

LEZIONE 31

6.05.2026

Esercizio: il caso di un'onda e.m. piana armonica

Energie delle onde e.m. Vettore di Poynting

Onde sferiche

Potenza associata alle onde e.m.

Spettro delle onde e.m.

ESERCIZIO

Scrivere l'espressione analitica di un'onda e.m. piana armonica, linearmente polarizzata lungo l'asse y , di ampiezza

$$E_{0y} = 10^3 \frac{V}{m}$$

e frequenza

$$\nu = 7.5 \cdot 10^8 \text{ Hz}$$

che si propaga nel vuoto lungo l'asse x .

Si ha

$$\vec{E} = E_y \vec{u}_y = E_{0y} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y$$

e

$$\vec{B} = B_z \vec{u}_z = \frac{E_{0y}}{c} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

D'altronde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c} \nu = 15.7 \text{ m}^{-1}$$

e

$$\omega = kc = 2\pi \nu = 4.71 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

da cui

$$\vec{E} = 10^3 \cos(15.7 \text{ m}^{-1} x - 4.71 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1} t) \frac{\text{V}}{\text{m}} \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \underbrace{3.3 \cdot 10^{-6}}_{\frac{1}{c} \approx (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^{-1} \approx 3.3 \cdot 10^{-6} \text{ s/m}} 10^3 \cos(15.7 \text{ m}^{-1} x - 4.71 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1} t) \text{ T} \vec{u}_z$$

Energie di un'onda piana. Vettore di Poynting.

Come visto, la densità di energia del campo elettrico e di quello magnetico è data da $u_e = \epsilon_0 E^2 / 2$ e $u_m = B^2 / (2\mu_0)$.

Per un'onda piana armonica si ha $B = E/c$, per cui

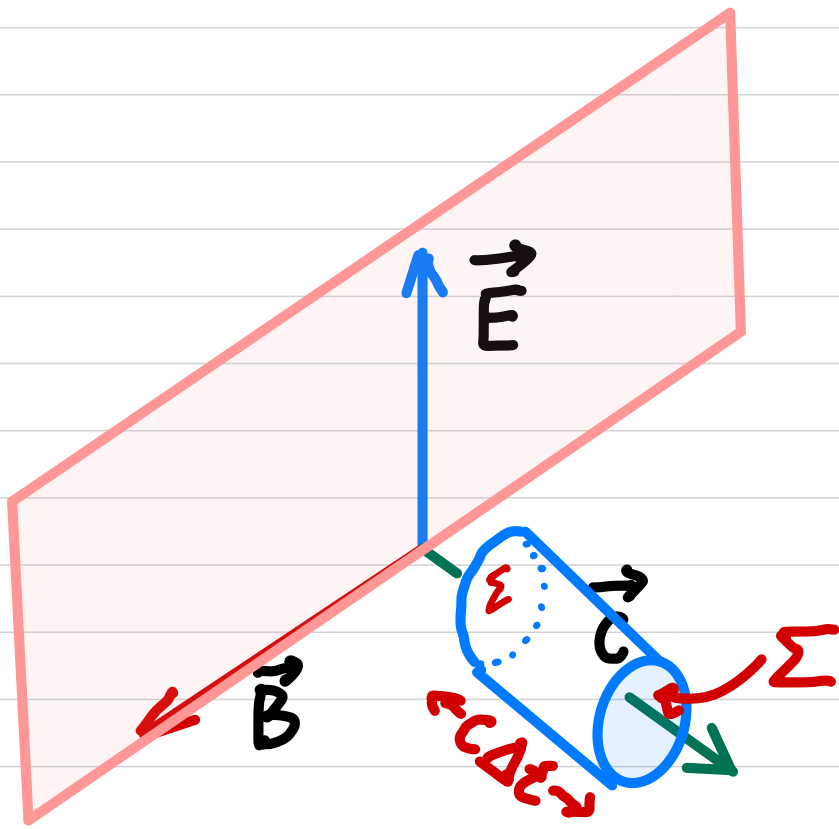
$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = u_e$$

e la densità d'energia dell'onda piana armonica è

$$u = 2u_e = \epsilon_0 E^2$$

relazione che si estende non solo alle onde piane, bensì anche a qualsiasi onda e.m.

Consideriamo un cilindro di altezza $c\Delta t$ e sia Σ l'area di ognuno dei due suoi dischi



Nell'intervallo di tempo infinitesimo dt passa, attraverso Σ , l'energia contenuta nel volume $\Sigma c dt$, cioè

$$dU = u \Sigma c dt = \epsilon_0 E^2 c \Sigma dt$$

da cui segue che la potenza che attraversa Σ è

$$P := \frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E^2 c \Sigma \quad 20)$$

Definendo il **vettore di Poynting**

$$\vec{S} := \epsilon_0 E^2 \vec{c}$$

la 20) si esprime come il flusso di $\vec{S}$ attraverso Σ

$$P = \oint_{\Sigma} (\vec{S}) = S \Sigma$$

Inoltre, utilizzando $\vec{c} = c \vec{u}_x$, e il fatto che $\vec{E} \times \vec{B}$ è parallelo alla direzione di propagazione dell'onda e.m., cioè $\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{c} \vec{u}_x$, si ha

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Unità di misura di $\vec{S}$: $\frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$.

Nel caso di un'onda piana armonica polarizzata linearmente, si ha

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y$$

per cui

$$S = \epsilon_0 E \dot{C} = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Poiché generalmente la pulsazione ω delle onde e.m. è molto alta $\sim 10^{15}$ rad/s, gli strumenti di misura determinano solo il valor medio dell'energia. Introduciamo quindi il valor medio del modulo del vettore di Poynting

$$S_m = \epsilon_0 c E_m^2 = \frac{\epsilon_0 c}{t} \int_0^t E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) dt \approx \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \quad (1)$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatta l'approssimazione per cui $t = \frac{2\pi N}{\omega}$, $N \in \mathbb{N}$, che risulta valida per $N \gg 1$.

Inoltre, se è usato:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}$$



e definiranno l'intensità dell'onda e.m.
piana

$$I := S_m = \epsilon_0 c E_{\text{eff}}^2$$

dove $E_{\text{eff}} := E_0/\sqrt{2}$ è il valore efficace sinusoidale. Tale concetto è definito per qualsiasi grandezza sinusoidale: data l'ampiezza A dell'onda sinusoidale, il suo valore efficace è $A_{\text{eff}} = A_0/\sqrt{2}$. Tale valore è utile proprio nei casi in cui vi siano grandi oscillazioni, per cui, come nel caso in esame, l'apparato sperimentale non è in grado di misurarle.

In proposito si osservi che per tempi sufficientemente grandi, la 21) contiene moltissimi periodi T dell'onda, per cui, con ottima approssimazione, la dipendenza delle 21) da t è trascurabile

perché $t \gg T$.

Intensità delle onde e.m. sferiche

Le sorgenti emettono onde elettromagnetiche che si propagano in tutte le direzioni, mentre finora abbiamo considerato un'unica direzione di propagazione.

ONDE SFERICHE

La sorgente emette onde e.m. con le stesse caratteristiche in tutte le direzioni e con velocità c

https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation#/media/File:Spherical_wave2.gif

https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation#/media/File:Spherical_Wave.gif

Nel caso di onde armoniche sferiche

$$E(r, t) = E_0(r) \cos(kr - \omega t)$$

dove r è la distanza dalla sorgente.

Fronti d'onda: $kr - \omega t$ costante

Come nel caso delle onde piane, anche in questo caso, fissate una direzione $\vec{r}$, i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari tra loro e perpendicolari ad $\vec{r}$, e quindi a $\vec{c}$. Inoltre $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ è parallelo a $\vec{c}$.

Anche in questo caso si ha $S_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$, per cui la potenza media che attraversa Σ è

$$P = \oint_{\Sigma} (\vec{S} \cdot \vec{n}) = S_m \Sigma = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2(r) 4\pi r^2$$

Poiché la potenza media originata dalla sorgente, è chiaro che questa deve essere ovunque la stessa, per cui P deve essere indipendente da r . Questo implica che

$E_0(r)$ è proporzionale a $1/r$

Ponendo

$$E_0(r) = \frac{E_0}{r}$$

(si noti che E_0 non ha le dimensioni di $E_0(r)$), si ha

$$E(r, t) = \frac{E_0}{r} \cos(kr - \omega t)$$

analogamente al caso dell'onda piana, si ha anche

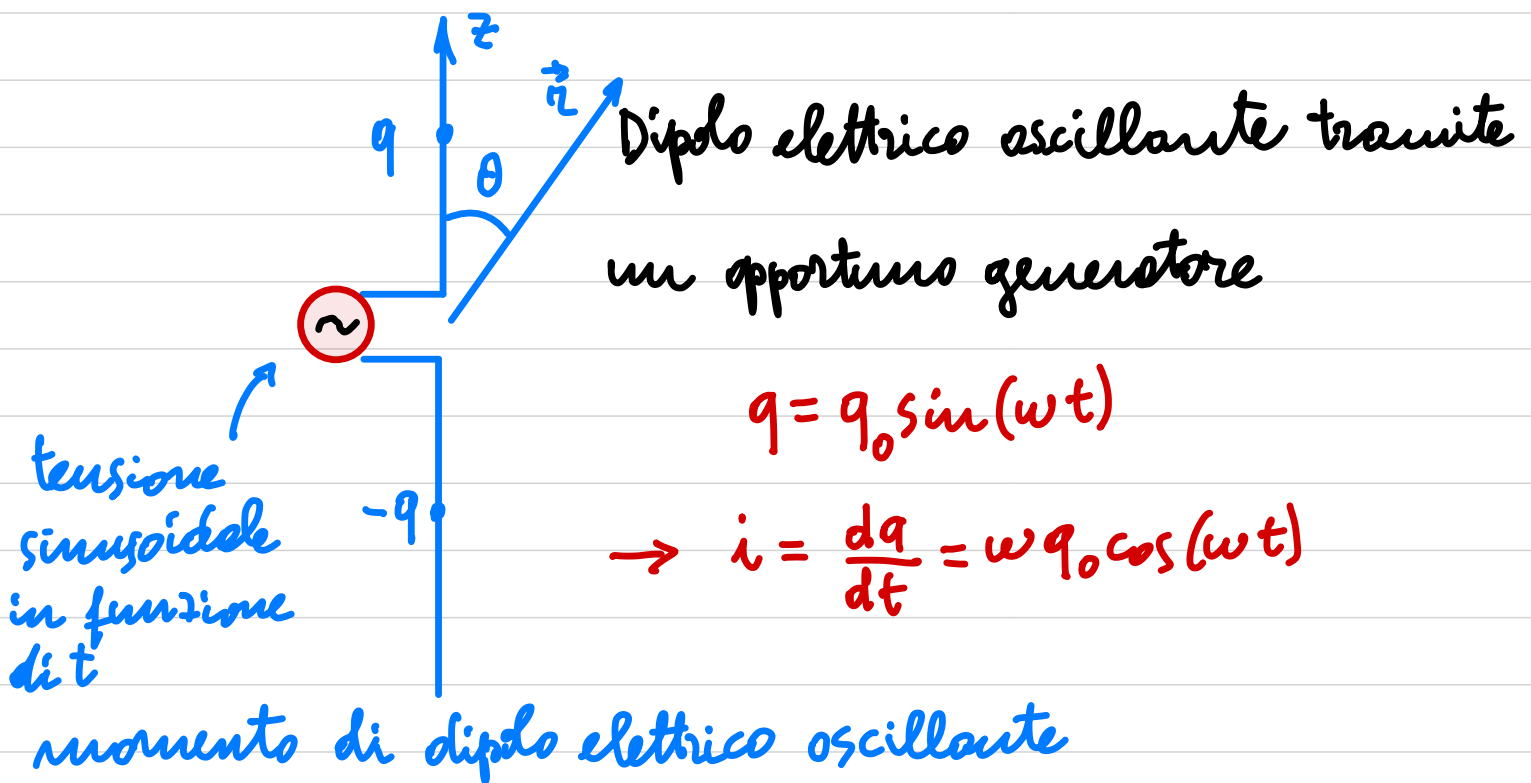
$$B(r, t) = \frac{E_0}{cr} \cos(kr - \omega t)$$

da cui segue che l'intensità dell'onda è proporzionale a $1/r^2$

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \frac{E_0^2}{r^2}$$

Radiazione e.m. prodotta da un dipolo elettrico oscillante

Una carica accelerata emette onde e.m. e quindi irradia energia. Di seguito accenniamo brevemente un esempio.



$$p = qa = q_0 a \sin(\omega t) = p_0 \sin(\omega t)$$

che è parallelo all'asse z . Si può dimostrare che a distanza $r \gg a$, si propaga un'onda magnetica trasversale con

$$E = \frac{P_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2}{r} \sin(kr - \omega t)$$

$$B = \frac{E}{c}$$

Antenna (copiare e incollare questo URL)

https://it.wikibooks.org/wiki/Fisica_classica/Spettro_delle_onde_elettromagnetiche#/media/File:Dipole_xmting_antenna_animation_4_408x318x150ms.gif

Spettro delle onde elettromagnetiche

$$c = \lambda \nu \rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

Alte frequenza = piccole lunghezze d'onda

Basse frequenza = grandi lunghezze d'onda

λ massimo: diametro dell'universo $8.8 \cdot 10^{26} \text{ m}$

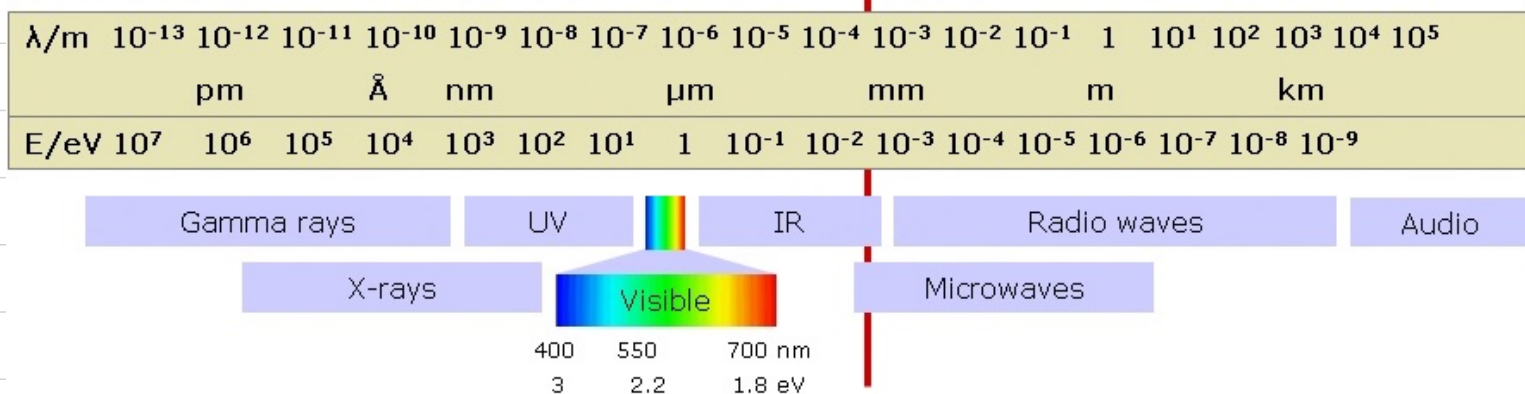
λ minimo: lunghezza di Planck $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 10^{-35} \text{ m}$

la luce è composta da fotoni, la cui energia è

$$E = h\nu$$

The Electromagnetic Spectrum

$k_B T_R$ - The thermal energy at room temperature



Tipo di radiazione elettromagnetica		Frequenza	Lunghezza d'onda
LOW	LF	30 kHz – 300 kHz	10 km – 1 km
MEDIUM	MF	300 kHz – 3 MHz	1 km – 100 m
HIGH	HF	3 MHz – 30 MHz	100 m – 10 m
VERY HIGH	VHF	30 MHz – 300 MHz	10 m – 1 m
ULTRA HIGH	UHF	300 MHz – 3 GHz	1 m – 10 cm
Microonde		3 GHz – 300 GHz	10 cm – 1 mm
Infrarossi		300 GHz – 428 THz	1 mm – 780 nm
Luce visibile		428 THz – 749 THz	780 nm – 380 nm
Ultravioletti		749 THz – 30 PHz	380 nm – 10 nm
Raggi X		30 PHz – 300 EHz	10 nm – 1 pm
Raggi gamma		> 300 EHz	< 1 pm