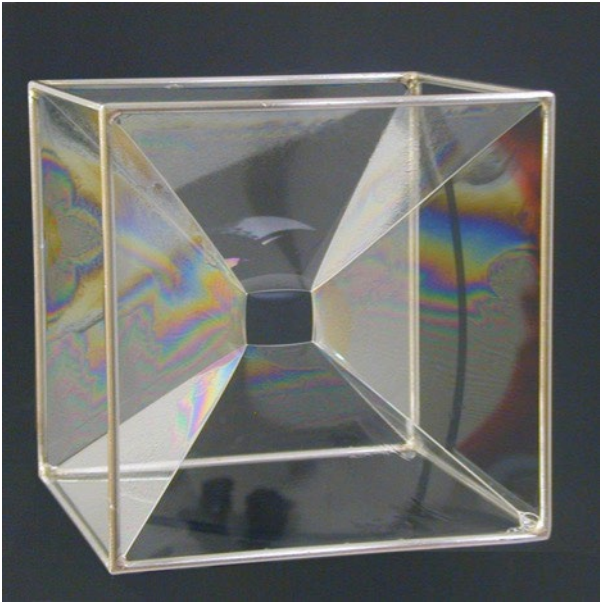
- Se la goccia e' troppo grande, durante la caduta, si rompe perche la forza peso e la viscosita la "smembrano".
- Nello spazio questo non avviene
<http://video.repubblica.it/tecno-e-scienze/spazio-la-bolla-d-acqua-a-gravita-zero-lezione-di-fisica-sulla-iss/102106/100487>

viscosità: resistenza allo scorrimento o alla deformazione sotto l'effetto di una forza



- Il mercurio ha elevata tensione superficiale e forma delle gocce che sembrano "metalliche"

La forma non e' sempre sferica



- La forma sferica viene raggiunta solo se il liquido e' libero
- Se invece viene montato su un telaio, si aggrappa ai lati, e la superficie minima prende una forma strana...



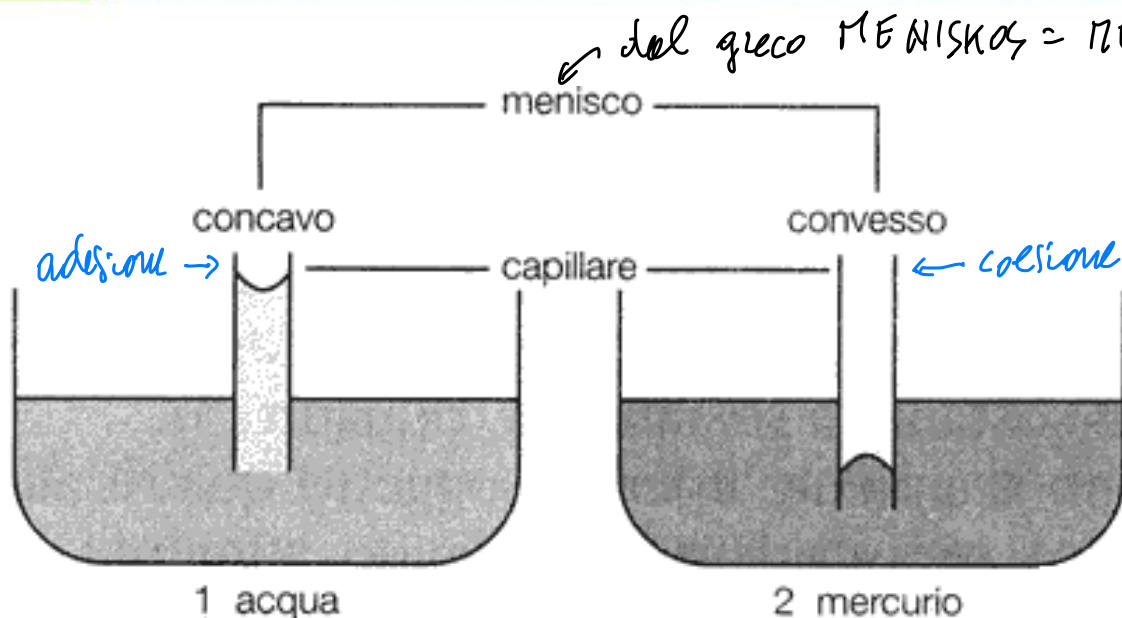
Forze di adesione: Capillarità

Capillarità



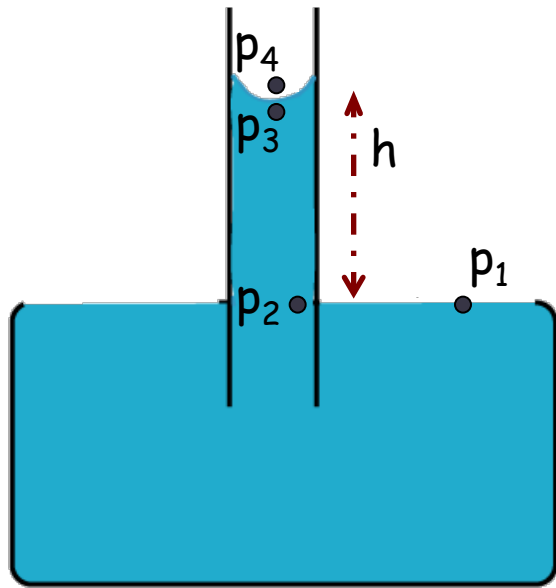
- La legge di Laplace spiega innalzamento o abbassamento di un liquido in **un tubo capillare ($r \leq 0.1 \text{ mm}$)** *sottile "come un capello"*
- **Tre Forze in gioco**
 - **forze di adesione** → *forze tra elementi diversi*
 - tra molecole del liquido e quelle del contenitore
 - Tra molecole del liquido e dell'aria sopra-stante (debole)
 - **forze di coesione** (attrazione reciproca fra le molecole del liquido). *forze tra lo stesso elemento*

Capillarità

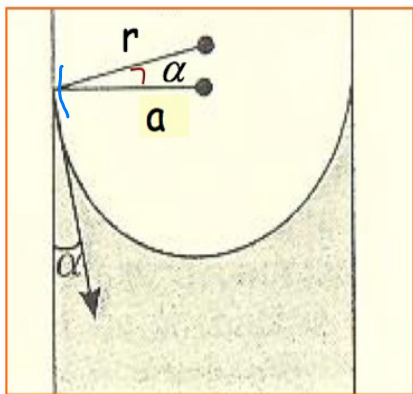


- $F_{ades} > F_{coes}$
 - Il liquido **risale** il capillare
 - liquido “**bagna la parete**”
- $F_{ades} < F_{coes}$
 - Il liquido **scende** il capillare
 - il liquido “**non bagna la parete**”

Altezza/profondità del liquido sul capillare



$$a = r \cos \alpha$$



Usando legge Stevino e Pascal assieme $P = P_0 + \rho g h$

- $P_1 = P_4$ (pressione atmosferica)
- $P_1 = P_2$ perché sono alla stessa altezza, quindi $P_2 = P_4$
- D'altro canto per Stevino

$$P_2 = P_3 + \rho g h \rightarrow P_4 = P_3 + \rho g h \quad (1)$$

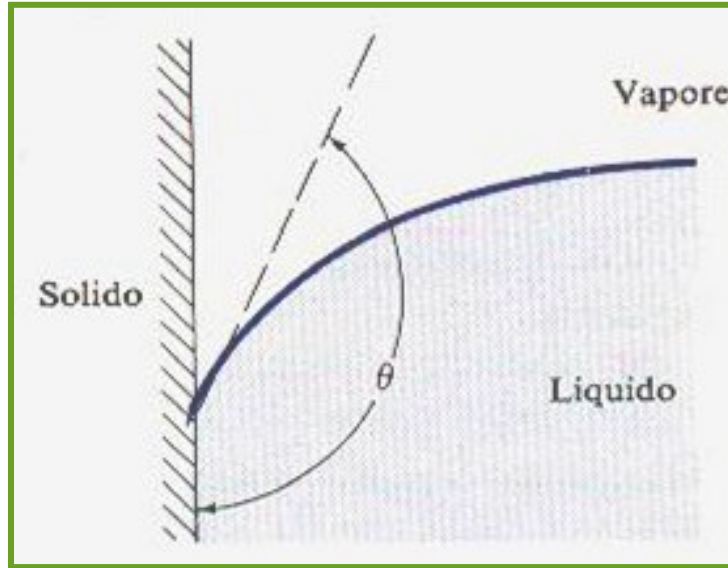
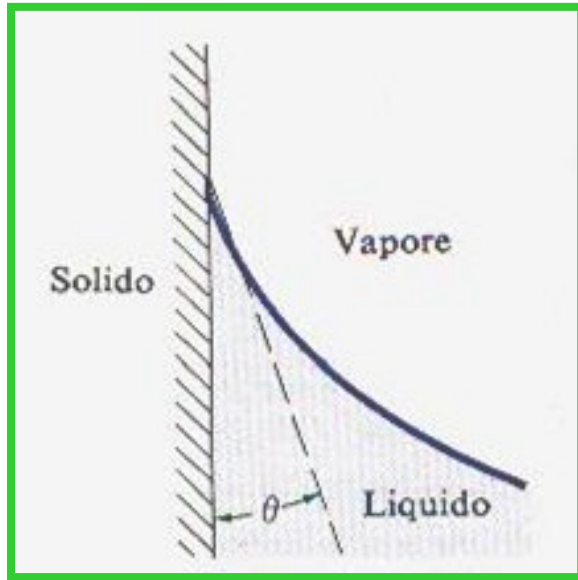
- Ma per Laplace $P_3 = P_4 + 2\tau/r$ $P_i - P_e = \frac{2\tau}{r}$ $\frac{182}{2} : \rho g h = \frac{2\tau}{r} \Rightarrow$
- Quindi c'è un legame tra altezza e raggio curvatura o meglio **a raggio del capillare** :

$$h = \frac{2\tau}{\rho g r}$$

$$h = \frac{2\tau}{\rho g r} = \frac{2\tau \cos \alpha}{\rho g a}$$

$a = r \cos \alpha$

Menisco concavo e convesso



Attenzione al raggio di curvatura negative nel caso di menisco convesso:

$$a = r \cos \alpha$$

Menisco concavo $0 < \cos \alpha < 1$

Menisco convesso $\cos \alpha < 0$

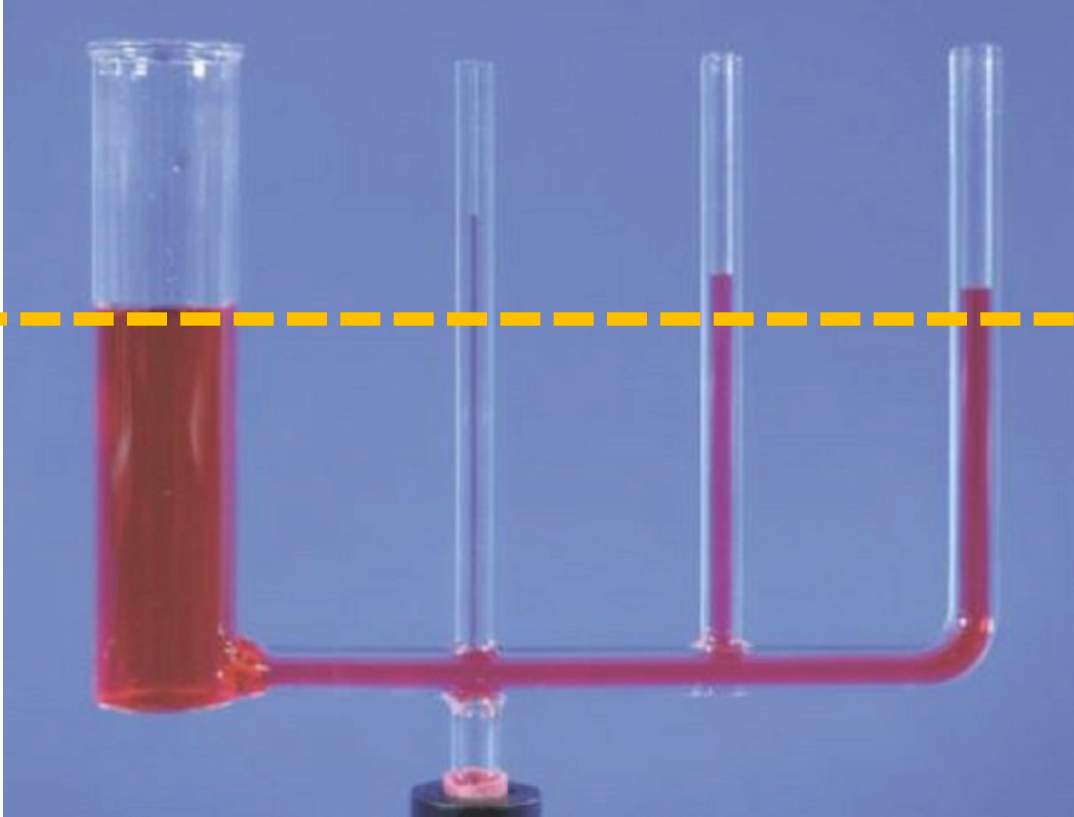
- Esempio: capillare di raggio 0.5 mm, $\alpha = 45^\circ$, di quanto sale acqua?:

$$\circ h = \frac{2\tau \cos(\alpha)}{\rho g a} = \frac{2(0.073)}{(1000)(9.81)(0.0005)} = 30 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 21.3 \text{ mm (concavo)}$$

- Stessa cosa ma con Mercurio

$$\circ h = \frac{2\tau \cos(\alpha)}{\rho g a} = \frac{2(0.559)}{(12579)(9.81)(0.0005)} = 16 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -11.3 \text{ mm (convesso)}$$

Sezione è importante



- Effetto della sezione:

$$h = \frac{2\tau}{\rho g a} \cos(\alpha)$$



Chiusura

Riepilogo



- Liquido manifesta tensione superficiale, dovuta alle forze di coesione tra le sue molecole (un gas no)
- Questa tensione tende a ridurre la superficie del liquido (sempre) e in caso sia possibile a fare delle piccole sfere (gocce)
- A contatto del liquido con un altro materiale, si presentano anche forze di adesione liquido-materiale. A seconda di quale delle due sia maggiore si hanno:
 - Diverse condizioni di “bagnabilità”
 - Fenomeni di capillarità “in salita” o “in discesa” ovvero con menisco “concavo” o “convesso”

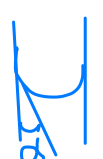
Termini chiave

- Forza coesione e adesione
- Tensione superficiale
- Pressione interna di Laplace
- Capillare, capillarità
- Menisco concavo e convesso

Concetti chiave

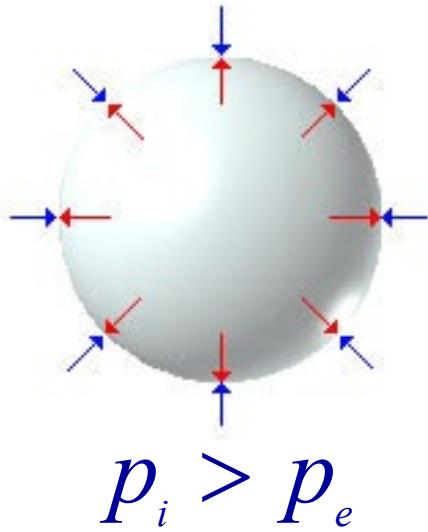
- L'osservazione della natura ci porta a dire che esiste una forza di coesione interna tra costituenti dello stesso tipo e una forza di adesione tra costituenti di tipo diverso
- La forza di coesione si quantifica attraverso la tensione superficiale che
 - Tende a limitare al minimo la superficie libera di un liquido (effetto goccia)
- La forza di adesione genera fenomeno di capillarità con risalita del fluido nel capillare o discesa a seconda del rapporto tra forze di adesione e coesione e della dimensione della superficie libera.

Esercizi

- Quale e' la Pressione di Laplace ^{ΔP} per una goccia di mercurio di raggio 1mm? $\Delta P = 2\tau/r = 2(0.559)/10^{-3} \text{ Pa} = 1118 \text{ Pa}$ ($1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ bar}$)
- In un capillare di raggio 0.1mm, in cui e' presente acqua, osservo che il menisco e' concavo e con 'attacco' a 30 gradi, di quanto e' risalita l'acqua?  $h = 2\tau \cos\alpha / \rho g r = 2 \cdot 0.073 \cos 30^\circ / (1000 \cdot 9.81 \cdot 10^{-4}) \text{ m} = 0.129 \text{ m}$
- Un liquido di densita 0.98 kg/dm³ risale su un capillare di diametro 0.15mm per 0.98m. La tensione superficiale del liquido e' 0.37 N/m. Quale sara' l'angolo di attacco del menisco al capillare? $\cos\alpha = h \rho g r / (2\tau) = 0.955 \rightarrow \alpha = \arccos(0.955) = 17.3^\circ$

Approfondimento: Dimostrazione Legge di Laplace

F. Recchia



- Supponiamo che una goccia di liquido aumenti il valore del proprio raggio da r a $r + dr$. Il lavoro fatto dalle forze di pressione interna ed esterna (tra loro opposte) e' $dL = Fdr = \Delta p A dr$ ovvero:

$$dL = (p_i - p_e)4\pi r^2 dr$$

- Il termine dopo parentesi e' la variazione di volume per un aumento dr del raggio
- E' aumentata anche la superficie, e quindi c'e' un lavoro legato alla tensione superficiale

$$dL = \tau dA \quad dA = \frac{d}{dr}(4\pi r^2)dr = 8\pi r dr$$

Handwritten note: $dA = \frac{dA}{dr} dr$ with an arrow pointing to the derivative.

$$dL = \tau 8\pi r dr$$

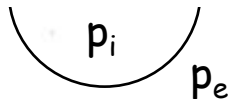
- Uguagliando le due espressioni del lavoro

$$(p_i - p_e)4\pi r^2 dr = \tau 8\pi r dr$$

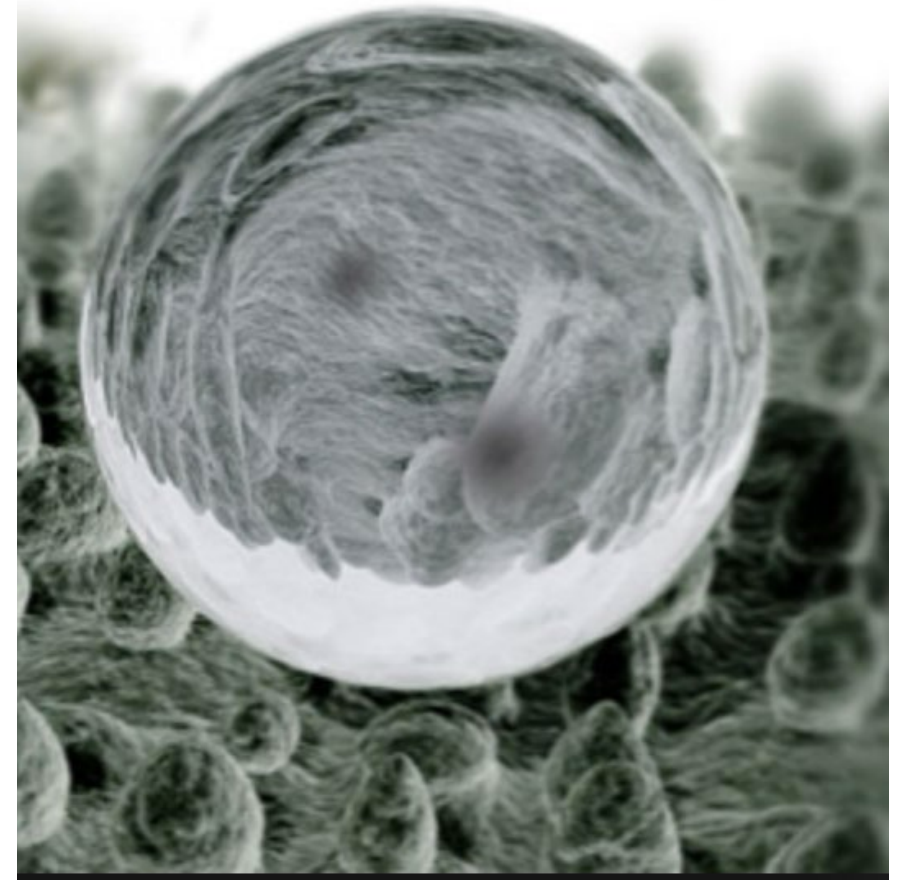
$$\cancel{4\pi r^2} (p_i - p_e) \cancel{dr} = \cancel{8\pi r} \tau \cancel{dr}$$



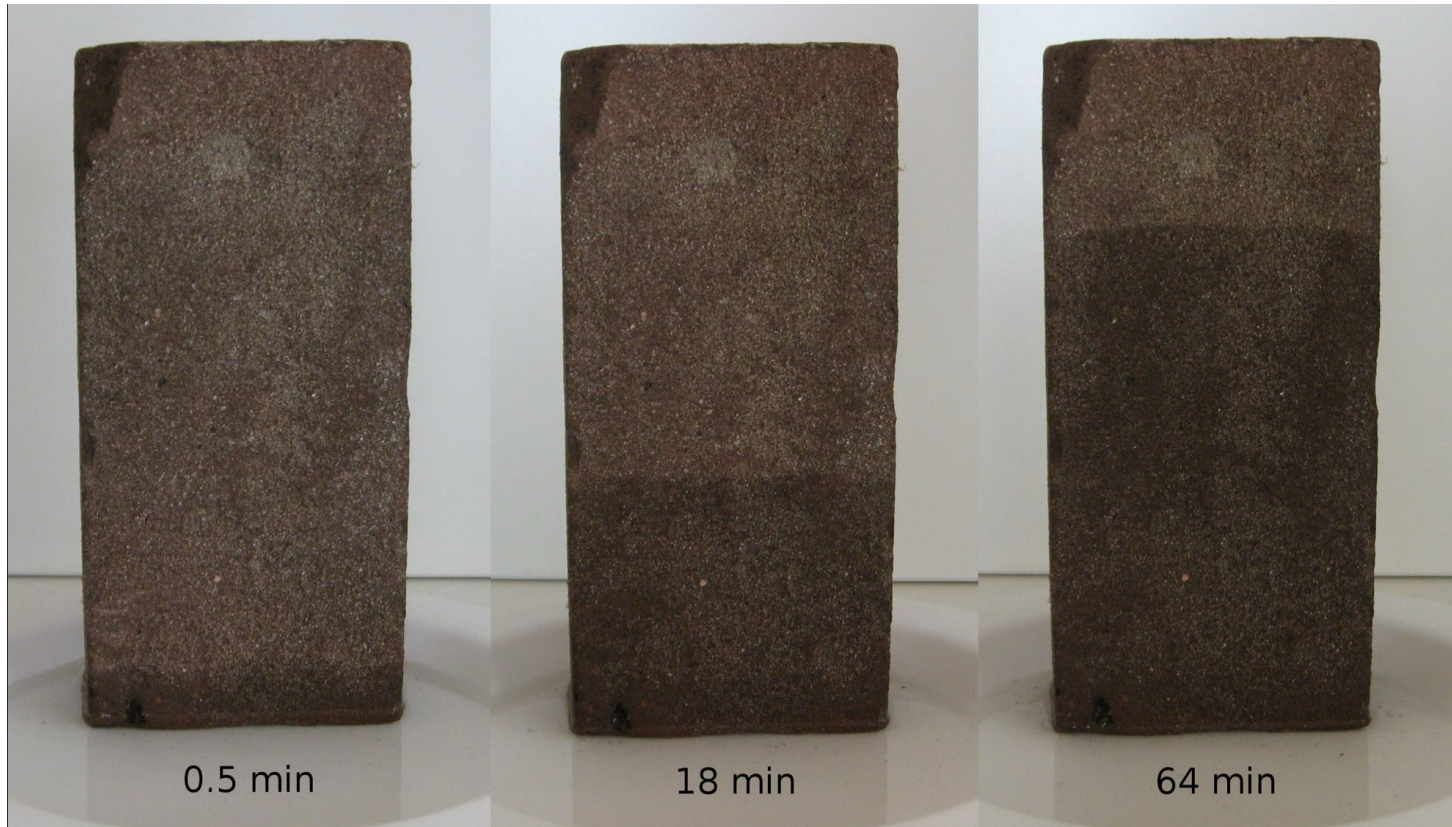
$$p_i - p_e = \frac{2\tau}{r}$$



Approfondimento: Effetto Loto



Approfondimento: Penetrazione capillare solidi (limitata evaporazione)

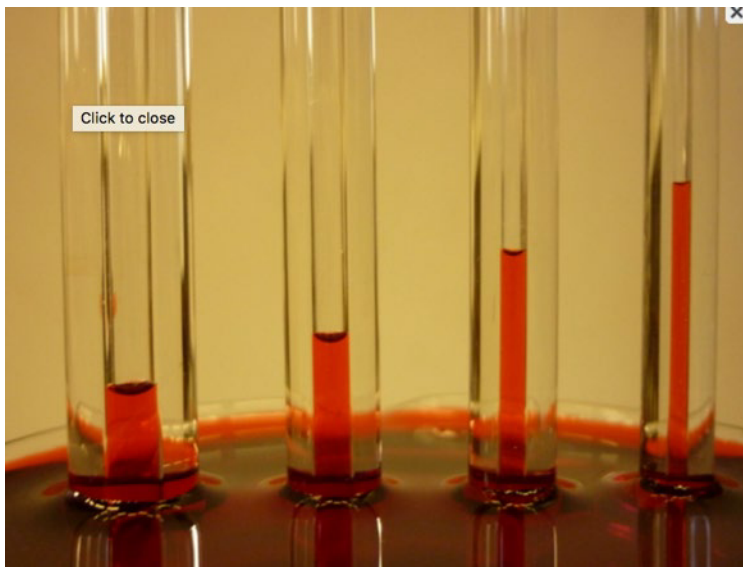


Descritta da formula empirica $V = AS\sqrt{t}$

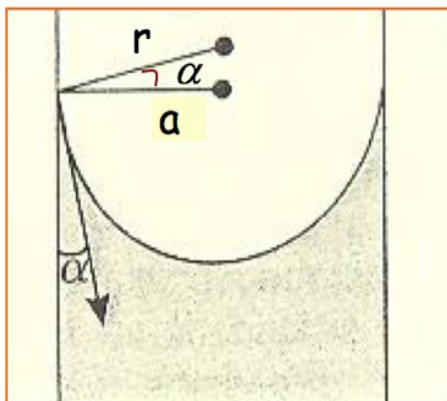
- A Sorbività materiale
- S sezione
- t tempo

Material	Sorptivity (mm·min ^{-1/2})
Aerated concrete	0.50
Gypsum plaster	3.50
Clay brick	1.16
Mortar	0.70
Concrete brick	0.20

Domanda capillarita'



$$a = r \cos \alpha$$



- Q: Il volume di liquid all'interno dei vari capillari varia in base alla sezione?
 - Altezza capillare $h = \frac{2\tau}{\rho g r} = \frac{2\tau \cos \alpha}{\rho g a}$
 - Base $S = \pi a^2$
 - Volume $V = Sh = \frac{2\tau \cos \alpha}{\rho g a} \pi a^2 \propto a$
- Il volume di liquido che entra nel capillare aumenta con il raggio del capillare

Esercizi su pressione di Laplace e capillarità

Esercizio 1

Testo. Quale è la pressione di Laplace per una goccia di mercurio di raggio 1 mm?

Soluzione. Per una goccia sferica con una sola interfaccia liquido-aria, la sovrappressione interna è

$$\Delta p = 2 \gamma / R.$$

Usando per il mercurio $\gamma = 0,485 \text{ N/m}$ e $R = 1 \text{ mm} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, si ottiene

$$\Delta p = 2 (0,485) / (1,0 \cdot 10^{-3}) \text{ Pa} = 9,70 \cdot 10^2 \text{ Pa}.$$

Risultato: $\Delta p = 970 \text{ Pa}$, cioè circa 0,97 kPa.

Esercizio 2

Testo. In un capillare di raggio 0,1 mm, in cui è presente acqua, osservo che il menisco è concavo e con angolo di attacco a 30 gradi. Di quanto è risalita l'acqua?

Soluzione. La risalita capillare si ricava dall'equilibrio tra componente verticale della forza di tensione superficiale e peso della colonna di liquido:

$$h = 2 \gamma \cos(\theta) / (\rho g r).$$

Per l'acqua assumiamo $\gamma = 0,0728 \text{ N/m}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $r = 0,1 \text{ mm} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $\theta = 30 \text{ gradi}$. Dunque

$$h = 2 (0,0728) \cos(30 \text{ gradi}) / [(1000)(9,81)(1,0 \cdot 10^{-4})] \text{ m} = 0,1285 \text{ m}.$$

Risultato: $h = 0,129 \text{ m}$, cioè circa 13 cm.

Esercizio 3

Testo. Un liquido di densità $0,98 \text{ kg/dm}^3$ risale su un capillare di diametro 0,15 mm per 0,98 m. La tensione superficiale del liquido è $0,37 \text{ N/m}$. Quale sarà l'angolo di attacco del menisco al capillare?

Soluzione. Dalla legge della risalita capillare

$$h = 2 \gamma \cos(\theta) / (\rho g r),$$

si isola il coseno dell'angolo:

$$\cos(\theta) = \rho g h r / (2 \gamma).$$

I dati in unità SI sono: $\rho = 0,98 \text{ kg/dm}^3 = 980 \text{ kg/m}^3$, diametro $d = 0,15 \text{ mm}$, quindi $r = d/2 = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, $h = 0,98 \text{ m}$, $\gamma = 0,37 \text{ N/m}$. Pertanto

$$\cos(\theta) = (980)(9,81)(0,98)(7,5 \cdot 10^{-5}) / [2(0,37)] = 0,955.$$

$$\theta = \arccos(0,955) = 17,3 \text{ gradi}.$$

Risultato: $\theta = 17$ gradi circa.

Nota: nei calcoli sono stati usati i valori standard $\gamma_{\text{acqua}} = 0,0728 \text{ N/m}$ e $\gamma_{\text{mercurio}} = 0,485 \text{ N/m}$ a temperatura ambiente.