

LEZIONE 29

30.04.2026

Esercizi d'esame 5

ONDE ELETTROMAGNETICHE

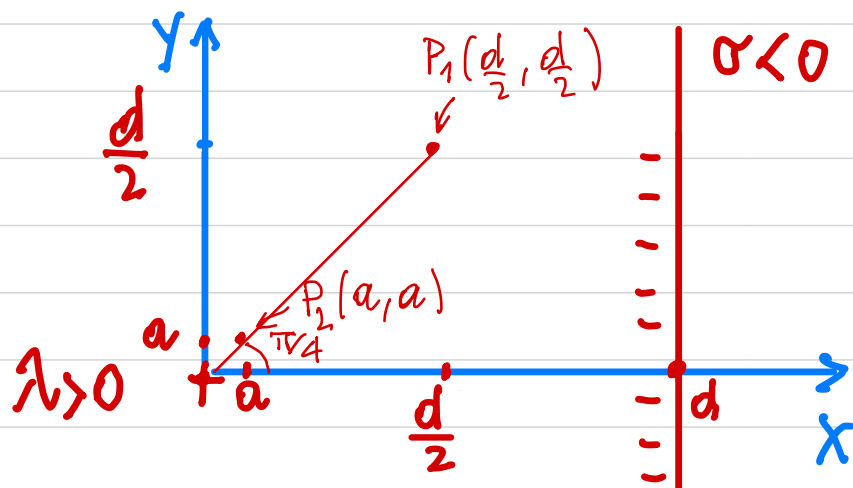
Proprietà generali delle onde

Onde piane, equazione di d'Alembert

Onde piane armoniche

PROBLEMA 11

Un filo rettilineo di densità di carica $\lambda = 100 \text{ nC/m}$ perpendicolare al foglio, dista $d = 2 \text{ cm}$ da un piano parallelo al piano yz che ha la densità di carica superficiale uniforme $\sigma = -1 \text{ } \mu\text{C/m}^2$.



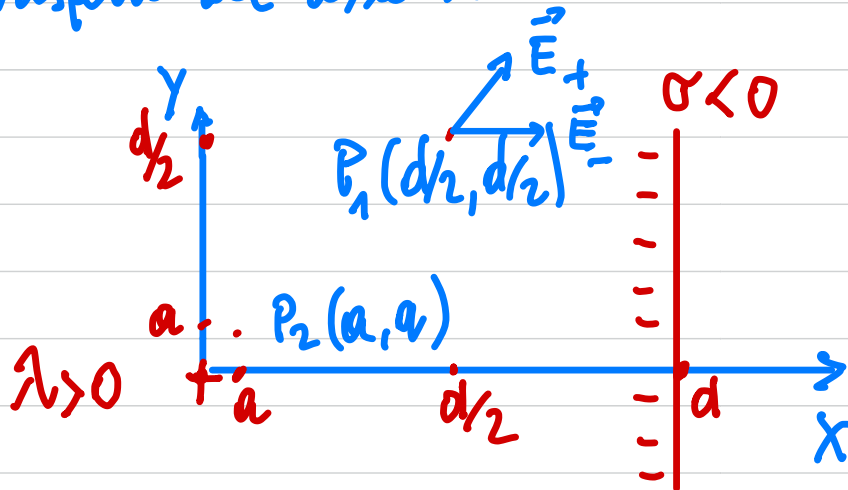
Calcolare

1. $|\vec{E}|$ in $P_1(d/2, d/2)$

2. la d.d.p. tra $P_2(a, a)$, $a = 1 \text{ mm}$, e P_1

$$1. \vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$\vec{E}_+$: radiale uscente dal filo con angolo $\pi/4$ in P_1 rispetto all'asse x



$$E_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{2\pi\epsilon_0 d} = 127 \text{ kV/m}$$

Nella regione $x \leq d$ si ha che $\vec{E}_-$ è perpendicolare al piano carico $x=d$ ed entrante in esso

$$E_- = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} = 56 \text{ kV/m}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y$$

$$E_x = E_+ \cos \frac{\pi}{4} + E_- = 146 \text{ kV/m}$$

$$E_y = E_+ \sin \frac{\pi}{4} = 89.9 \text{ kV/m}$$

Quindi il modulo del campo elettrostatico in P_1 è

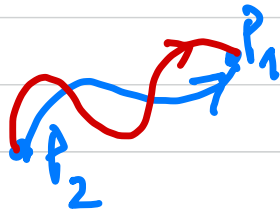
$$E(P_1) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 172 \text{ kV/m}$$

2.

$$V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} (\vec{E}_+ + \vec{E}_-) \cdot d\vec{s} = - \int_{\frac{d\sqrt{2}}{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$
$$- \int_{d/2}^a \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2a}{d} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{d}{2} - a \right) = 12.4 \text{ kV}$$

Si noti che nel calcolo degli integrali si è utilizzato il fatto che, grazie alla conservatività del campo elettrostatico, il risultato non dipende dal cammino di integrazione. Per questo, per ognuno dei due integrali, si è scelto il contorno che facilita il conto. Illustriamo di seguito la scelta fatta. Per comodità scambiamo gli estremi di integrazione, la differenza è un segno.

$\int_{P_2}^{P_1} \vec{E}_+ \cdot d\vec{s}$: possiamo scegliere qualsiasi $\gamma_{P_2 P_1}$, per esempio uno dei due seguenti



D'altronde $\vec{E}_+$ è diretto lungo $\vec{r}$, quindi

$$\int_{P_2}^{P_1} \underbrace{f(x,y)}_{\vec{E}_+} \vec{u}_r \cdot d\vec{s}$$

Se scegliamo come contorno d'integrazione il segmento rettilineo che unisce P_2 a P_1 , con verso da P_2 a P_1 , allora

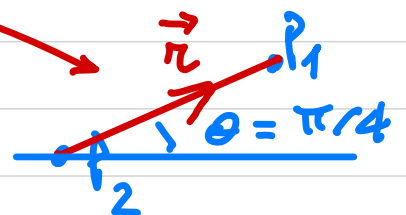
$d\vec{s} = d\vec{r}$ e P_1, P_2 vanno espressi con i valori di r in P_1 e P_2 , quindi

$$\int_{P_2}^{P_1} \underbrace{f(x,y)}_{\vec{E}_+} \vec{u}_r \cdot d\vec{s} = \int_{r(P_2)}^{r(P_1)} f(x,y) \vec{u}_r \cdot d\vec{r}$$

$\theta = \pi/4 \rightarrow r \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\vec{r} \cos \theta = r \sin \theta = r \frac{\sqrt{2}}{2}$

Dove, come spiegato più avanti,

$$x = r \frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad y = r \frac{\sqrt{2}}{2}$$



D'altronde $d\vec{r} = \vec{u}_n dr$, per cui

$$\int_{P_2}^{P_1} \underbrace{f(x,y) \vec{u}_n}_{\vec{E}_+} \cdot d\vec{s} = \int_{r(P_2)}^{r(P_1)} f(x,y) \vec{u}_n \cdot d\vec{r} = \int_{r(P_2)}^{r(P_1)} f(x,y) dr$$

molto, poiché

$$r(P_1) = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

$$r(P_2) = a\sqrt{2}$$

si ha

$$\int_{P_2}^{P_1} \underbrace{f(x,y) \vec{u}_n}_{\vec{E}_+} \cdot d\vec{s} = \int_{a\sqrt{2}}^{\frac{d\sqrt{2}}{2}} f(x,y) dr$$

Si noti ora che l'integrale è unidimensionale
ma abbiamo due variabili x e y . Il punto chiave
sta nel fatto che l'integrando deve essere valutato
sul contorno d'integrazione, ciò implica una
relazione tra x e y , per cui i gradi di libertà
si riducono da due ad uno. Ovviamente, se
considerassimo un integrale su una curva in

n -dimensioni, allora le n -variabili soddisfanno $n-1$ condizioni.

Dobbiamo quindi esprimere x, y in $f(x, y)$, in termini di r che è il parametro che descrive il contorno d'integrazione. In coordinate polari si ha $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, e il cammino in questione ha $\theta = \pi/4$. Si noti comunque che in questo caso il passaggio è banale perché $f(x, y)$ è già espressa in termini di una sola variabile, e questa è proprio r :

$$f(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Analoghi analoghi vale per il secondo integrale

$$\int_{P_2}^{P_1} \vec{E}_- \cdot d\vec{s}$$

Poiché $\vec{E}_-$ è diretto verso x , si ha

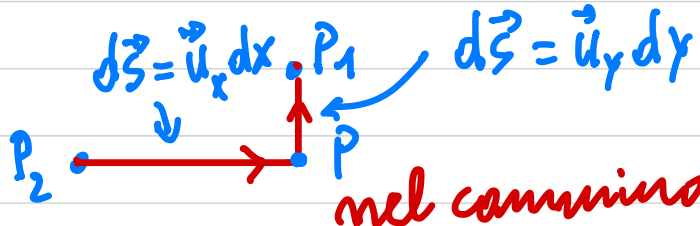
$$\int_{P_2}^{P_1} q(x, y) \vec{u}_x \cdot d\vec{s}$$

Poiché l'integrando ha direzione $\vec{u}_x$ conviene scegliere il seguente cammino

$$P_1(d/2, d/2)$$

$$P_2(a, a)$$

$$P(d/2, a)$$



$$\int_{P_2}^{P_1} g(x, y) \vec{u}_x \cdot d\vec{S} = \int_{x(P_2)=a}^{x(P)=d/2} g(x, a) \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x dx + \int_{y(P)}^{y(P_1)} g(d/2, y) \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y dy$$

$$= \int_a^{d/2} g(x, a) dx$$

nel cammino $PP_1, x = d/2$

Nel caso di E_- la funzione $g(x, y)$ è la costante $\sigma/2\epsilon_0$.

Propagazione di un'onda: superficie di un liquido, una corda tesa, onde sonore, onde sismiche. L'origine di queste onde è meccanica: si propagano attraverso un mezzo materiale, ed è causata dall'interazione tra atomi e molecole.

- la propagazione non comporta trasporto di materia: atomi e molecole oscillano attorno ad una posizione di equilibrio.
- Tramite un'onda si trasportano energia e quantità di moto: per esempio una barca sul mare oscilla al passaggio dell'onda, acquistando energia e quantità di moto.

In natura esistono onde che si propagano anche nel vuoto:

- onde elettromagnetiche: fotoni
- onde gravitazionali: gravitoni

ONDA: una qualsiasi perturbazione, impulsiva o periodica, che si propaga con una velocità ben definita.

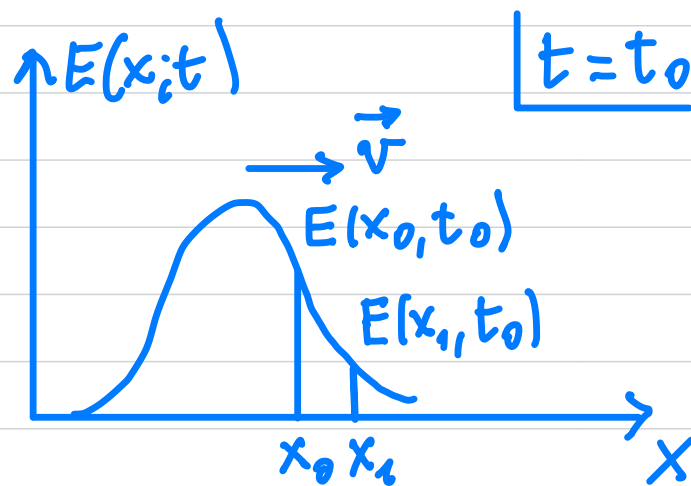
In elettromagnetismo le onde sono generate^(*) da cariche opportunamente accelerate. In tal caso i campi $\vec{E}(x, y, z; t)$ e $\vec{B}(x, y, z; t)$, correlati tra loro, si propagano nello spazio.

(*) È interessante osservare che esistono soluzioni delle equazioni di Maxwell corrispondenti ad onde e.m. anche in assenza di cariche e correnti.

$\vec{E}(x, y, z; t)$ e $\vec{B}(x, y, z; t)$ sono dette funzioni d'onda che descrivono l'onda e.m.

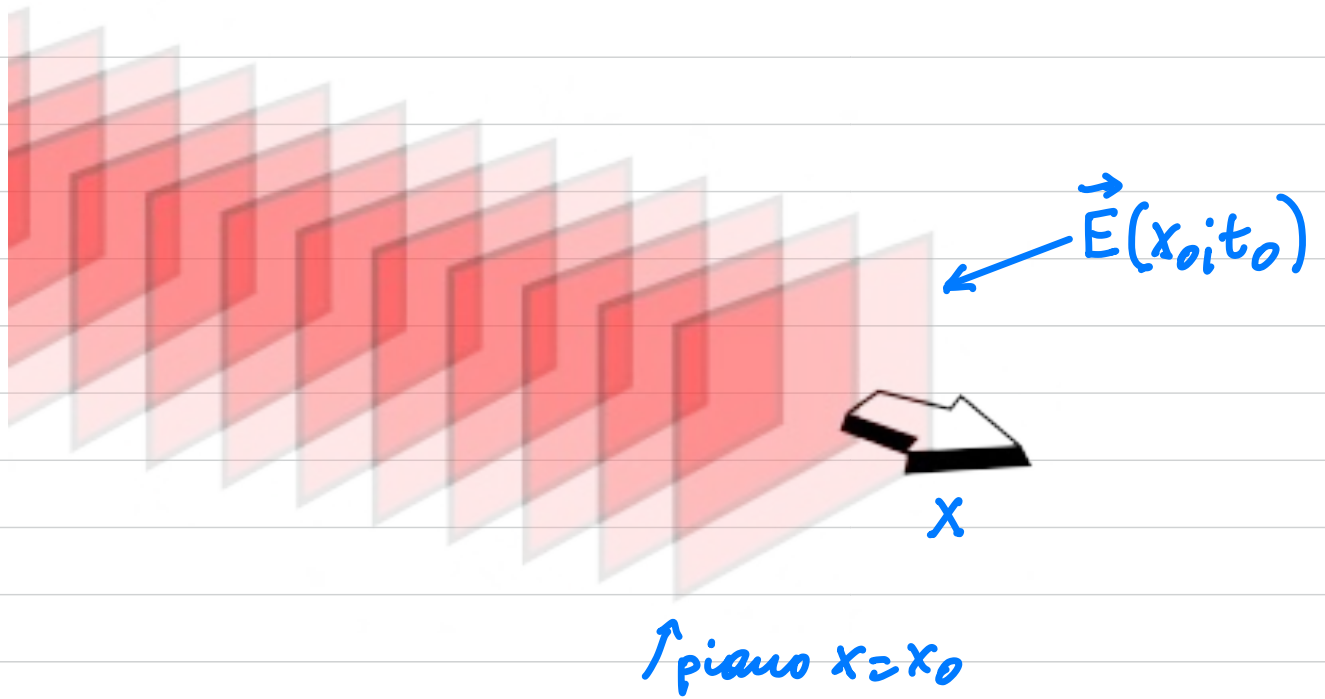
Soluzioni semplici: ONDE PIANE

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ dipendono solamente da una coordinata spaziale
 $\vec{E}(x; t), \vec{B}(x; t)$



In tutti i punti del piano $x = x_0$, quindi per tutto il piano yz , $\vec{E}$ ha lo stesso valore.

Fronti d'onda piano



$\vec{E}(x_0; t_0)$ ha lo stesso valore in tutti i punti del piano

Fronti d'onda
ad un dato
istante



Un'onda piana soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad 1)$$

detta equazione di d'Alembert (in una dimensione spaziale) o, equivalentemente equazione delle onde piane.

Il coefficiente v^2 è il quadrato della velocità di propagazione dell'onda.

Si noti che, data una funzione che dipende da $x+vt$ (o da $x-vt$), si ha

$$\frac{\partial f(x+vt)}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{\partial f(x+vt)}{\partial t} \quad 2)$$

$$e \quad \frac{\partial g(x-vt)}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial g(x-vt)}{\partial t} \quad 3)$$

infatti

derivate di funzione composta

$$\frac{\partial f(x+vt)}{\partial x} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{\partial f(x+vt)}{\partial(x+vt)} \frac{\partial(x+vt)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+vt)}{\partial(x+vt)}$$

$$\frac{\partial f(x+vt)}{\partial t} = \frac{\partial f(x+vt)}{\partial(x+vt)} \frac{\partial(x+vt)}{\partial t} = \frac{\partial f(x+vt)}{\partial(x+vt)} v$$

relazioni che implicano la 2). La 3) segue in modo analogo.

Va comunque osservato che la 1) è un'equazione lineare (E compare alla potenza 1) per cui se E_1 e E_2 sono soluzioni della 1) allora anche $AE_1 + BE_2$, con A e B costanti arbitrarie, è soluzione:

$$\frac{\partial^2 (AE_1 + BE_2)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (AE_1 + BE_2)}{\partial t^2}$$

||

0

$$\frac{\partial^2 AE_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 BE_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 AE_1}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 BE_2}{\partial t^2} = 0$$

0

Quanto detto si può ottenere anche osservando che la 1) è esprimibile nel modo equivalente

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) E(x,t) = 0$$

||

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E(x,t) = 0$$

D'altronde $\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) f(x \mp vt) = 0$ per qualsiasi

f differenziabile, da cui segue

$$\overset{\textcircled{A}}{\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right)} \overset{\textcircled{B}}{\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right)} f_1(x+vt) = 0$$

D'altronde il d'Alembertiano lo si può anche scrivere con gli operatori $\textcircled{A}$ e $\textcircled{B}$ scambiati,

quindi

$$\overset{\textcircled{B}}{\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right)} \overset{\textcircled{A}}{\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right)} f_2(x-vt) = 0$$

se $E_0 = E(x_0 - vt_0)$ è il valore assunto in un dato punto x_0 all'istante t_0 , allora lo stesso valore sarà assunto dal campo elettrico nei punti x e t tali che

$$x - vt = x_0 - vt_0$$

Quindi il valore E_0 si ha per tutti i valori x, t , tali che

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

che è la traiettoria di un punto che si muove di moto rettilineo uniforme, con velocità v nella direzione e verso di $\vec{x}$.

Si può affermare che " E_0 ha velocità v ".

La stessa analisi si estende al caso in cui E dipende da $x + vt$. In tal caso l'onda ha direzione e verso di $-\vec{x}$.

Come già osservato è possibile avere sovrapposizioni di onde piane che hanno velocità di segno opposto

$$E(x,t) = A E_1(x-vt) + B E_1(x+vt)$$

ONDE PIANE ARMONICHE

Tra le onde piane vi sono soluzioni particolarmente rilevanti, le onde armoniche:

$$E(x,t) = E_0 \sin[k(x-vt)] \quad 4)$$

oppure

$$E(x,t) = E_0 \cos[k(x-vt)] \quad 5)$$

E_0 : ampiezza dell'onda

k : numero d'onda

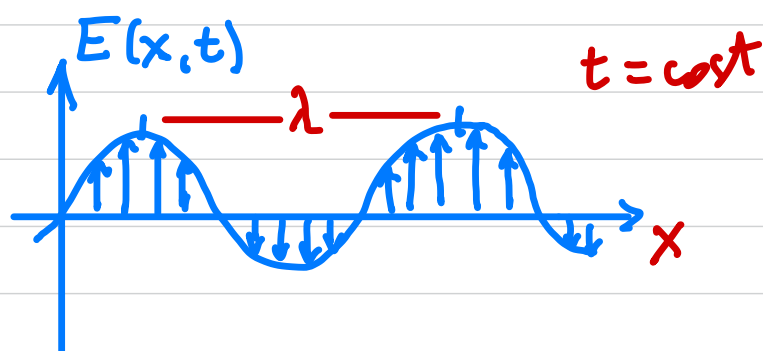
Comunque, invece di 4) e 5) si usa più frequentemente l'espressione

$$E(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \quad 6)$$

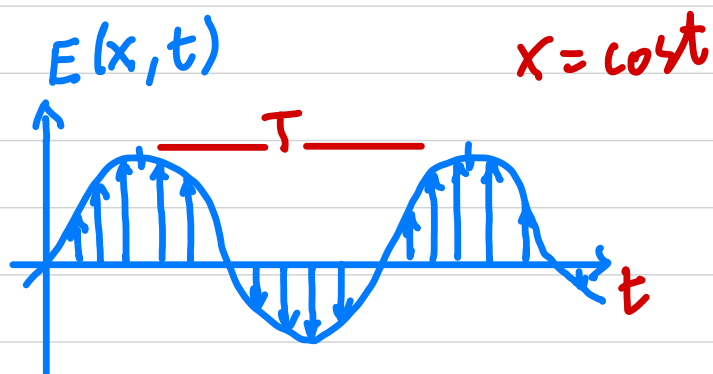
$$\text{oppure } E(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \quad 7)$$

dove $\omega := kV$: pulsazione dell'onda armonica

La precedente analisi si estende al caso in cui $x - vt$ è sostituito da $x + vt$.



$\lambda = \frac{2\pi}{k}$: lunghezza d'onda
 k : numero d'onda = numero di lunghezze d'onda in 2π metri



$T = \frac{2\pi}{\omega}$: periodo dell'onda

$$\lambda = vT, \quad v = \frac{1}{T} = \text{frequenza oscillazione}$$

$$\lambda v = v$$