

LEZIONE 30

5.05.2026

Soluzione delle equazioni di Maxwell senza cariche e correnti

la luce come onde elettromagnetiche

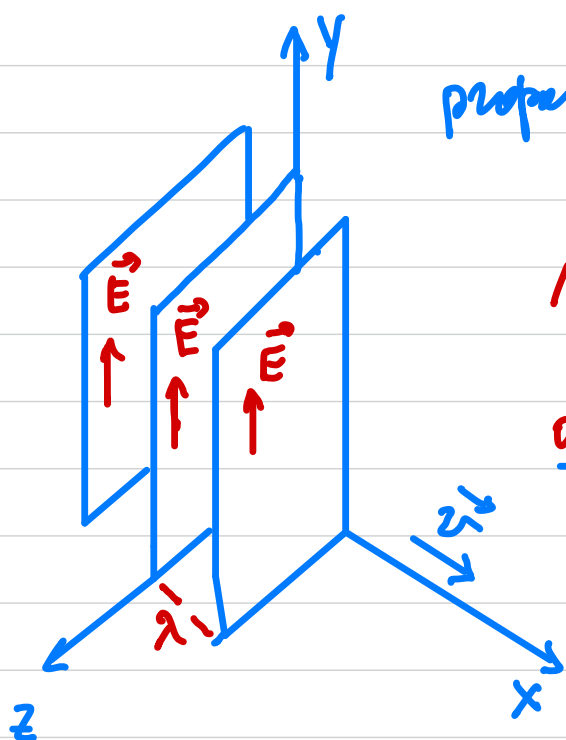
Onde e.m. polarizzate linearmente

Onde e.m. in mezzi trasparenti

Più avanti mostreremo la seguente proprietà

$\vec{E}(x,t)$ È PERPENDICOLARE ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE $\vec{x}$

propagazione del fronte d'onda



Nei punti del piano, la fase dell'onda $\phi = kx - \omega t$, e quindi $\vec{E}$,

ha gli stessi valori. Negli altri piani rappresentati nel fronte d'onda, si ha lo stesso valore di $\vec{E}$, per cui le loro fasi differiscono per un multiplo di 2π :

$$\phi' = \phi + 2K\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$$

Il concetto di fronte d'onda si estende al caso di onde non piane:

Il fronte d'onda è la superficie nei cui punti la fase ad un dato istante è la stessa

Esempio: fronte d'onda circolare

it.wikipedia.org/wiki/Fronte_d'onda

Esistenza delle onde e.m. piane. Maxwell: le onde piane sono soluzioni delle eq. di Maxwell nel vuoto!

$$\text{I} \quad \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$\text{II} \quad \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$\text{III} \quad \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial \Phi_E(\vec{0})}{\partial t}$$

$$\text{IV} \quad \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi_E(\vec{E})}{\partial t}$$

Hertz (1888) provò sperimentalmente l'esistenza delle onde e.m.

Per mostrare che le onde e.m. piane descritte precedentemente soddisfano le eq. di Maxwell nel vuoto, iniziamo con l'osservare che se la dipendenza spaziale di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ è solo attraverso x , allora si hanno le seguenti equazioni vettoriali

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = \vec{0}$$

D'altronde, le equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

implicano

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

e le altre due eq. di Maxwell danno

PS Si noti che ogni eq. vettoriale corrisponde a 3 equazioni; per esempio $\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \vec{0} \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}:$$

componente	equazione
x	$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$
y	$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$
z	$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}:$$

componente	equazione
x	$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$
y	$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x}$
z	$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x}$

Riscriviamo di seguito le precedenti relazioni

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad 8) \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad 9)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad 10) \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad 11)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad 12) \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad 13)$$

8) e 9) implicano che E_x e B_x sono costanti.

In proposito, osserviamo che $E_x = \text{cost} \neq 0$ potrebbe essere prodotta da una distribuzione di carica, per esempio da un piano infinito con densità di carica σ uniforme: $E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. D'altronde stiamo considerando il caso di assenza di cariche, per cui

$$E_x = 0$$

Analogamente, data l'assenza di correnti, si ha

$$B_x = 0$$

Il fatto che la componente x di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sia nulla implica che $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari ad $\vec{x}$, che è la direzione di propagazione delle onde.

Quindi: la trasversalità delle onde e.m. è intrinseca nelle eq. di Maxwell.

si ha quindi

$$\vec{E}(x;t) = E_y(x;t) \vec{u}_y + E_z(x;t) \vec{u}_z$$

$$\vec{B}(x;t) = B_y(x;t) \vec{u}_y + B_z(x;t) \vec{u}_z$$

Derivando la 10) rispetto ad x e la 11) rispetto a t , si ha

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x}$$

Assumendo che le derivate miste di B_z non dipendano dall'ordine con cui si effettuano le derivazioni (condizione generalmente soddisfatta), si ha

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Derivando la 10) rispetto a t e la 11) rispetto ad x , si ottiene

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Applicando la procedura analoga alle precedenti ma nel caso delle equazioni 12) e 13), si ottiene

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

Quindi, tutte le componenti di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ soddisfano l'equazione delle onde piane: oltre a E_y, E_z, B_y, B_z , anche $E_x=0$ e $B_x=0$ sono soluzioni.

Da quanto detto a proposito delle soluzioni dell'equazione delle onde piane, si ha

Le componenti di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si propagano lungo l'asse x con velocità

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

che è il valore misurato della velocità della luce nel vuoto.

IPOTESI DI MAXWELL

la luce è un'onda composta da un campo elettrico e da un campo magnetico

Poiché qualsiasi funzione f che dipende da $x-vt$ o da $x+vt$ (o qualsiasi combinazione lineare, $Af_1 + Bf_2, \dots$) sono soluzioni delle equazioni di Maxwell con $\rho=0$ e $\vec{j}=\vec{0}$, possiamo scegliere, per esempio, $f(x-vt) = C \cos(kx - \omega t)$, con C una costante. Queste sono le onde piane armoniche

$$\vec{E} = E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z = \cos(kx - \omega t) (E_{0y} \vec{u}_y + E_{0z} \vec{u}_z) \quad 14)$$

$$\vec{B} = B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z = \cos(kx - \omega t) (B_{0y} \vec{u}_y + B_{0z} \vec{u}_z) \quad 15)$$

con $c = \frac{\omega}{k}$. Inoltre, poiché come visto

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t},$$

si ha

$$-k E_{0z} \sin(kx - \omega t) = \omega B_{0y} \sin(kx - \omega t),$$

che implica

$$B_{0y} = -\frac{E_{0z}}{c}$$

Si noti che, ad ogni istante, i punti di massimo e minimo di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ coincidono.

Analogamente, la condizione 10) implica

$$B_{0z} = \frac{E_{0y}}{c}$$

per cui la 15) è riscrivibile nella forma

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \cos(kx - \omega t) (-E_{0z} \vec{u}_y + E_{0y} \vec{u}_z) \quad 16)$$

La 14) e la 16) implicano le seguenti importanti proprietà:

$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{E_z^2}{c^2} + \frac{E_y^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} \longrightarrow B = \frac{E}{c} \quad 17)$$

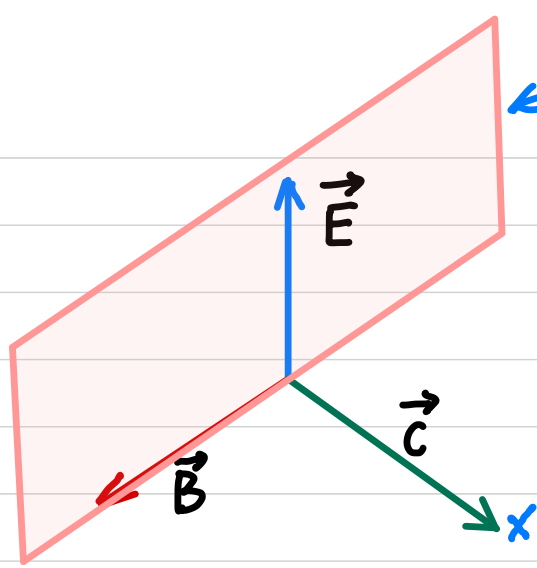
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = \left(-\frac{E_{0y} E_{0z}}{c} + \frac{E_{0z} E_{0y}}{c} \right) \cos^2(kx - \omega t) = 0 \quad 18)$$

Quindi, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione e $E/B = c$.

Un'altra importante proprietà è la seguente

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c} (E_y^2 + E_z^2) \vec{u}_x = \frac{E^2}{c} \vec{u}_x = c B^2 \vec{u}_x = E B \vec{u}_x \quad 19)$$

cioè $\vec{E} \times \vec{B}$ ha la direzione e verso della propagazione dell'onda e.m. Le proprietà 17), 18) e 19) valgono anche nel caso di onde piane non armoniche.



← piano di $\vec{E}$ e $\vec{B}$
(onda piana)

Ci sono onde piane con
 $\vec{E}$ e $\vec{B}$ che ruotano nel
piano del fronte d'onda

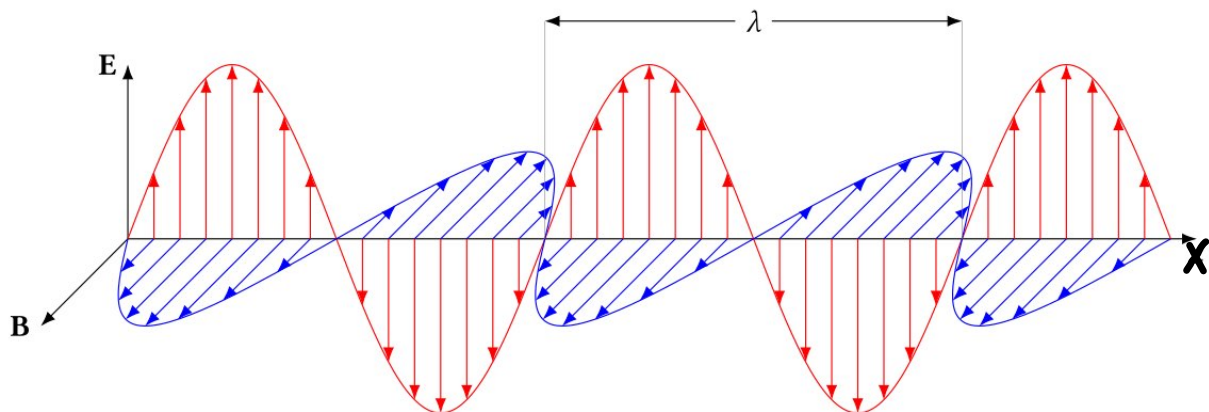
$$\vec{E} \times \vec{B} \parallel \vec{c}$$

ottenibili con opportune
combinazioni lineari

Onde piane^(*) "polarizzate linearmente" (anche dette
"polarizzate rettilineamente" o "polarizzate rettilineamente"):
sono quelle considerate finora, $\vec{E}$ e quindi
 $\vec{B}$, mantengono la stessa direzione nel piano di
propagazione

https://it.wikipedia.org/wiki/Radiazione_elettromagnetica#/media/File:Electromagneticwave3D.gif

^(*) In proposito si sottolinea che la polarizzazione di
un'onda è definita, per convenzione, dalla direzione
del campo elettrico. Se $\vec{E}$ oscilla in una direzione
fissa perpendicolare ad una direzione fissa perpendicolare
alla direzione di propagazione, allora si parla di
polarizzazione lineare. Se $\vec{E}$ ruota descrivendo un'ellisse
o un cerchio si parla di polarizzazione ellittica o circolare.



Come già osservato, ed qui istante, nel caso di onde piane, i punti di massimo e di minimo di $\vec{E}$ coincidono con quelli di $\vec{B}$. Come risulta da 14) e 15), le onde armoniche sono in fase, cioè entrambe hanno il fattore $\cos \phi(x,t)$, dove la fase $\phi(x,t)$ è $kx - \omega t$.

Quanto sopra mostrato implica che $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono intrinsecamente correlate, per cui in caso di propagazione si parla di onde elettromagnetiche.

Onde elettromagnetiche in mezzi trasparenti

Le onde e.m. possono propagarsi anche in mezzi materiali con particolari caratteristiche, per esempio nei cosiddetti materiali dielettrici ideali:

materiali con proprietà magnetiche trascurabili (esempio: gas e liquidi)

$$\chi_m = 0, \quad \kappa_m = 1, \quad \mu = \mu_0$$

ma con costante dielettrica relativa $\kappa_e \neq 1$.

In tal caso le onde e.m. si propagano con velocità

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa_e}} = \frac{c}{n}$$

$$n := \frac{c}{v} = \sqrt{\kappa_e} : \text{indice di rifrazione assoluta del mezzo}$$

La rifrazione consiste nella riduzione della velocità della luce nel mezzo.