

LEZIONE 28

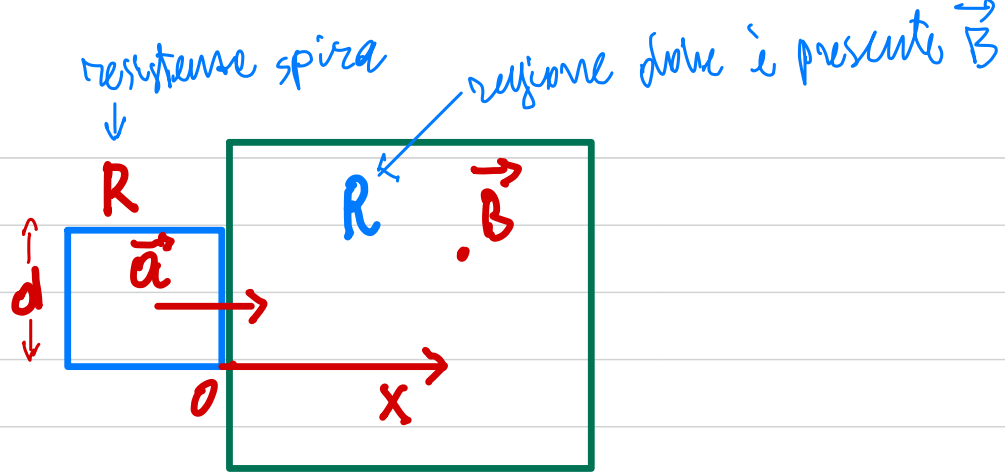
29.04.2026

Esercizi d'esame

PROBLEMA 4

Una spira quadrata di lato $d = 30 \text{ cm}$ e resistenza $R = 6 \text{ m}\Omega$ è al bordo di una regione R dove è presente un $\vec{B}$ uniforme perpendicolare e uscente dal foglio, con $B = 16 \text{ mT}$. La spira, inizialmente in quiete, subisce un'accelerazione uniforme di modulo $a = 4 \text{ m/s}^2$ e diretta verso R . Tale accelerazione termina nell'istante in cui la spira è totalmente immersa nella regione R .
Determinare

1. la f.e.m. massima indotta nella spira, $\mathcal{E}_{i, \text{max}}$
2. la carica che fluisce nella spira dal momento dell'accelerazione fino a quello in cui è completamente in R
3. l'energia dissipata nella spira



1. Denotiamo con $x(t)$ la posizione del lato destro della spira al tempo t , con $x(0) = 0$.

Il flusso di $\vec{B}$ attraverso la spira è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\Sigma} B d\Sigma = \int_{\Sigma(x(t))} B d\Sigma = B \int_{\Sigma(x(t))} d\Sigma = B dx(t)$$

Σ è la superficie della spira attraversata da $\vec{B}$, quindi è determinata da $x(t)$.

Sia t_d l'istante in cui $x = d$, cioè $x(t_d) = d$. Si

$$\text{ha } (*) \quad \Phi_{\Sigma(x(t > t_d))} = \Phi_{\Sigma(d)}.$$

Il modulo della f.e.m. indotta è, per $t \leq t_d$,

$$\mathcal{E}_i(t) = \frac{d\Phi}{dt} = B d \frac{dx(t)}{dt} = B d v(t)$$

* Quando la spira è tutta immersa in R non c'è più variazione di flusso, per cui $\mathcal{E}_i = 0$ per $x \geq d$.

Si noti che fino al tempo t_d si ha

$$\mathcal{E}_i(t \leq t_d) = B d v(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{accelerazione uniforme}}}{B d a t}$$

mentre per $t > t_d$ si ha

$$\mathcal{E}_i(t > t_d) = 0$$

in quanto, per $t > t_d$, il flusso è costante. Si ha quindi

$$\mathcal{E}_{i, \max} = \mathcal{E}_i(t_d) = B d a t_d$$

d'altronde, poiché per il moto uniformemente accelerato si ha

$$t_d = \sqrt{\frac{2d}{a}} \quad \left(x = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \right)$$

segue che

$$\mathcal{E}_{i, \max} = B \sqrt{2 a d^3} = 7.44 \text{ mV}$$

2. la carica che fluisce nel tempo dt è

$$dq = i dt$$

con

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Bd}{R} \frac{dx}{dt}$$

$\mathcal{E}_i = Bdv$

da cui segue

$$dq = i dt = \frac{Bd}{R} \frac{dx}{dt} dt = \frac{Bd}{R} dx$$

e integrando

$$q = \int_0^d \frac{Bd}{R} dx = \frac{Bd^2}{R} = 0.24 C$$

che segue direttamente dalla legge di Faraday:

$$|q| = |\Phi_f - \Phi_i|/R = |\Phi_f|/R \text{ poich\`e } \Phi_i = 0 \text{ (la spina \u00e9 fuori R)}$$

3. l'energia dissipata nell'intervallo dt \u00e9

$$\begin{aligned} dE_{\text{diss}} &= \frac{\mathcal{E}_i^2}{R} dt = \frac{\left(Bd \frac{dx}{dt}\right)^2}{R} dt \stackrel{\frac{dx}{dt} dt = dx}{=} \frac{B^2 d^2}{R} v dx \quad (*) \\ &= \frac{B^2 d^2}{R} \sqrt{2ax} dx \end{aligned}$$

Si noti che nei precedenti passaggi si è usato

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = v \frac{dx}{dt} dt = v dx. \text{ Inoltre } x = \frac{1}{2} a t^2, v = a t$$

implicano $v = a \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{2ax}$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \frac{1}{2} & a \\ \text{moto unif.} & \text{accel.} \end{matrix}$

Integrando Eq. (*) si ha

$$\begin{aligned} E_{\text{diss}} &= \int_0^d \frac{B^2 d^2}{R} \sqrt{2ax} dx = \frac{B^2 d^2 \sqrt{2a}}{R} \int_0^d \sqrt{x} dx \\ &= \frac{B^2 d^2 \sqrt{2a}}{R} \frac{2}{3} d^{3/2} = 1.19 \cdot 10^{-3} \text{ J} \end{aligned}$$

C'è comunque un modo più rapido di calcolare E_{diss} .

$$dE_{\text{diss}} = \frac{\xi_i^2}{R} dt, \quad \begin{matrix} \checkmark \\ \xi_i = B d a t \\ \xi_i^2 = B^2 d^2 a^2 t^2 \end{matrix}$$

$$E_{\text{diss}} = \frac{B^2 d^2 a^2}{R} \int_0^t t^2 dt = \frac{B^2 d^2 a^2}{3R} \left(\frac{2d}{a}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{\sqrt{8ad^7}}{3R} B^2 = 1.19 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

**Compito di Fisica Generale, II Semestre
Chimica Industriale
Padova - Dipartimento di Chimica - 20 giugno 2023**

Problema 1

Sia $\vec{r}$ il raggio vettore che origina nel punto $O = (0, 0, 0)$ degli assi cartesiani di $\mathbb{R}^3$. Sia $\rho(r) = ar$ per $r \leq R$ e $\rho(r) = 0$ per $r > R$, la densità di carica volumetrica, con a una costante positiva. Determinare

1. le dimensioni di a ,
2. il campo elettrostatico in tutto $\mathbb{R}^3$,
3. il potenziale elettrostatico $V(r)$ in tutto $\mathbb{R}^3$ e tale che $V(R) = 0$.

Domanda

Descrivere la legge di Gauss per il campo elettrico.

Problema 2

Si considerino due fili conduttori paralleli indefiniti, distanti L ed entrambi percorsi, nello stesso verso, dalla corrente di intensità i . Determinare

1. il campo magnetico in tutto il piano $\mathbb{R}^2$ dove giacciono i fili conduttori, distinguendo le seguenti tre regioni di spazio: quella a sinistra del primo filo, quella tra i due fili, e quella alla destra del secondo filo.
2. il campo elettrostatico $\vec{E}$ eventualmente necessario affinché una carica q , complanare ai due fili e che al tempo t_0 dista $L/2$ da essi, con velocità $\vec{v}$ parallela alle due correnti, non subisca, in tale istante, alcuna accelerazione.

Domanda

Descrivere la forza di Lorentz.

Problema 1

1. $[a] = QL^{-4}$.

2. Il flusso del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso una superficie Σ è definito nel modo seguente

$$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) := \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} .$$

Se Σ è una superficie chiusa, cioè $\partial\Sigma = \emptyset$, allora, in accordo con la legge di Gauss, si ha

$$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} ,$$

dove q è la carica totale interna a Σ . Nel caso in questione si ha simmetria sferica, per cui conviene scegliere come Σ la superficie sferica di raggio r centrata in O , che denotiamo S_r^2 . In proposito si osservi che poiché $a > 0$, il campo elettrico ha la stessa direzione e verso del raggio vettore. Ciò implica la seguente semplificazione

$$\int_{S_r^2} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{S_r^2} \cos(0) E d\Sigma = \int_{S_r^2} E d\Sigma .$$

D'altronde, sempre come conseguenza della simmetria sferica, $\vec{E}$ dipende solamente dalla distanza da O , cioè $\vec{E} = \vec{E}(r)$, ed essendo l'integrazione su una superficie con r costante, S_r^2 , si ha

$$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = E \int_{S_r^2} d\Sigma = E 4\pi r^2 .$$

Per quanto riguarda la carica racchiusa da S_r , si ha

$$q(r \leq R) = \int_{V_r} \rho d\tau = 4\pi a \int_0^r r'^3 dr' = \pi a r^4 ,$$

$$q(r \geq R) = \int_{V_r} \rho d\tau = 4\pi a \int_0^R r'^3 dr' = \pi a R^4 ,$$

da cui

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{a}{4\epsilon_0} r^2 \vec{u}_r , \quad \vec{E}(r \geq R) = \frac{a}{4\epsilon_0} \frac{R^4}{r^2} \vec{u}_r .$$

3. Si ha

$$V(r \leq R) - V(R) = - \int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{r}' = - \int_R^r E dr' = - \frac{a}{4\epsilon_0} \int_R^r r'^2 dr' ,$$

quindi, poiché $V(R) = 0$,

$$V(r \leq R) = - \frac{a}{12\epsilon_0} (r^3 - R^3) ,$$

che, come deve essere, soddisfa la condizione richiesta $V(R) = 0$. Inoltre

$$V(r \geq R) - V(R) = - \int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{r}' = - \int_R^r E dr' = - \frac{aR^4}{4\epsilon_0} \int_R^r \frac{1}{r'^2} dr' ,$$

quindi

$$V(r \geq R) = \frac{aR^4}{4\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) ,$$

che, come ovvio, soddisfa la condizione $V(R) = 0$.

Problema 2

1. Denotiamo con r la distanza dal primo filo, e con I , II e III , la regione piana rispettivamente alla sinistra del primo filo, tra i due fili e alla destra del secondo filo. Scegliamo la direzione delle correnti verso l'alto del foglio e denotiamo con $\vec{u}_n$ il versore perpendicolare al foglio e uscente da esso. Si ha

$$I. \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{L+r} \right) \vec{u}_n ,$$

$$II. \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{L-r} \right) \vec{u}_n ,$$

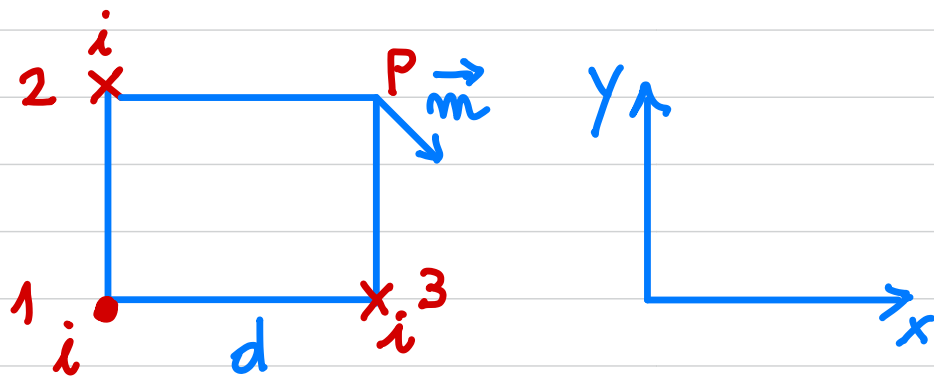
$$III. \quad \vec{B}(r) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r-L} \right) \vec{u}_n .$$

2. Nella retta $r = L/2$ in II si ha $\vec{F}_L(L/2) = q\vec{v} \times \vec{B}(L/2) = \vec{0}$, quindi $\vec{E} = \vec{0}$.

$\vec{B}(L/2) = \vec{0}$ per cui

PROBLEMA 5

Tre fili indefiniti percorsi dalla stessa corrente sono disposti su tre vertici di un quadrato di lato $d = 40 \text{ cm}$, la corrente nel filo 1 è uscente dal foglio ed entrante nei fili 2 e 3. Nel quarto vertice, P, c'è una piccola spira di momento di dipolo magnetico di modulo $m = 6 \mu \text{ A m}^2$ parallelo al campo magnetico in P. L'energia potenziale associata alla spira è $U_m = -3 \cdot 10^{-12} \text{ J}$.



Determinare

1. $|\vec{B}|$ in P
2. i
3. il valore che dovrebbe avere la corrente in 1 affinché $\vec{B}$ in P sia nullo

1. L'energia potenziale associata al momento magnetico di una spira $\vec{m}$ è

$$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos \theta = -i \Sigma B \cos \theta$$

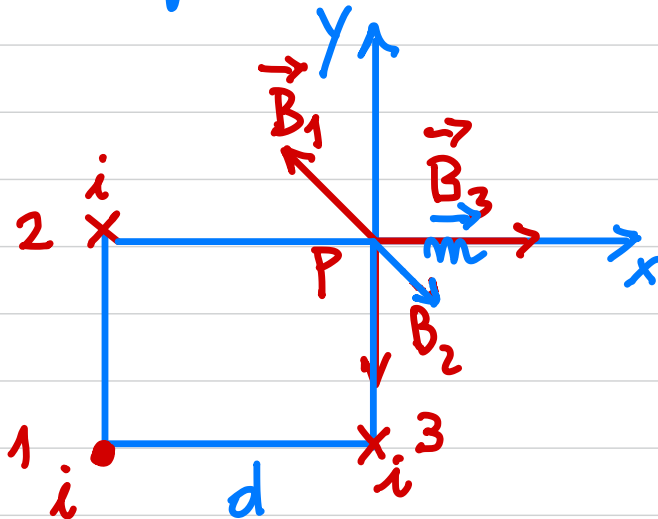
Nel caso in esame si ha

$$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB$$

→

$$B = -\frac{U_m}{m} = 0.5 \mu T$$

2. Il campo magnetico in P è



$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{4} \vec{u}_x + \frac{\mu_0 i}{2\pi d\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4} \vec{u}_y = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (-\vec{u}_x + \vec{u}_y) \quad 1)$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \vec{u}_y \quad 2)$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \vec{u}_x \quad 3)$$

Quindi

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (\vec{u}_x - \vec{u}_y)$$

il cui modulo è

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \sqrt{1 + 1} = \frac{\mu_0 i \sqrt{2}}{4\pi d}$$

da cui

$$i = \frac{4\pi B d}{\mu_0 \sqrt{2}} = 1.4 \text{ A}$$

3. Se in 1 circolo la corrente è i' allora, dalle 1),

segue che il campo in P è diretto

$$\vec{B}_1(i') = \frac{\mu_0 i'}{4\pi d} (-\vec{u}_x + \vec{u}_y)$$

e da 2) e 3) segue

$$\vec{B} = \vec{B}_1(i') + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \vec{0}$$

che implica

$$i' = 2i = 2.8 \text{ A}$$