

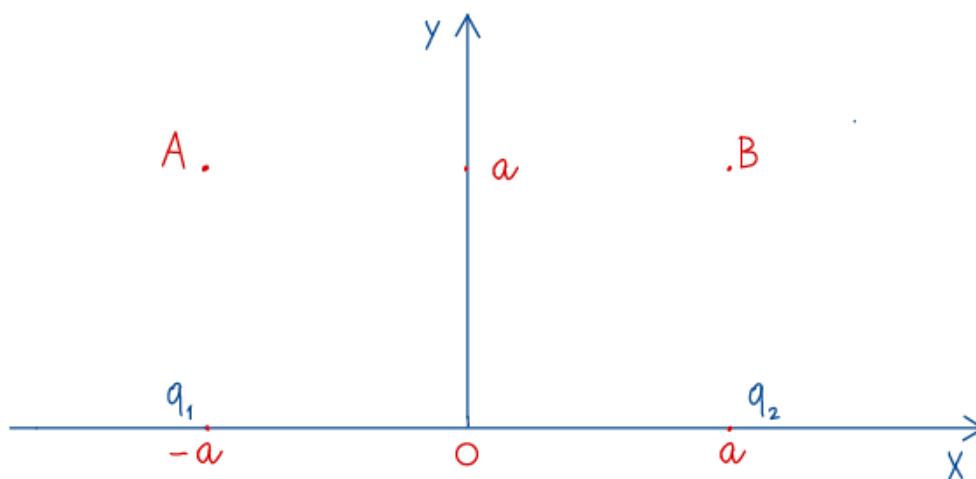
Prova scritta di Fisica Generale 2
Chimica Industriale
Padova - Dipartimento di Fisica - 1 Febbraio 2021

Problema 1

Si consideri il sistema composto dalle cariche $q_1 < 0$ e $q_2 = -q_1/2$, poste sull'asse x e distanti $d = 2a$ (si veda la figura). Determinare

1. il campo elettrostatico nell'origine O del sistema di riferimento equidistante dalle due cariche,
2. la forza esercitata su una carica $q > 0$ posta nel punto $A \equiv (-a, a)$,
3. il lavoro che vien fatto dal campo elettrostatico se la carica q viene spostata dal punto A al punto $B \equiv (a, a)$.

Domanda: si descrivano le principali proprietà dei conduttori.



1. $\vec{E}$ sull'asse x tra $-a$ e a

$\vec{E}_1 \rightarrow -q_1 \leftarrow \vec{E}_1 \leftarrow 0 \leftarrow \cdot q_2$ N.B.: tra $-a$ e a $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ sono diretti verso $-a$
 $q_1 \vec{u}_x = -|q_1| \vec{u}_x$: $\vec{E}_1$ verso $-a$.

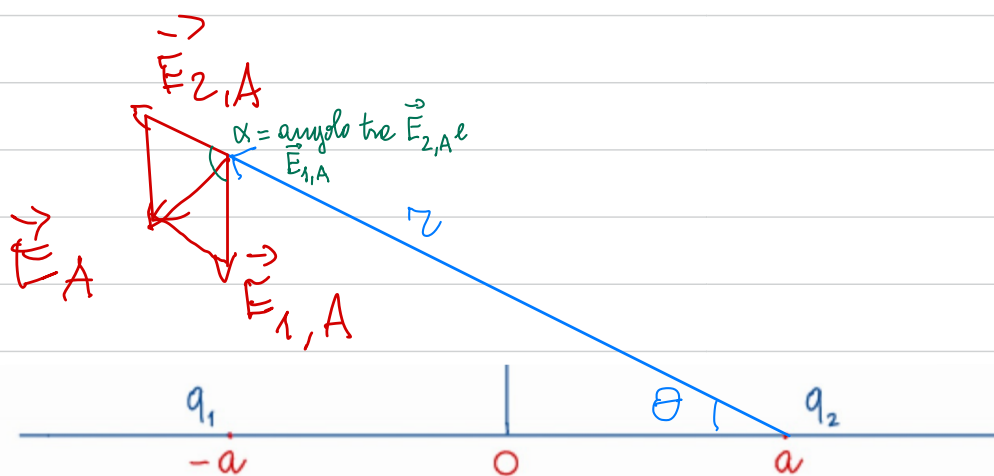
$$\vec{E}(x, 0, 0) = \vec{E}_1(x, 0, 0) + \vec{E}_2(x, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{(a+x)^2} - \frac{q_2}{(x-a)^2} \right] \vec{u}_x$$

Per cui

$$\vec{E}(0, 0, 0) = \frac{q_1 - q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_x$$

ed essendo $q_1 < 0$ e $q_2 > 0$,
 si ha $q_1 - q_2 = -|q_1| - q_2 < 0$.
 Quindi tra $-a$ ed a
 $\vec{E}_{\text{tot}}$ è diretto come $-\vec{u}_x$

2.



$$r = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5} a \quad \cos \theta = \frac{2a}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Si ha quindi

$$\vec{E}_{1,A} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_{2,A} = -\frac{q_2 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 (a\sqrt{5})^2} \vec{u}_x + \frac{q_2 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 (a\sqrt{5})^2} \vec{u}_y$$

$$= -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{2}{5\sqrt{5}} \vec{u}_x + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{1}{5\sqrt{5}} \vec{u}_y$$

da cui segue che la forza richiesta è

$$\vec{F}_A = q(\vec{E}_{1,A} + \vec{E}_{2,A}) \overset{q_2 = -\frac{q_1}{2}}{\downarrow} = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\frac{1}{5\sqrt{5}} \vec{u}_x + \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 5\sqrt{5}}\right) \vec{u}_y \right]$$

3. la d.d.p. tra i punti B e A è

$$V_B - V_A = \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{5}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a} \right) - \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{5}} \right)$$

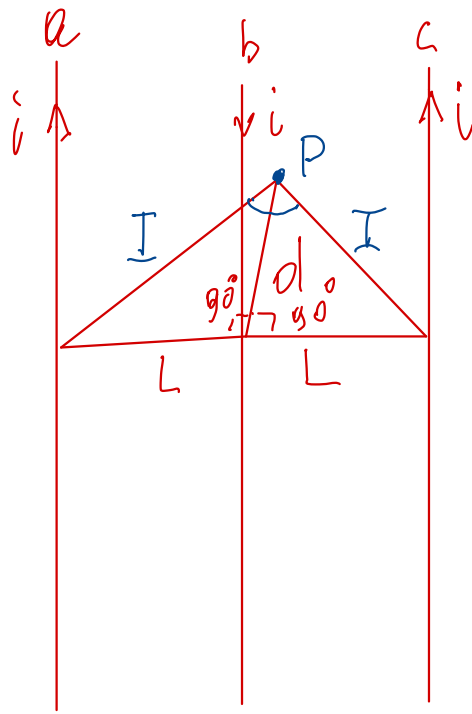
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1 \right) (q_1 - q_2) =$$

$$= \frac{3(1-\sqrt{5})}{\sqrt{5} \cdot 8\pi\epsilon_0 a} q_1$$

da cui segue che il lavoro fatto dal campo per spostare la carica da A a B è

$$W_{AB} = -q(V_B - V_A) = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5} \cdot 8\pi\epsilon_0 a} qq_1$$

Poiché $qq_1 < 0$ si ha $W_{AB} < 0$ per cui è necessario un lavoro esterno al campo.



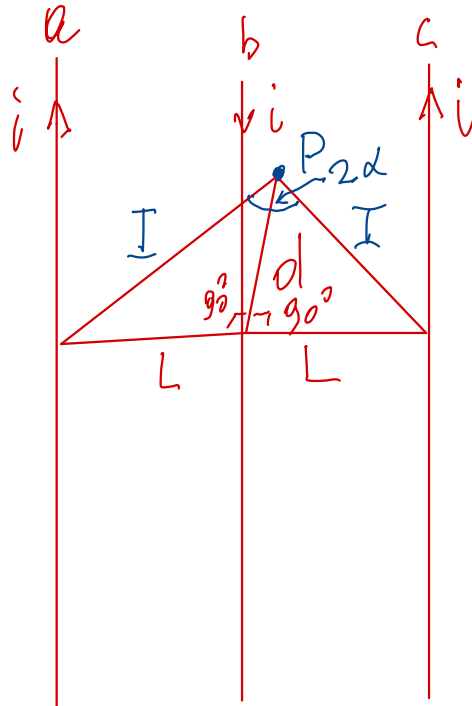
Tre fili paralleli indefiniti a, b, c . Il filo a dista L da b e $2L$ da c .

Ogni filo è percorso dalla stessa corrente i . Le densità di corrente che fluiscono in a e c sono anche equiverse mentre il verso della densità di corrente che fluisce in b è opposto. Determina

1. Il modulo del campo magnetico nel punto P distante d dal filo b ed equidistante rispetto ad a e c .
2. Il modulo della forza per unità di lunghezza esercitata dal filo a sul filo b e dal filo c sul filo b .

3. Il valore che dovrebbe avere la corrente che fluisce nel filo c affinché il modulo della forza totale per unità di lunghezza esercitata sul filo b sia F_b e diretta verso il filo a.

1.



$$I = \sqrt{d^2 + L^2}$$

$$d = I \cos \alpha$$

$$= \sqrt{d^2 + L^2} \cos \alpha$$

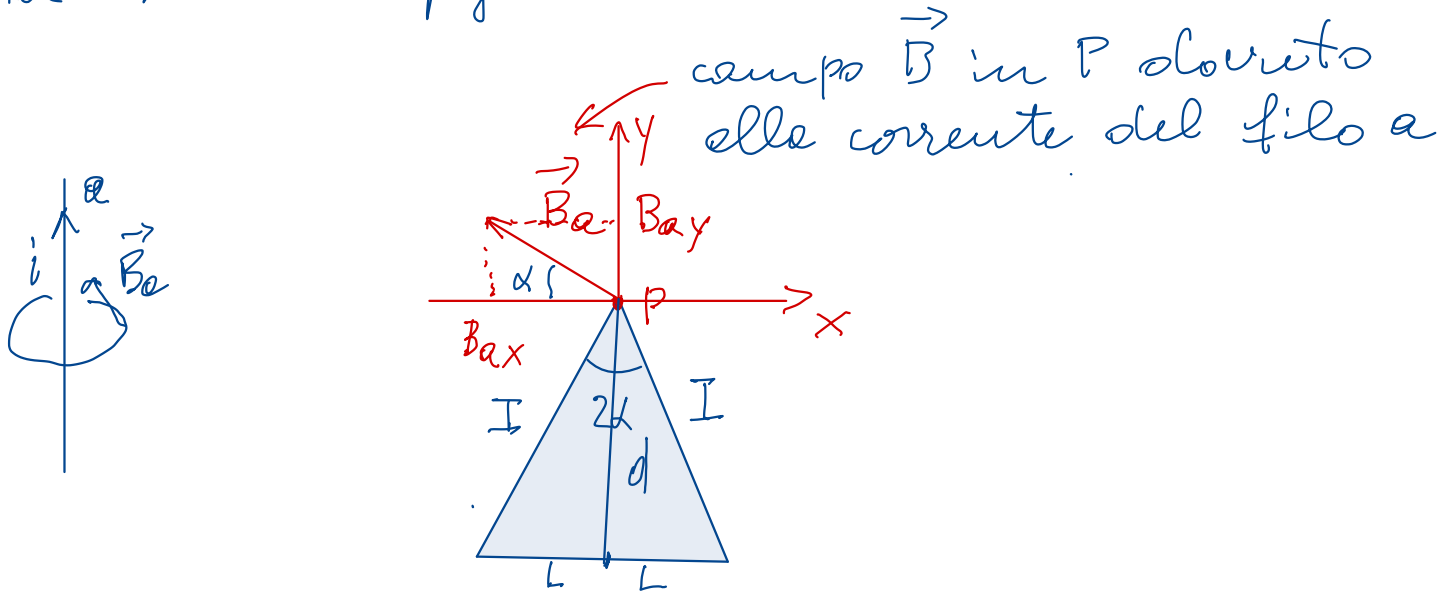
$$L = I \sin \alpha$$

$$= \sqrt{d^2 + L^2} \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{L}{d} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{L}{d}$$

N.B. I conti dipendono dalle scelte del verso delle correnti.

Nel caso delle figure abbiamo

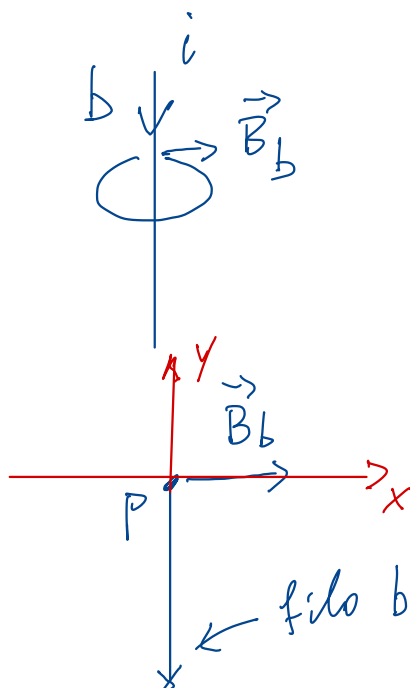


$$\vec{B}_a(P) = -|\vec{B}_a| \cos \alpha \vec{u}_x + |\vec{B}_a| \sin \alpha \vec{u}_y$$

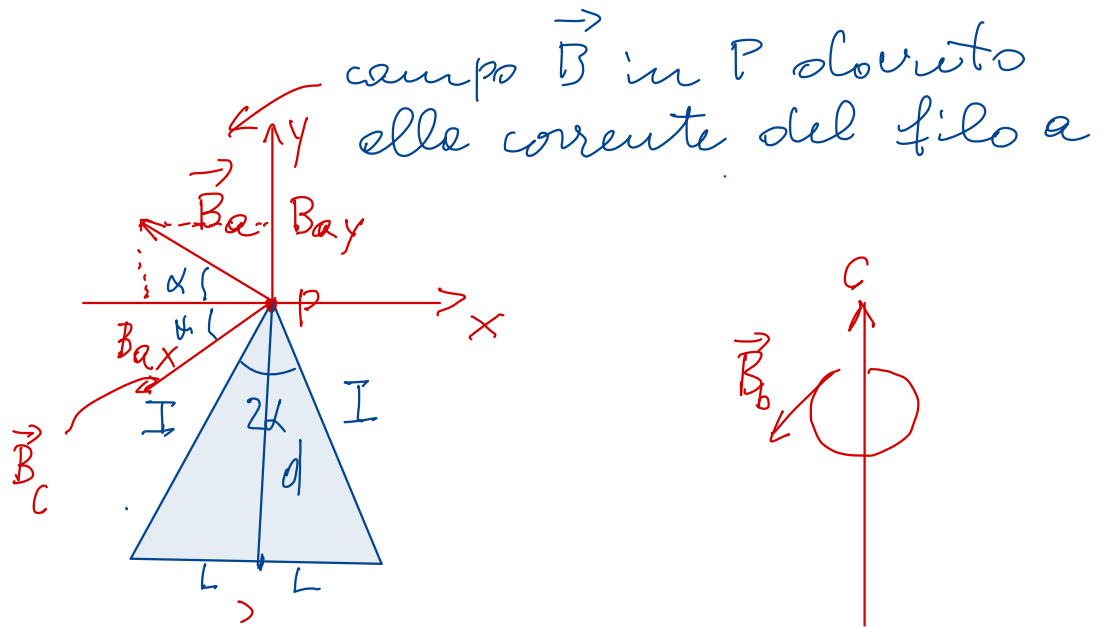
dove $|\vec{B}_a| = \frac{\mu_0 i}{2\pi I} = \frac{\mu_0 \hat{i}}{2\pi \sqrt{d^2 + L^2}}$

Nel caso del campo in P generato dal filo b si ha

quindi



$$\vec{B}_L(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \vec{u}_x$$



Quindi

$$\vec{B}_C = -|\vec{B}_C| \cos \alpha \vec{u}_x - |\vec{B}_C| \sin \alpha \vec{u}_y$$

ovvero

$$|\vec{B}_C| = \frac{\mu_0 i}{2\pi I} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \sqrt{d^2 + L^2}}$$

Quindi il campo magnetico totale in P è

$$\begin{aligned}\vec{B}(P) &= \vec{B}_e(P) + \vec{B}_b(P) + \vec{B}_c(P) \\ &= (-2 |\vec{B}_e| \cos \alpha + |\vec{B}_b|) \vec{u}_x \\ &= \left(-2 \frac{\mu_0 i}{2\pi \sqrt{L^2 + d^2}} \cos \alpha + \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \right) \vec{u}_x\end{aligned}$$

D'altronde

$$\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{L^2 + d^2}}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\vec{B}(P) &= \frac{\mu_0 i}{\pi} \left(-\frac{d}{L^2 + d^2} + \frac{1}{2d} \right) \vec{u}_x \\ &= \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{L^2 - d^2}{2d(L^2 + d^2)} \vec{u}_x\end{aligned}$$

il cui modulo è

$$|\vec{B}(P)| = \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{|L^2 - d^2|}{2d(L^2 + d^2)}$$

2. Come visto a lezione, la forza per unità di lunghezza tra due fili paralleli percorsi da correnti i_1 e i_2 è

$$|\vec{F}| = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi L}$$

dove L è la loro distanza. La forza è attrattiva se i_1 e i_2 sono equiverse, repulsiva se non lo sono.

Nel caso del problema, la forza per unità di lunghezza tra i fili a e b è la stessa che c'è tra b e c. Tale forza è repulsiva e di modulo

$$|\vec{F}_{ab}| = |\vec{F}_{bc}| = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi L}$$

3. le forze per unità di lunghezza totale che agisce sul filo b è nulla; b è respinto con uguale intensità da a e c.

Quindi la variazione di corrente Δi che dovrebbe avere il filo c affinché le forze totali per unità di lunghezza sia pari a $|\vec{F}_b|$ e diretta verso il filo e, deve soddisfare la relazione

$$|\vec{F}_b| = \frac{\mu_0(i + \Delta i)i}{2\pi L} - \frac{\mu_0 i^2}{2\pi L} = \frac{\mu_0 i}{2\pi L} \Delta i$$

da cui

$$\Delta i = \frac{2\pi L}{\mu_0 i} \vec{F}_b$$

SIMMETRIA $\vec{E} - \vec{B}$

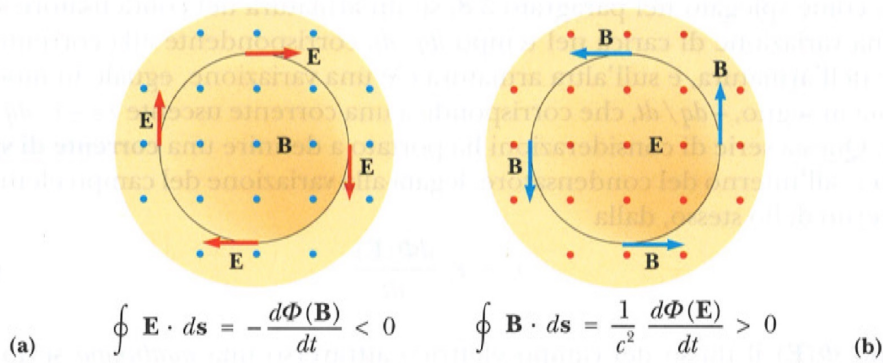
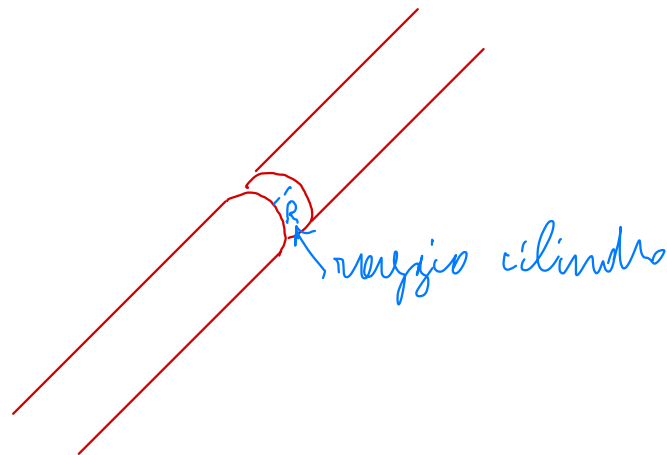


Figura 8.32

Campi elettrici indotti da variazioni di campo magnetico nel tempo (a) e campi magnetici indotti da variazioni di campo elettrico nel tempo (b).

Si consideri una lunga sbarra conduttrice cilindrica di raggio R con una piccola fessura. La sbarra è attraversata da una corrente $i = \alpha t$, con α una costante. Al tempo $t=0$ non c'è alcuna carica sulle facce del taglio.



Determinare

1. Modulo della carica sulle facce del taglio a $t \geq 0$
2. $\vec{E}$ nell'intercapedine a $t \geq 0$
3. $\vec{B}$ all'interno dell'intercapedine
4. $\vec{B}$ all'interno della sbarra

$$1. \quad q = \int_0^t \alpha t' dt' = \frac{\alpha t^2}{2}$$

2. le due facce giocano il ruolo di armature di un condensatore piano. Quindi $|\vec{E}| = \sigma/\epsilon_0$, dove

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

quindi

$$\vec{E} = \frac{\alpha t^2}{2\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_n$$

dove $\vec{u}_n$ è il versore perpendicolare al disco dove

si accumula la carica q (l'altra faccia ha carica $-q$. Si noti che il segno di q dipende dal segno di α).

3. Consideriamo l'equazione di Ampère - Maxwell

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_{\Sigma}(\vec{E})}{dt} \right)$$

dove Σ è qualsiasi superficie che abbia bordo γ (con orientamenti di γ e $\vec{\Sigma}$ legati dalle regole della mano destra). Nel caso in esame scegliamo γ essere la circonferenza di raggio r , denotata S_r^1 . Il flusso di $\vec{E}$ è

Σ_r : disco di raggio r

$$\Phi_{\Sigma_r}(\vec{E}) := \int_{\Sigma_r} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \pi r^2 E = \frac{\alpha t^2 r^2}{2\epsilon_0 R^2}$$

All'interno dell'intercapedine la corrente di conduzione è nulla, inoltre

$$\oint_{S_r^1} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B$$

per cui il campo $\vec{B}$ all'interno delle fessure e a distanza r dall'asse del conduttore è

$$B = \frac{1}{2\pi r} \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi r^2 \alpha t^2}{2\pi \epsilon_0 R^2} \right)$$

cioè

$$B = \frac{\mu_0 \alpha t}{2\pi R^2} r$$

diretto tangenzialmente a S_r^1 .

4. All'interno della sbarra non c'è corrente di spostamento. Inoltre, la corrente all'interno del cilindro di raggio $r \leq R$ è

$$i(r) = i \frac{r^2}{R^2}$$

Infatti

$$i(r) = \int_{\Sigma_r} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} = \pi r^2 j \rightarrow i(R) = \pi R^2 j$$

$$\rightarrow j = \frac{i(R)}{\pi R^2} \rightarrow i(r) = \frac{\pi r^2 i(R)}{\pi R^2} = i \frac{r^2}{R^2} = \alpha t \frac{r^2}{R^2}$$

Quindi, poiché all'interno della sbarra non c'è la corrente di spostamento, si ha

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R} i(r) = \frac{\mu_0 \alpha t}{2\pi R^2} r$$

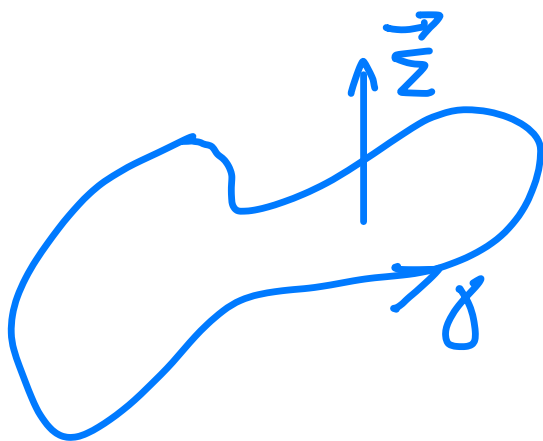
che coincide con il campo $\vec{B}$ interno alle fessure, infatti si ha che la corrente di spostamento e di conduzione coincidono: $i_s = i_c$.

LEZIONE 27

9.05.2022

COMMENTI SUL FLUSSO DEI CAMPI VETTORIALI

Come visto più volte, mentre il verso dell'orientazione di una superficie chiusa è sempre scelto esterno ed esso, questo non è fissato nel caso in cui la superficie sia aperta. Abbiamo comunque osservato che, geometricamente, il verso di $\vec{\Sigma}$ è collegato con quello del suo bordo $\gamma = \partial \Sigma$ (che può anche essere espresso nella forma $\gamma = \partial \vec{\Sigma}$, cosicché anche γ ha il verso fissato), tramite la regola della mano destra. Quindi



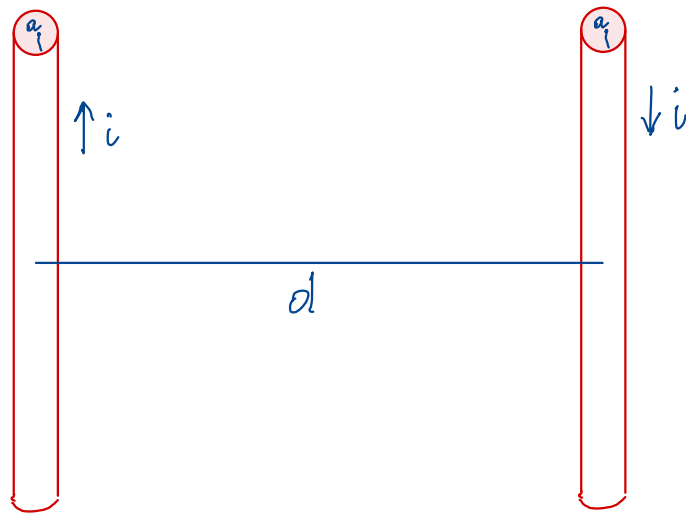
Ciò, per esempio, fissa il segno del membro destro nel teorema di Stokes

$$\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{s} = + \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{\Sigma}$$

Abbiamo anche visto che, anche nel caso di superfici aperte, la scelta del verso di $\vec{\Sigma}$ non influisce sulle osservabili (cioè misurabili) fisiche. In proposito abbiamo visto l'esempio della legge di Faraday: il verso della corrente è indipendente da tale scelta.

Va sottolineato che spesso nei problemi in cui è richiesto di calcolare il flusso di un vettore attraverso una superficie aperta non è specificata l'orientazione di questa, tutte e due le soluzioni sono considerate valide.

Fili paralleli indefiniti percorsi da correnti opposte



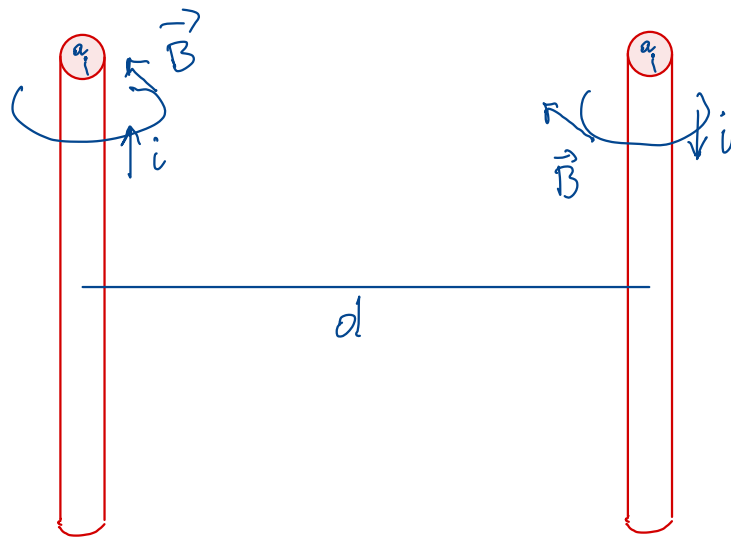
d = distanza tra gli assi dei due conduttori

a = raggio della base cilindrica

Determinare

1. $\vec{B}$ in tutto il piano delimitato dai conduttori
2. $\vec{E}$ tale che una particella carica che si trova tra i due conduttori, con velocità $\vec{v}$ perpendicolare a $\vec{B}$, non subisca in quell'istante alcuna accelerazione
3. Il flusso di $\vec{B}$ attraverso la superficie dei due conduttori per una porzione di lunghezza l

$\vec{B}$ entrambi entranti nel foglio



1.

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right)$$

N.B. esternamente ai fili il valore del

campo magnetico è lo stesso che si avrebbe se il conduttore fosse unidimensionale. È la versione analogica di quanto succede con una distribuzione di carica su simmetrie sferica: esternamente alla sfera, il campo elettrico coincide con quello generato da una carica puntiforme, pari a quella corrispondente alla carica totale della distribuzione sferica.

2. la carica è soggetta alle forze di Lorentz e a quella coulombiana

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$|\vec{v} \times \vec{B}| = vB \rightarrow$$

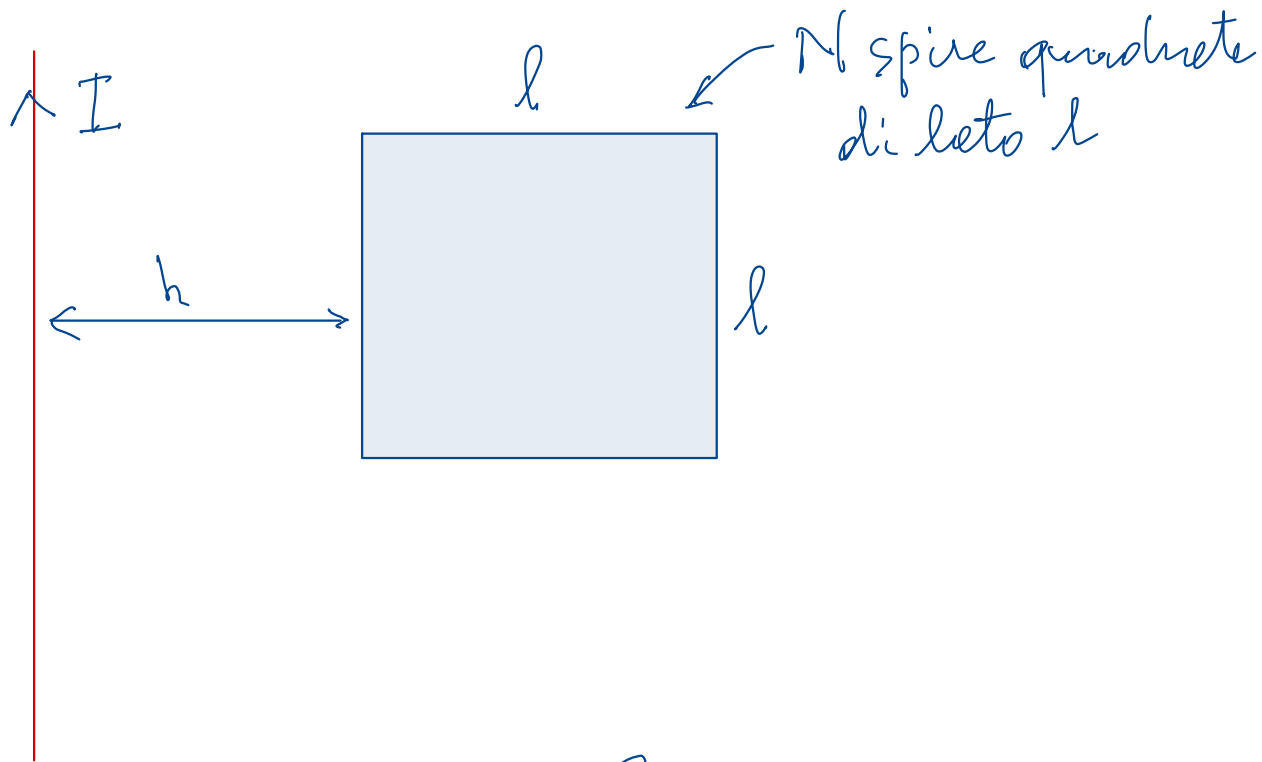
$$E = -vB$$

3.

$$\Phi(B) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int B d\Sigma = \int_0^l dy \int_a^{d-a} dx B$$

$$= \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \int_a^{d-a} dx \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) = \frac{\mu_0 i l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

Una bobina di resistenza R , composta da N spire di lato l , si trova ad una distanza h da un filo infinito percorso da una corrente stazionaria

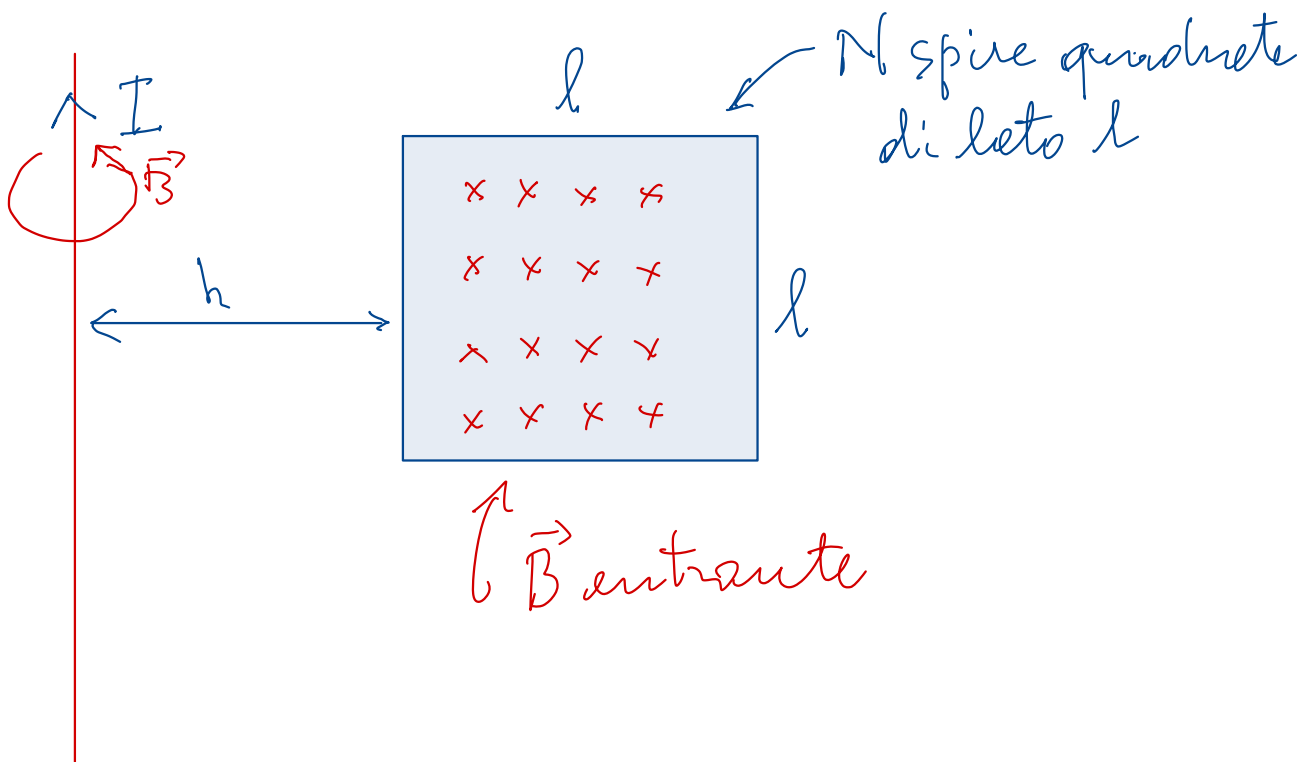


→
1. B attraverso la bobina?

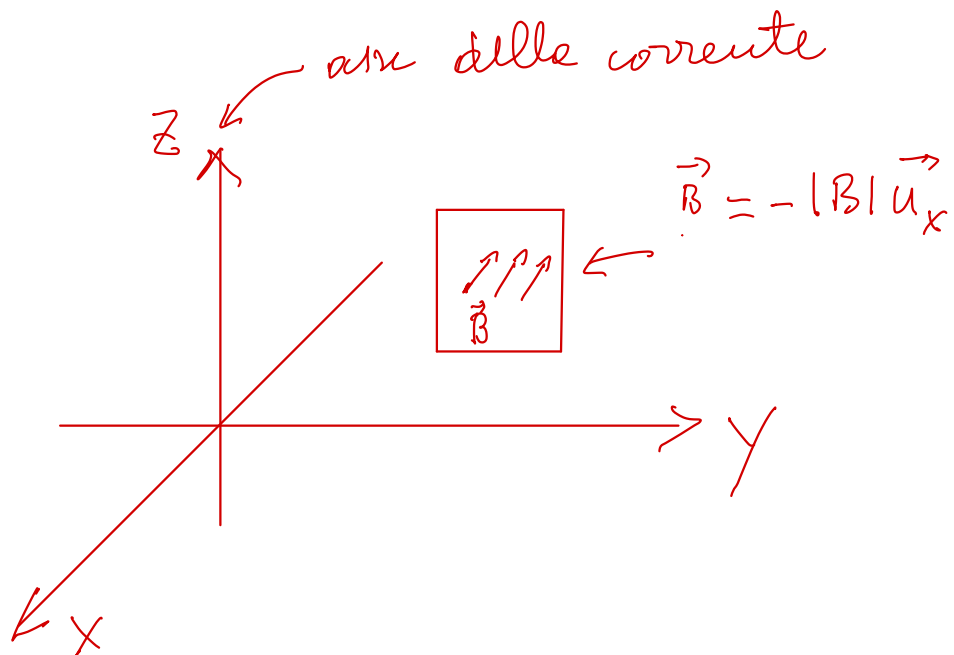
2. Calcolare la variazione di flusso e la corrente indotta nella bobina se quest'ultima si allontana dal filo con velocità costante

$$v = \frac{dh}{dt}$$

3. Determinare la forza da applicare alla bobina affinché questa mantenga la velocità costante.



1. $B(y) = \mu_0 \frac{I}{2\pi y}$. Si noti che l' direzione
 e verso di $B(x)$ all'interno della bobina è
 $-\vec{u}_x$:



$$\vec{B}(y) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \vec{u}_x$$

$$\vec{B}(0, y, z)$$

la bobina è nel piano y - z . Inoltre: $\vec{B}$ non dipende da z .

$$\Phi(\vec{B}) = N \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = N \int_{\Sigma} B d\Sigma = N \int_h^{h+l} B l dy$$

$$= \frac{\mu_0 N I l}{2\pi} \ln \frac{h+l}{h}$$

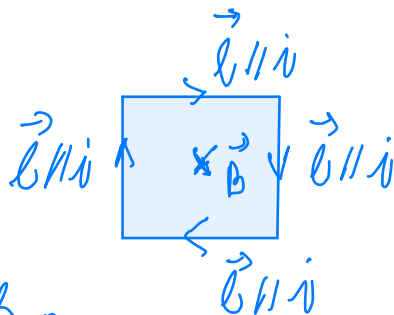
N.B. Abbiamo scelto l'orientazione di $\vec{\Sigma}$ come quella di $\vec{B}$, quindi $\rightarrow \vec{u}_x$

2. la corrente indotta dalla variazione di flusso dovuta allo spostamento delle spine è

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I l^2 N^2 v}{2\pi R h(h+l)} \quad (*)$$

Si ricordi che il verso di $\vec{l}$ è quello associato, tramite regola della mano destra, a quello di $\vec{\Sigma}$. Se si cambia la scelta dell'orientazione di $\vec{\Sigma}$, allora cambia anche il verso di $\vec{l}$. Come spiegato sia a lezione che nelle note, il verso di i non dipende da queste scelte: se si cambia il verso di $\vec{\Sigma}$ allora cambia il segno di Φ e quindi il segno di $\frac{d\Phi}{dt}$. D'altronde il verso di i è quello di $\vec{l}$ se $-\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} > 0$ e opposto a quello di $\vec{l}$ se $-\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} < 0$; quindi il verso di i rimane invariato.

Nel caso in questione il verso di $\vec{\Sigma}$ è lo stesso di $\vec{B}$, quindi il verso di $\vec{l}$ è orario per chi guarda il foglio



Poiché (*) mostra che $i > 0$, segue che i ha lo stesso verso di $\vec{l}$.

$\vec{B} \parallel \vec{\Sigma}$ (si noti che $\Phi_{\vec{\Sigma}}(\vec{B}) :=$

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\Sigma} B d\Sigma$$

che è integrale di quantità positive, quando $\Phi_{\vec{\Sigma}}(\vec{B}) > 0$)

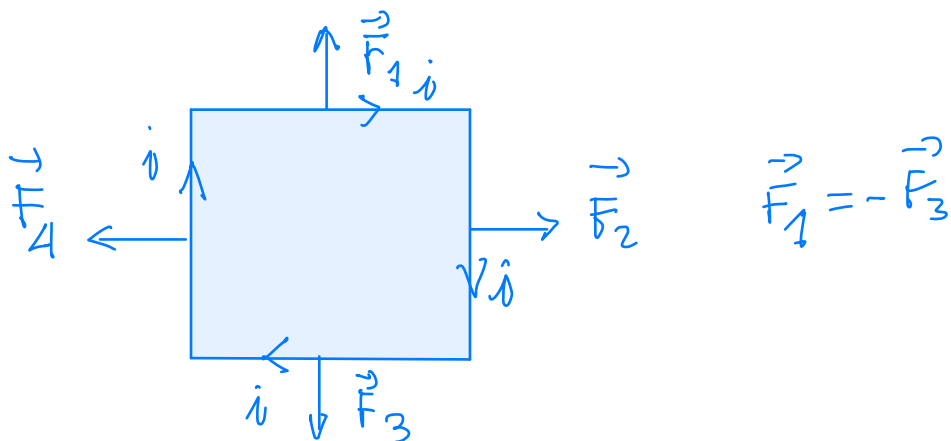
3. Un conduttore percorso da corrente in un campo magnetico $\vec{B}$ è soggetto alla forza (II legge di Laplace)

$$\vec{F} = -i \vec{l} \times \vec{B} \quad **)$$

Si noti che per convenzione il verso di $\vec{l}$ in **) è quello della corrente i . Questo significa che se per il verso di $\vec{z}$ avessimo scelto quello opposto al verso di $\vec{B}$, allora il vettore $\vec{l}$ in **) sarebbe l'opposto di quello fissato, tramite regola della mano destra, da $\vec{z}$.

Quindi, per evitare possibili guasti, sarebbe stato utile usare due simboli diversi per il vettore $\vec{l}$ in **) e il vettore $\vec{l}$ usato nelle leggi di Faraday.

Utilizzando la regola della mano destra, si evince che direzioni e versi delle forze stabilite dalla **) sono



Perché $\vec{B}$ non dipende da z (e neppure da x), segue che $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ hanno la stessa intensità e verso opposti. Ciò implica che l'effetto totale di $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ sulla dinamica della bobina è nullo.
 Rimane da calcolare $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$. Dalle ***) si ha

$$\vec{F}_4 = -i l B(h) \vec{u}_y = -\frac{\mu_0 I l^3 N v}{2\pi R h(l+h)} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi h} \right) \vec{u}_y$$

$B(h)$

$$\vec{F}_2 = i l B(h+l) \vec{u}_y = \frac{\mu_0 I l^3 N v}{2\pi R h(l+h)} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi (l+h)} \right) \vec{u}_y$$

$B(h+l)$

Si ha quindi che la forza totale che agisce sulla bobina è

$$\vec{F}_4 + \vec{F}_2 = -\frac{\mu_0^2 I^2 l^3 N v}{(2\pi)^2 R h(l+h)} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{l+h} \right) \vec{u}_y = -\frac{\mu_0^2 I^2 l^4 N v}{(2\pi)^2 R h^2 (h+l)^2} \vec{u}_y \quad ***$$

per cui affinché la bobina mantenga la velocità $\vec{v}$, è necessario applicare ad essa la forza $-\vec{F}_4 - \vec{F}_2$. Si noti che il modulo di $-\vec{F}_4 - \vec{F}_2$ è $\frac{F_4 - F_2}{|\vec{F}_4| |\vec{F}_2|}$.

$\overleftarrow{\vec{F}_4 + \vec{F}_2} = \overleftarrow{\vec{F}_4} + \overleftarrow{\vec{F}_2}$

$\vec{F}_4 - \vec{F}_2$ è la sua lunghezza che ha modulo $F_4 - F_2$

$\vec{F}_4 - \vec{F}_2$ è la sua lunghezza che ha modulo $F_4 - F_2$

Notiamo infine che, in accordo con la legge di Lenz, il sistema si oppone alle variazioni per cui la bobina subisce una forza che tende a ridurre $\vec{v}$.