

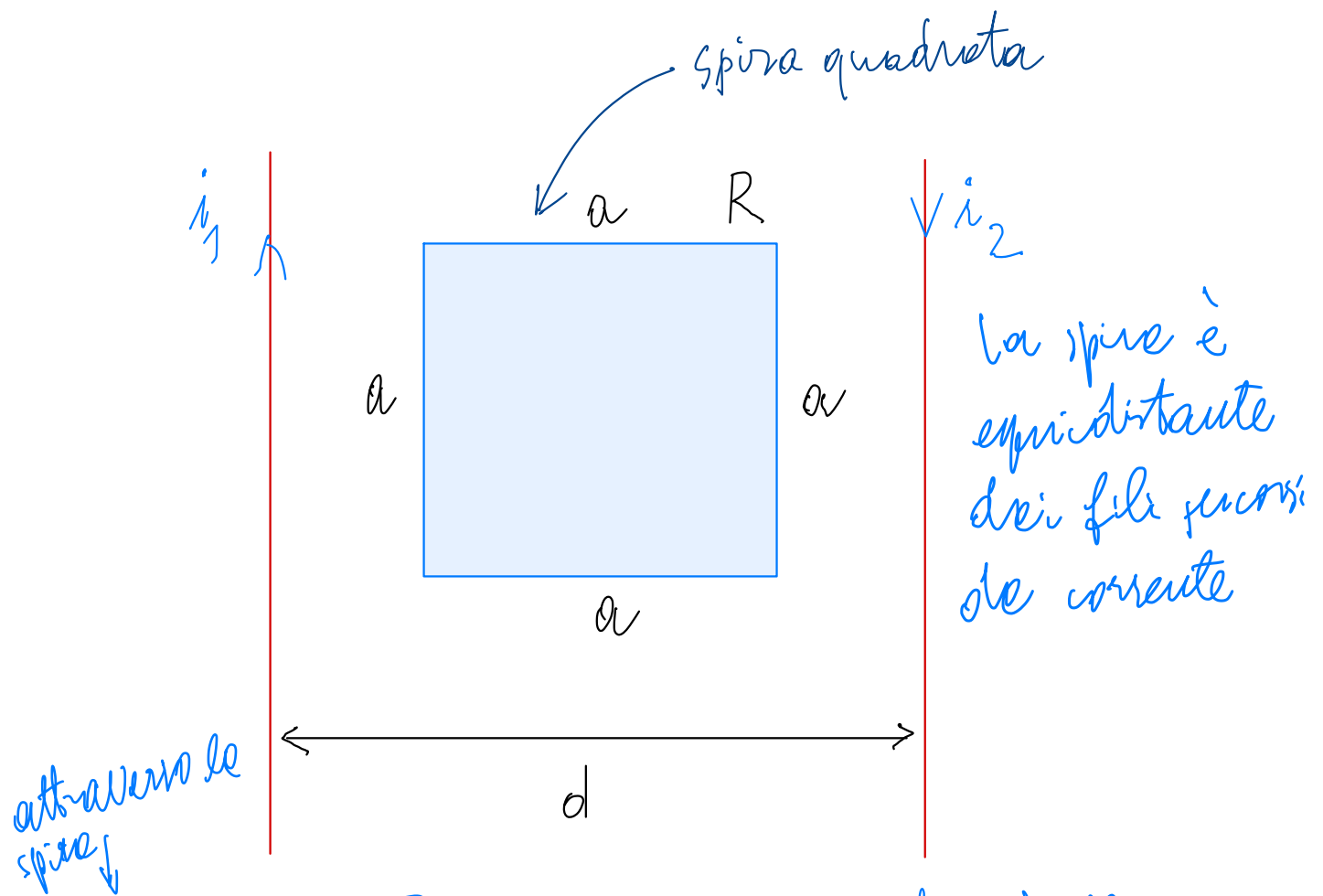
LEZIONE 26

23.04.2026

Esercizi d'esame

Autoinduzione

PROBLEMA 3



1. $\Phi(\vec{B}_1)$? $\vec{B}_k$ = campo generato dalla corrente i_k , $k=1,2$
2. i_2 in funzione di i_1 , $\Phi(\vec{B})$ e $\Phi(\vec{B}_1)$, $\vec{B} := \vec{B}_1 + \vec{B}_2$
3. Cerco totale che attraversa la spira durante una rotazione di 90° intorno all'asse passante per il centro della spira e parallelo ai due fili

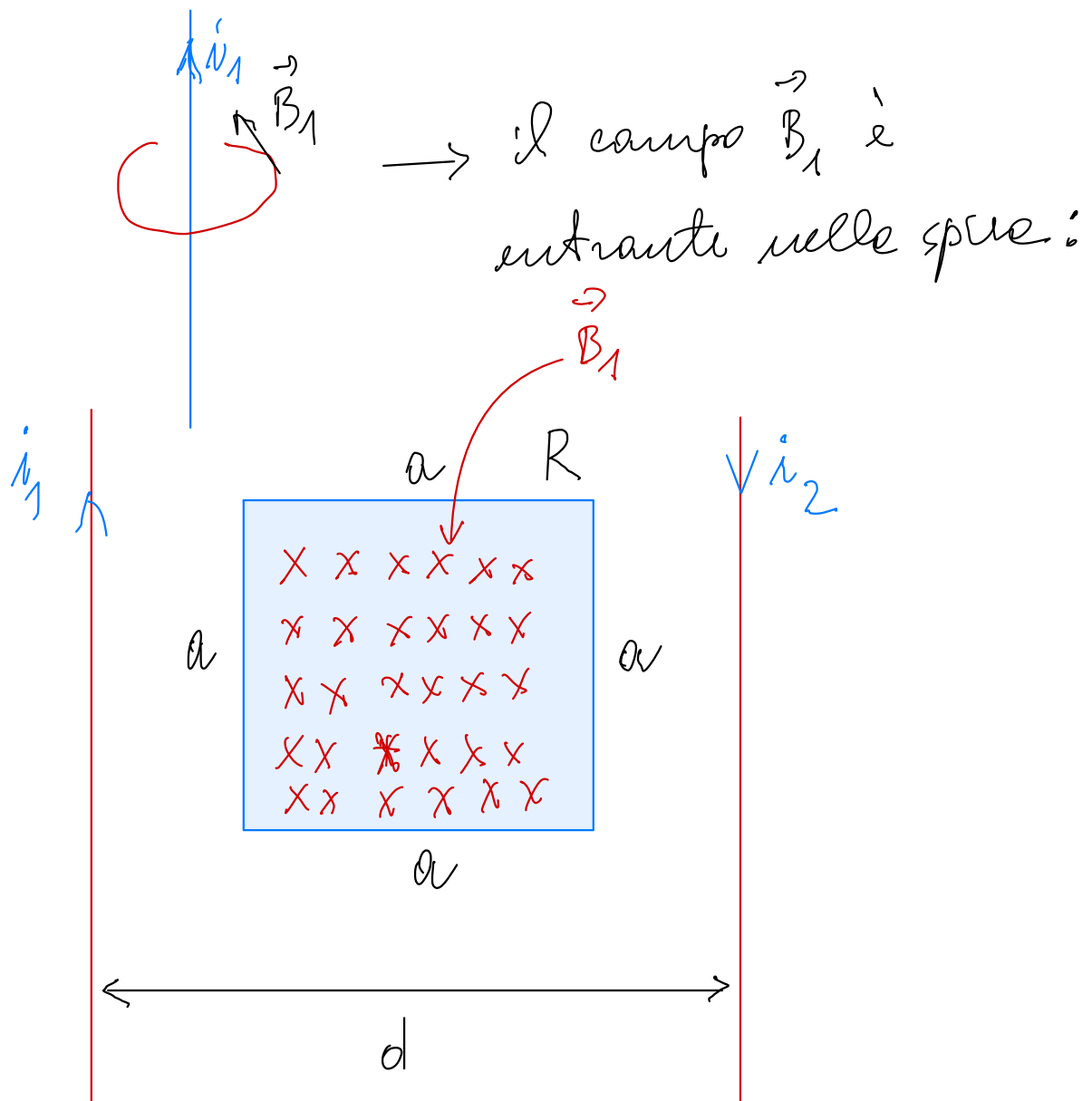
1. $\Phi(\vec{B}_1)$:

Definizione di flusso

$$\Phi(\vec{B}_1) = \int_{\Sigma} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\Sigma}$$

Nel caso in esame Σ è la spira.

Si noti che



Campo magnetico generato da un filo
infinito è

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \vec{u}_\phi$$

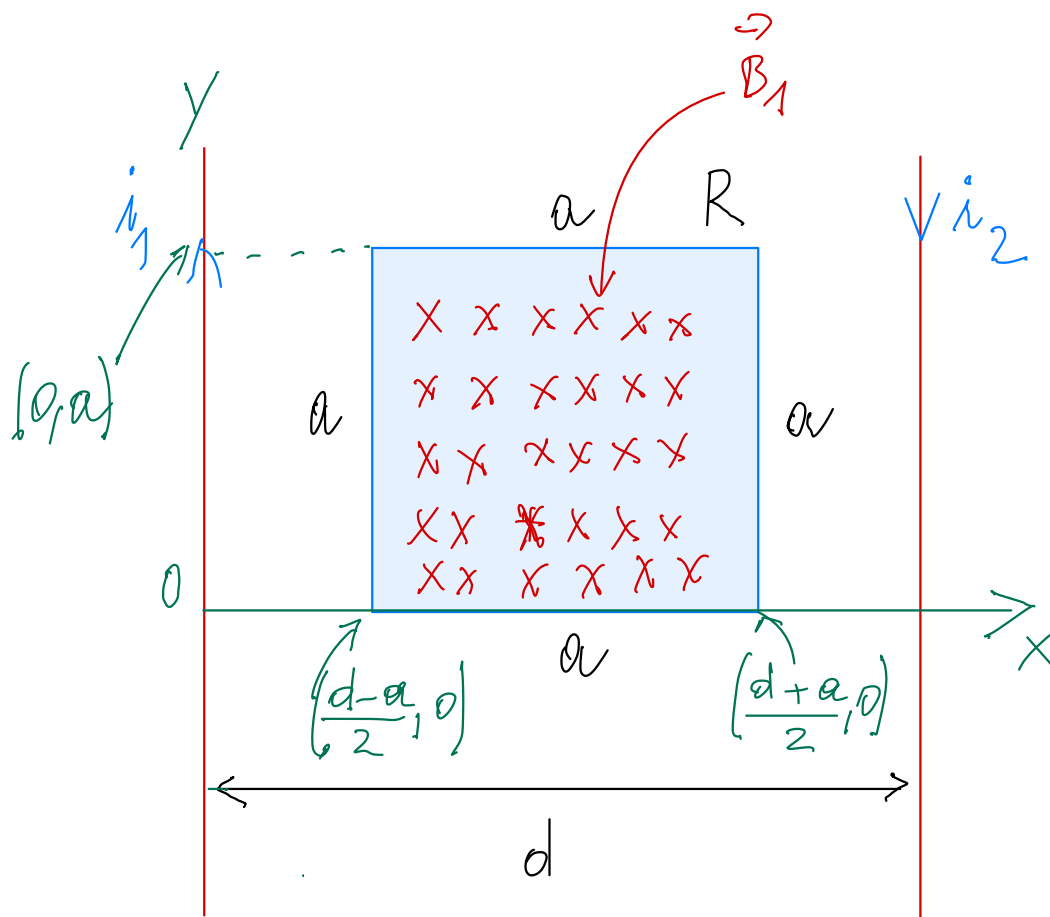
Il valore del flusso dipende da quale delle
due possibili orientazioni di Σ si sceglie. Se
scegliamo la direzione entrante nel foglio,
allora $\vec{B}_1$ è parallelo a $\vec{\Sigma}$. Optiamo per
questa scelta.

$$\Phi(\vec{B}_1) = \int_{\text{spina}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\text{spina}} B_1 d\Sigma$$

Si noti che, trattandosi di spina piana
quadrata, conviene usare le coordinate
cartesiane x, y . In tal caso

$$d\Sigma = dx dy$$

Per stabilire gli estremi di integrazione
consideriamo la figura



$$\frac{d-a}{2} \leq x \leq \frac{d+a}{2} \quad 0 \leq y \leq a$$

Un altro punto da tener presente è che $\vec{B}_1$ non dipende da y , quindi

$$\int_{\text{spine}} B_1 d\Sigma = \int_{\frac{d-a}{2}}^{\frac{d+a}{2}} dx \int_0^a dy \frac{\mu_0 i}{2\pi x} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \int_{\frac{d-a}{2}}^{\frac{d+a}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \left(\ln \frac{d+a}{2} - \ln \frac{d-a}{2} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d-a}$$

Riassumendo, si ha

$$\phi(\vec{B}_1) = \frac{\mu_0 i_1 a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d-a}$$

2.

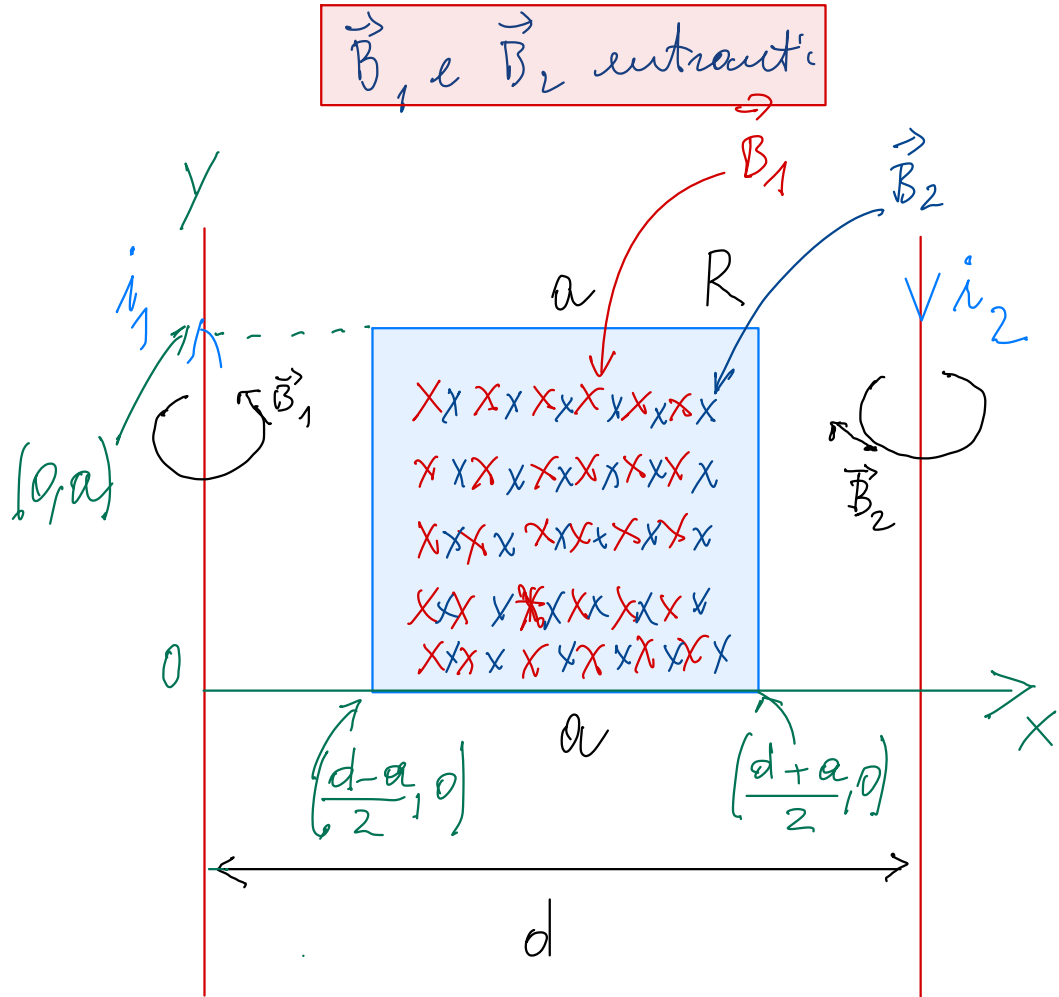
Analogamente

$$\oint_{\vec{r}} \vec{B}_2 \cdot \vec{\Sigma} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi} a \int_{\frac{d-a}{2}}^{\frac{d+a}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 i_2 a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d-a} = \frac{i_2}{i_1} \Phi(\vec{B}_1)$$

Abbiamo utilizzato le seguenti

OSSERVAZIONE: poiché la spira si trova fra i due fili e poiché il verso delle correnti è opposto, si ha che i campi magnetici generati dalle due correnti sono paralleli all'interno della spira, quindi stesso verso.



$$\vec{B}_1 \parallel \vec{B}_2 \rightarrow \Phi(\vec{B}_1) \text{ e } \Phi(\vec{B}_2)$$

hanno lo stesso segno.

$$\Phi(\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \Phi(\vec{B}_1) + \Phi(\vec{B}_2) = \Phi(\vec{B}_1) \left(1 + \frac{i_2}{i_1} \right)$$

$$\Rightarrow i_2 = i_1 \frac{\Phi(\vec{B}) - \Phi(\vec{B}_1)}{\Phi(\vec{B}_1)}$$

3. Per rispondere a queste domande, è necessario utilizzare la legge di Faraday, già vista a lezione.

Questo si ottiene a partire dalla legge di Faraday

$$i = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

l'altraonde, poiché

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\text{si ha } q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = - \frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

legge di Faraday

$$- \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi$$

Quindi la carica che fluisce in una spira nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ non dipende dalla legge temporale con cui varia il flusso, ma solamente dalla differenza tra il suo valore iniziale e quello finale.

Nel caso del problema si ha:

$$\Delta q = q_f - q_i = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R} = \frac{\Phi_i(\vec{B})}{R}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che il valore finale del flusso è zero in quanto la spina si trova in posizione verticale rispetto al campo magnetico, e quindi

$$\Phi_f = \int_{\text{spina}} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Nd dominio di integrazione
si ha $\vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} =$

$$B d\Sigma \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

PROBLEMA 4

All'istante $t_0 = 0$ un elettrone si trova tra due piani paralleli indefiniti con densità di carica $\sigma > 0$ e $-\sigma$, che si muove con velocità

$$v_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

parallela ai piani e posto a metà tra loro.

Sapendo che dopo $t = 0.4 \mu\text{s}$ l'elettrone urta il piano carico positivamente con velocità di modulo

$$v_1 = 5 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

determinare

1. σ

2. la d.d.p. tra i piani

3. la distanza tra i piani

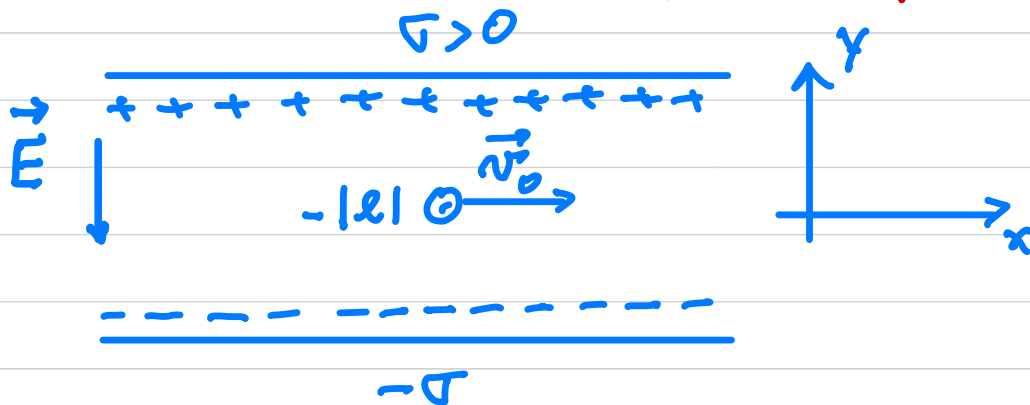
Carica dell'elettrone $-|e| = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Massa dell'elettrone $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$

La notazione $-|e|$ elimina l'ambiguità dovuta alla scelta del segno di e . Per esempio il libro di testo definisce

e negative ma poi lo considera sempre positivo

Il campo elettrico "esce da + ed è diretto verso -"



1. La forza agente sull'elettrone è

$$\vec{F} = -|e|\vec{E} = -|e|\frac{\sigma}{\epsilon_0}(-1)\vec{u}_y = |e|\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_y$$

diretto come $-\vec{u}_y$

e dalla II legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{|e|\sigma}{m\epsilon_0}\vec{u}_y$$

il cui modulo è una costante. Si ha quindi

*più precisamente:
 $\vec{a}$ non varia perché
 $\vec{E}$, all'interno delle
 armature non varia*

$v_{1,x} = v_0 = \text{costante}$: il moto lungo
 $\vec{x}$ non è alterato
 da $\vec{E}$

$$v_{1,y} = at = \frac{|e|\sigma}{m\epsilon_0}t \quad 1)$$

$$v_{1,y} = \sqrt{v_1^2 - v_{1,x}^2} = \sqrt{v_1^2 - v_0^2} = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e la 1) implica

$$\sigma = \left| \frac{m \epsilon_0 v_{1,y}}{e t} \right| = 50.4 \frac{pC}{m^2}$$

pC = pico
Coulomb

2.

$$E_{\text{finale}} = E_{\text{iniziale}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + U_0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + U_1 \rightarrow$$

$$U_1 - U_0 = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_1^2)$$

(Δ energia
cinetica =
 $-\Delta$ energia pot.)

Dell'elettrone $U = qV$. Ricordando che V dipende
linearmente dalle distanze, si ricordi che $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$
si ha che la differenza
di potenziale tra la posizione iniziale dell'elettrone
e uno dei due piani è la metà, a meno di
un segno, della d.d.p. tra i due piani carichi.

Quindi

$$-(-|e|) \frac{\Delta V}{2} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2)$$

da cui

$$\Delta V = \frac{m}{|e|} (v_1^2 - v_0^2) = 0.91 \text{ V}$$

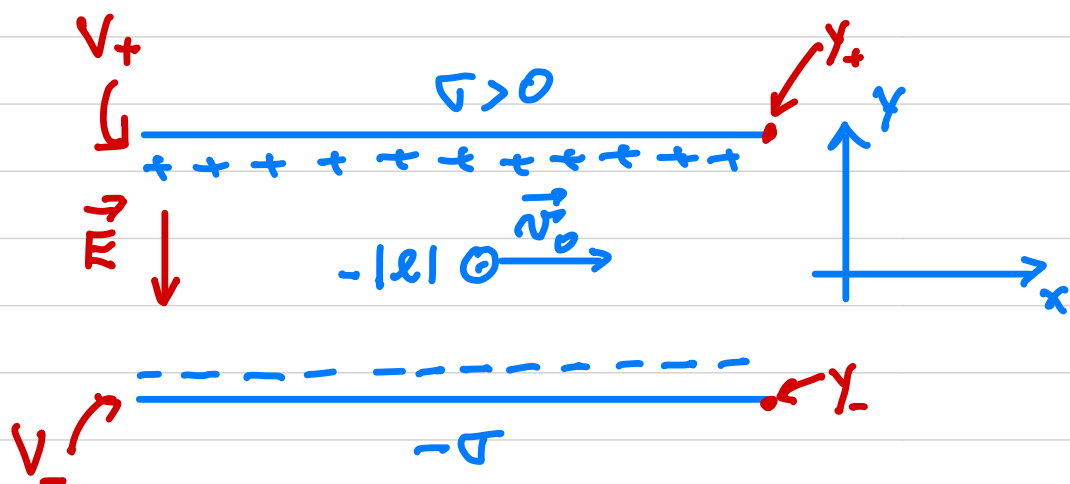
3. Si ha

$$\Delta V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

per cui

$$d = \frac{\epsilon_0 \Delta V}{\sigma} = 16 \text{ cm}$$

Un commento sul segno di ΔV :

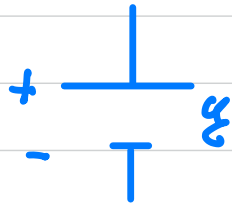


$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-1) \vec{u}_y \rightarrow V_+ - V_- = - \int_{y_-}^{y_+} \vec{E} \cdot d\vec{y}$$

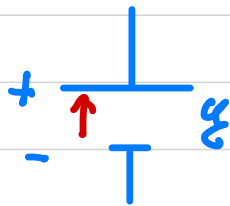
$$= + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{y_-}^{y_+} dy = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (y_+ - y_-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d > 0$$

Quindi $V_+ = V_- + \frac{\Sigma}{\epsilon_0} d$, il che implica che il potenziale in Y_+ è maggiore che in Y_- .

Questo aspetto spiega anche come mai nel simbolo



il verso di crescita della d.d.p. è da - a +



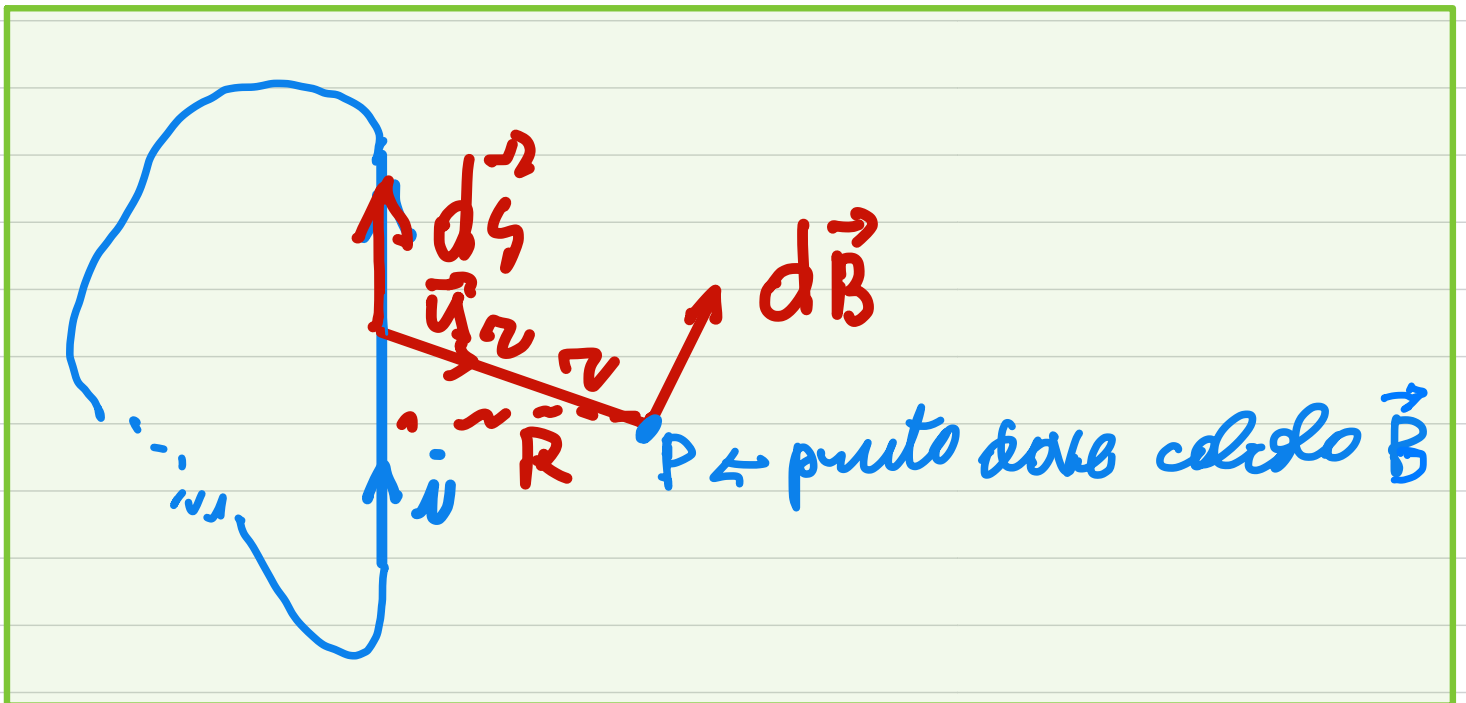
Aspetto che spiega il segno + nel calcolo dei potenziali nell'analisi dei circuiti elettrici.

Nel seguito consideriamo $\epsilon > 0$.

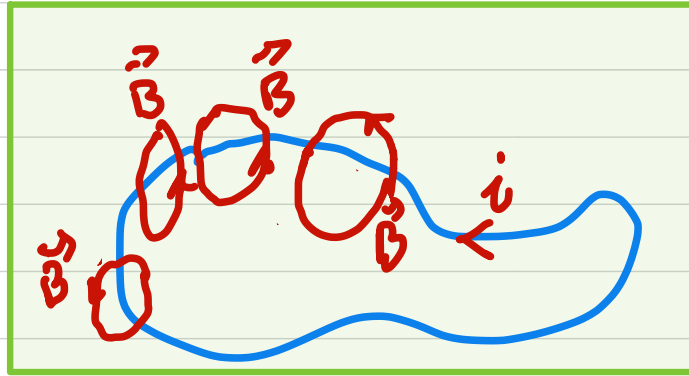
Autoinduzione

Il campo magnetico prodotto da un qualsiasi circuito chiuso percorso da corrente è dato dalla legge di Ampère-Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2} \quad 1)$$



Quindi una corrente genera $\vec{B}$ e
quindi un flusso di $\vec{B}$ concatenato
al circuito



$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \left(\oint_{\partial \Sigma} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2} \right) \cdot d\vec{\Sigma} \quad (2)$$

$\partial \Sigma = \partial Z = \gamma$

dove Σ è qualsiasi superficie con bordo il circuito.

$\vec{B}$ è proporzionale a i (si veda la 1), ed
anche $\Phi(\vec{B})$ è proporzionale ad i .

D'altronde i non dipende dal punto quindi
se 2) si può scrivere

$$\Phi(\vec{B}) = L i$$

L : coefficiente di auto-induzione o induttanza del circuito

- L dipende dalla forma del circuito e dal materiale in cui è fatto.
- Se i dipende da t , allora si ha una forza elettromotrice indotta detta di autoinduzione

$$\mathcal{E}_L = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

- Un circuito con induttanza non nulla è detto induttivo.
- Quando l'induttanza si può pensare concentrata in un tratto particolare del circuito, per esempio dove il filo è avvolto a mo di solenoide, allora quella parte di conduttore è detta induttore, e rappresentata così:



PROBLEMA 5

- Un filo conduttore rettilineo indefinito è percorso dalla corrente $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$, con $i_0 = 8A$ e $\tau = 5ms$. Una bobina quadrata conduttrice composta da $N_b = 100$ spire di spessore trascurabile, lato $a = 50cm$ e resistenza complessiva $R_b = 0.5\Omega$, è posta a distanza $r = 5cm$ dal filo. Calcolare
1. il momento di dipolo magnetico delle bobine a $t=0$
 2. la carica che percorre le bobine nell'intervallo $0 < t < \infty$
 3. l'energia dissipata nelle bobine nell'intervallo $0 < t < \infty$

Leuz: il verso di $\vec{B}_i$ è tale da opporsi alla variazione del flusso. Se $\frac{\partial \Phi_z(\vec{B})}{\partial t} < 0$

$$\begin{matrix} \vdots \vec{z} \\ \dots \vec{B}_i \text{ indotto} \\ \text{uscite} \\ \text{dal foglio} \end{matrix}$$

Scegliamo il verso di $\vec{z}$ uscente dal foglio $\rightarrow < 0$

$$i_b = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_z(\vec{B})}{\partial t} > 0,$$

corrente indotta sulle bobine

$$\begin{matrix} \vec{z} \\ \updownarrow \\ i(t) \end{matrix}$$

Leuz: $\vec{B}_i$ si oppone alla diminuzione di $\Phi_z(\vec{B})$

allora $\vec{B}_i \parallel \vec{B}$
altrimenti $\vec{B}_i \parallel -\vec{B}$

1. Il momento magnetico della spire è $\vec{m} = i_b \Sigma \vec{u}_n$,
dove il verso di $\vec{\Sigma}$, e quindi di $\vec{u}_n$, è determinato,
dal verso di i_b secondo le regole della mano destra.

Nel caso delle bobine si ha

$$M(t) = i_b(t) N_b \Sigma_b$$

Per calcolare i_b è necessario prima calcolare il flusso di $\vec{B}$
attraverso le bobine

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= N_b \int_{\text{spire}} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = N_b a \mu_0 \frac{i(t)}{2\pi} \int_r^{r+a} \frac{1}{r'} dr' \\ &= N_b \frac{\mu_0}{2\pi} a i(t) \ln \frac{a+r}{r}\end{aligned}$$

e la corrente indotta è

$$i_b(t) = -\frac{1}{R_b} \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{N_b \mu_0 a}{2\pi R_b} \frac{i_0}{\tau} e^{-t/\tau} \ln \frac{r+a}{r}$$

da cui segue

$$M(0) = i_b(0) N_b \Sigma_b = \frac{N_b^2 \mu_0 a^3}{2\pi R_b} \frac{i_0}{\tau} \ln \frac{r+a}{r}$$

2. Il flusso all'istante finale è nullo poiché $i(\infty)=0$, e la legge di Faraday implica

$$q_b = \left| \frac{\phi(\infty) - \phi(0)}{R_b} \right| = 103 \mu C$$

3. L'energia è dissipata per effetto Joule

$$E_{diss} = \int_0^{\infty} R_b \dot{i}_b^2(t) dt = 0.53 \cdot 10^{-6} J$$

potenza dissipata

dove l'unico integrale da fare è

$$\int_0^{\infty} e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = -\frac{\tau}{2} e^{-2\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\tau}{2}$$