

# LEZIONE 25

26.04.2026

Esercizi d'esame

consideriamo la divergenza " $\vec{\nabla} \cdot$ " di Ampère - Maxwell  
+ Gauss per  $\vec{E}$

$$0 = - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Tale equazione è detta **EQUAZIONE DI CONTINUITÀ**:

la densità di carica  $\rho$  deve variare in ogni punto

in cui la divergenza di  $\vec{J}$  è diversa da zero.

Integriamo in un volume  $V$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d\tau = - \frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = - \frac{dq_{int}}{dt}$$

$q_{int}$  = carica contenuta all'interno della superficie

$\Sigma$  bordo di  $V$ .

D'altronde il teorema della divergenza implica

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d\tau = \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}$$

da cui

$$i = \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} = - \frac{dq_{int}}{dt}$$

In una precedente lezione è stato menzionato che un campo vettoriale è esprimibile come la somma di un gradiente e di un rotore

$$\vec{A} = \vec{\nabla} B + \vec{\nabla} \times \vec{C}$$

per qualche campo scalare  $B$  e campo vettoriale  $\vec{C}$  (teorema di Helmholtz). Di seguito mostriamo che

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad 20)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad 21)$$

A tal fine notiamo che la legge di Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

è automaticamente soddisfatta da 20) e 21) in quanto

$$\vec{\nabla} \times \left( -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{A}}{\partial t}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0}$   
↓

è un'identità. Poiché  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , segue che anche l'equazione di Maxwell è soddisfatta automaticamente.

## INVARIANZA DI GAUGE

la proprietà fondamentale dell'elettrodinamica è l'invarianza di gauge. Infatti, le quantità fisiche  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  in 20) e 21) sono invarianti sotto la trasformazione

$$V \rightarrow \tilde{V} = V + \frac{\partial f}{\partial t} \quad 22)$$

$$\vec{A} \rightarrow \tilde{\vec{A}} = \vec{A} - \vec{\nabla} f \quad 23)$$

per qualsiasi funzione  $f$  derivabile.

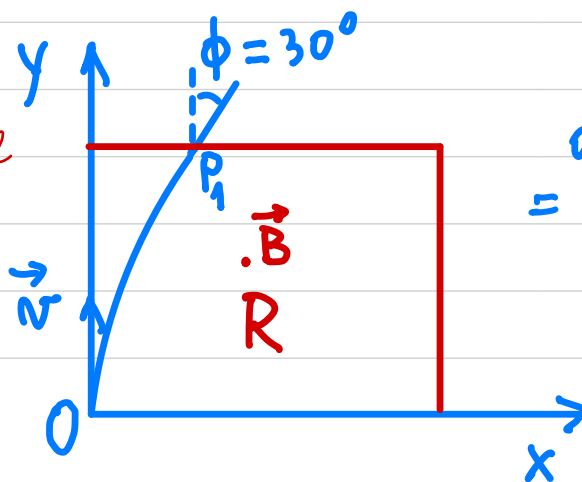
Poiché le equazioni di Maxwell sono soddisfatte da  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , è chiaro che queste sono tutte invarianti sotto le trasformazioni 22) e 23).

## PROBLEMA

Si noti che per  $n$  protoni  
 si ha  $\frac{n e}{n m_p} = \frac{e}{m_p} = 10^8 \text{ C/kg}$

Un fascio di protoni,  $\frac{e}{m_p} = 10^8 \text{ C/kg}$ , inizialmente a riposo, è accelerato da una d.d.p.  $V = 1.25 \text{ kV}$  e subito dopo entra, con velocità  $\vec{v} = v \vec{u}_y$  in  $O$ , origine degli assi cartesiani, in una regione di spazio  $R$  in cui vi è un campo magnetico  $B = 7 \text{ mT}$  uniforme e perpendicolare alle traiettorie dei protoni. Il fascio esce dalla regione  $R$  nel punto  $P_1$  deflesso dell'angolo  $\phi = 30^\circ$  rispetto alla direzione iniziale. Determinare

1. Le coordinate di  $P_1$
2. Il tempo impiegato a percorrere la traiettoria  $OP_1$
3. L'energia cinetica che dovrebbe avere in  $O$  un fascio di deuteroni,  $e/m_d = e/(2m_p)$  per percorrere la stessa traiettoria  $OP_1$



deutrone: nucleo  
 del deuterio  $n + p$   
 $= H^+ + n$   
 $m_n \sim m_p$   
 $n = \text{neutrone}$   
 $p = \text{protone}$

Si noti che la soluzione  
 è considerata solo per  
 $1n$  e  $1n+1p$ . Tutti  
 i protoni e neutroni  
 sono soggetti alle  
 stesse forze.

$$1. \ln 0 \quad \frac{1}{2} m_p v^2 = eV$$

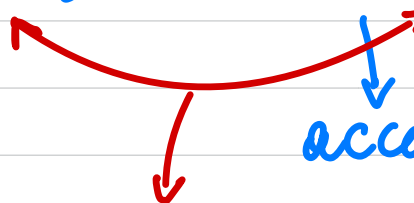
$$\rightarrow v = \sqrt{2 \frac{e}{m_p} V} = 5 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$$

inoltre, il raggio dell'arco di cerchio della traiettoria è

$$r = \frac{m_p v}{e B} = 0.71 m$$

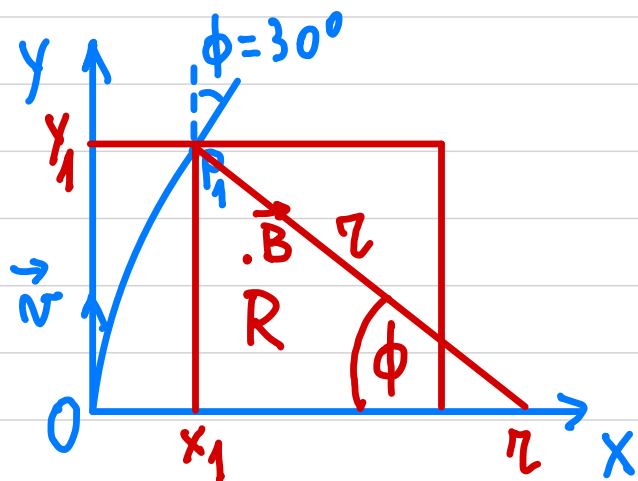
come segue dalle forze di Lorentz

$$F_L = q v B = m a = m \frac{v^2}{r}$$



$$\rightarrow q B = m \frac{v}{r} \rightarrow r = \frac{m v}{q B}$$

$$\phi = 30^\circ$$



$$x_1 = r (1 - \cos \phi) = 9.6 \text{ cm}$$

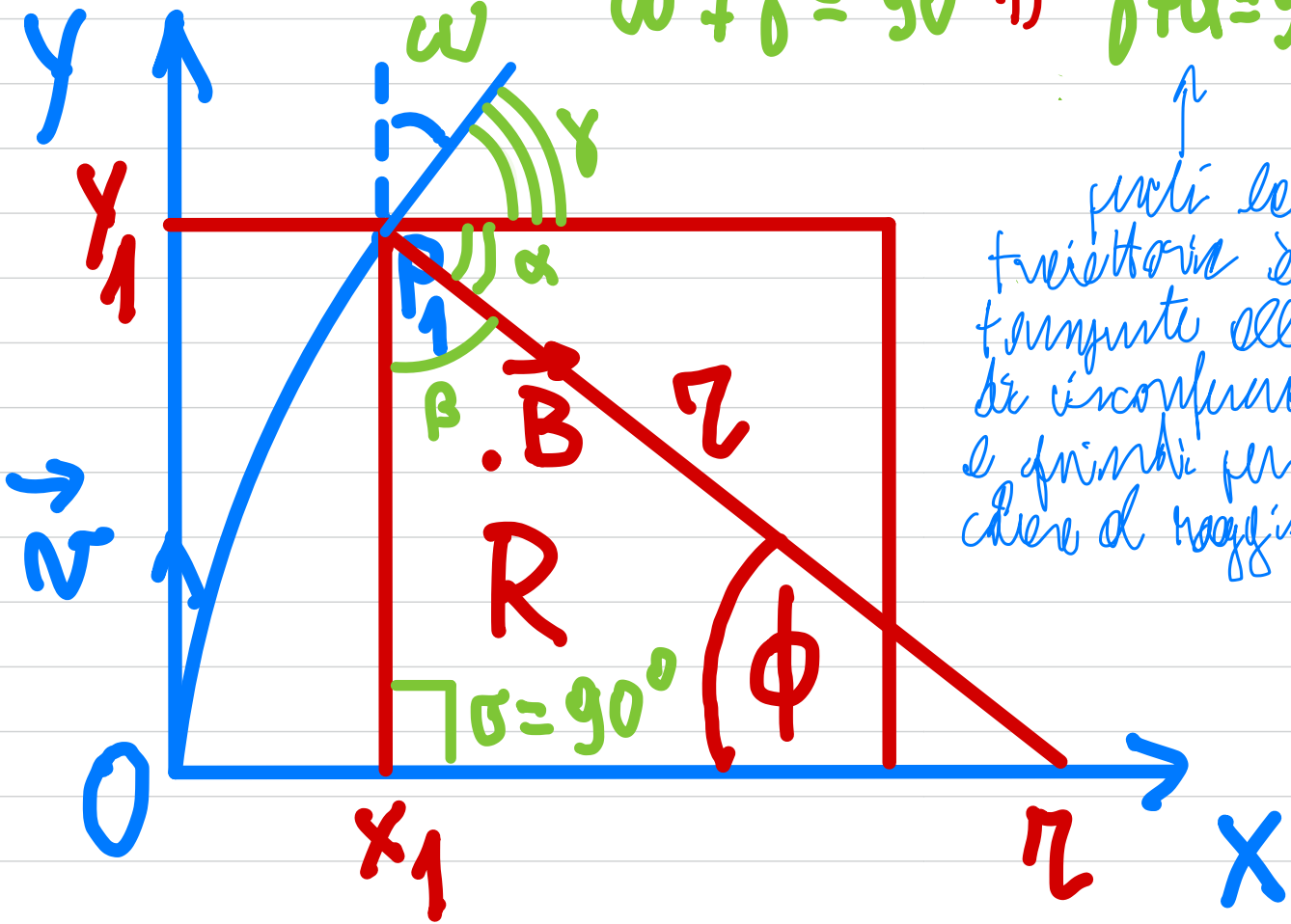
$$y_1 = r \sin \phi = 35.7 \text{ cm}$$

$$P_1 = (x_1, y_1)$$

$$\omega = \phi$$

$\alpha = \phi$ : per diu angolo  
alterni interni non

$$\omega + \gamma = 90^\circ \quad 1) \quad \gamma + \alpha = 90^\circ \quad 2)$$



tutti le  
 freccette e  
 fannulle all'oro  
 di cinghio  
 e frinchi perpendi  
 ch'è di nozze

1)+2)  $\rightarrow W \simeq \alpha$  e poiché  $\alpha = \phi$ , si ha  $W = \phi$

2. Perché la lunghezza di un arco di circonferenza è  $\phi r$ , con  $\phi$  espresso in radianti (lunghezza circonferenza =  $2\pi r$ ), quindi  
$$l_{\text{arco}} = 2\pi \frac{30}{360} r = \frac{\pi}{6} r$$
, per cui il tempo richiesto è

$$t = \frac{l_{\text{arco}}}{v} = \frac{\phi r}{v} = \frac{\pi r}{6v} = 0.75 \mu s$$

3. Per percorrere le stesse traiettorie, protoni e deutoni, si noti che la carica del deutone è la stessa di quella del protone, ma di massa doppia. Ripetendo lo stesso conto fatto nel punto 2. da

$$r_d = \frac{m_d v_d}{e B}$$

affinché questo sia uguale al raggio

della traiettoria è necessario che

$$m_d v_d = m_p v_p$$

ciò il fascio di deutoni deve avere la stessa quantità di moto. D'altronde

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p = \sqrt{2mE}$$

Quindi

$$p_p = \sqrt{2m_p E_p} = p_d = \sqrt{2m_d E_d}$$

→

$$E_d = \frac{m_p}{m_d} E_p = \frac{1}{2} E_p = 625 \text{ eV}$$

Nel prossimo problema considereremo un circuito con resistenza e condensatori. Vi richiedo quindi con il ricordare le espressioni di carica e scarica di un condensatore nel caso di un circuito R.C.

### CARICA

$$\begin{aligned} q(t) &= C \mathcal{E} (1 - e^{-t/RC}), & V_C(t) &= \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} (1 - e^{-t/RC}) \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}, & V_R(t) &= R i(t) = \mathcal{E} e^{-t/RC} \end{aligned} \quad **)$$

Nel processo di carica il generatore compie complessivamente il lavoro

$$W_{\text{gen}} = \int_0^{q_0} \mathcal{E} dq = \mathcal{E} q_0 = C \mathcal{E}^2$$

dove  $q_0 = q(t \rightarrow \infty) = C \mathcal{E}$ . Poiché  $\Delta U_E = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$ ,

dalla conservazione dell'energia segue che sulla

(.) L'energia potenziale è l'energia immagazzinata nel condensatore  $E_C = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$ .

resistenza viene dissipato l'energia  $\frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$ . Si  
può infatti verificare dalle \*\*\*) che in ogni  
istante  $P_{gen}(t) = P_R(t) + P_C(t)$ .

SCARICA

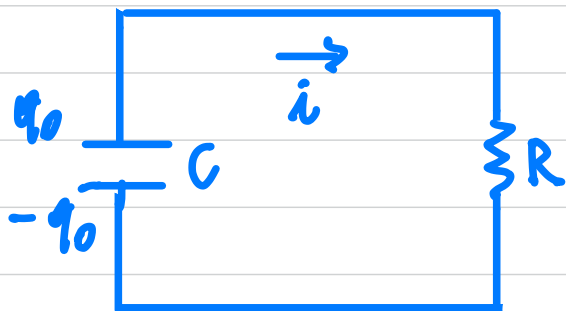
$$q_0 = C \mathcal{E}$$

$$q(t) = q_0 e^{-t/RC}, \quad V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/RC}$$

$$i(t) = - \frac{dq(t)}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = \frac{V_C}{R}$$

dove  $q_0 = C \mathcal{E}$  è la carica iniziale del condensatore ( $t=0$ ).

Nel processo di scarica non c'è più il generatore e  
l'unica energia è quella immagazzinata nel  
condensatore



Nel processo di scarica, tutta l'energia nel  
condensatore, pari a  $\frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$ , viene dissipata nella  
resistenza.

## PROBLEMA 1

Due condensatori di capacità  $C_1 = 20 \text{ nF}$  e  $C_2 = 18 \text{ nF}$  e due resistori  $R_1 = 50 \Omega$  e  $R_2 = 100 \Omega$  sono collegati ad un generatore che fornisce la f.e.m.  $\mathcal{E}$ . Con l'interruttore  $T$  chiuso nel sistema di condensatori è immagazzinata a regime <sup>fine carica</sup> l'energia elettrostatica  $U_e = 1.9 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ . Calcolare

1.  $\mathcal{E}$

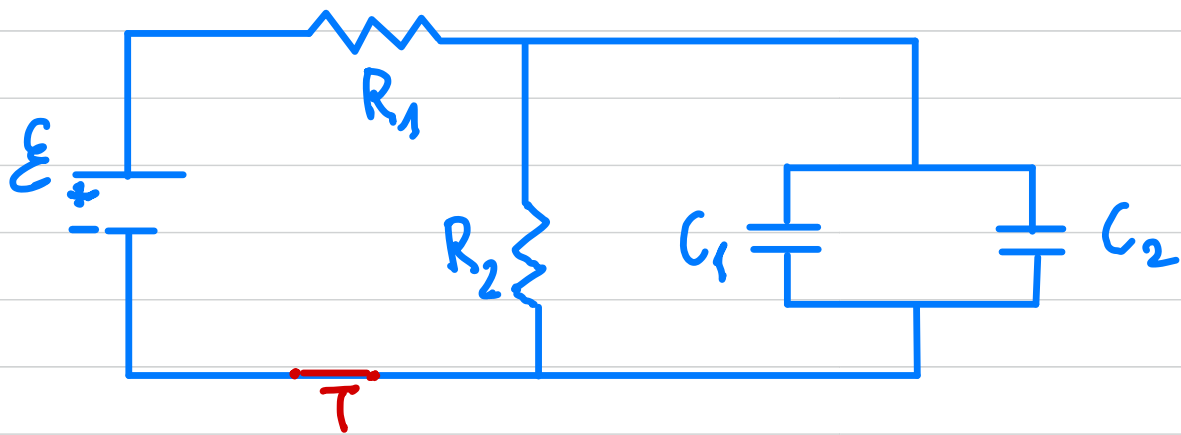
lo spazio interno a  $C_2$  viene completamente riempito con un dielettrico con  $\kappa = 3$ . Calcolare

2. la variazione di energia elettrostatica

3. la carica di polarizzazione sulla superficie del dielettrico

$T$  viene aperto e il sistema inizia a scaricarsi. Calcolare

4. il tempo in cui si dimezza l'energia elettrostatica del sistema



Prima di risalire ricordiamo il concetto di densità di carica sulla superficie di una lastra di dielettrico.

All'interno del dielettrico di un condensatore piano si ha ( $h$  = distanza tra le armature)

$$E_k = \frac{V_k}{h} = \frac{V_0}{kh} = \frac{E_0}{k} = \frac{\sigma_0}{k\epsilon_0}, \quad k \geq 1$$

$$\Delta E = E_0 - E_k = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{k\epsilon_0} = \frac{k-1}{k} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\chi}{1+\chi} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

dove

$$\chi = k - 1$$

è la suscettività elettrica del dielettrico. Quindi,

$$E_k = E_0 + (E_k - E_0) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{k-1}{k} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

dove

$$\sigma_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0$$

\*)

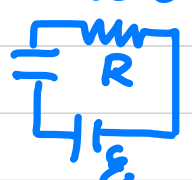
L'espressione di  $E_n$  è la stessa di quella di un campo elettrico nel vuoto corrispondente alla somma di due campi elettrici. Il primo  $\vec{E}_0$  generato dalle cariche libere, e il secondo generato da una distribuzione di carica  $\sigma_p$  di segno opposto rispetto a  $\sigma_0$  e disposta sulle facce del dielettrico:



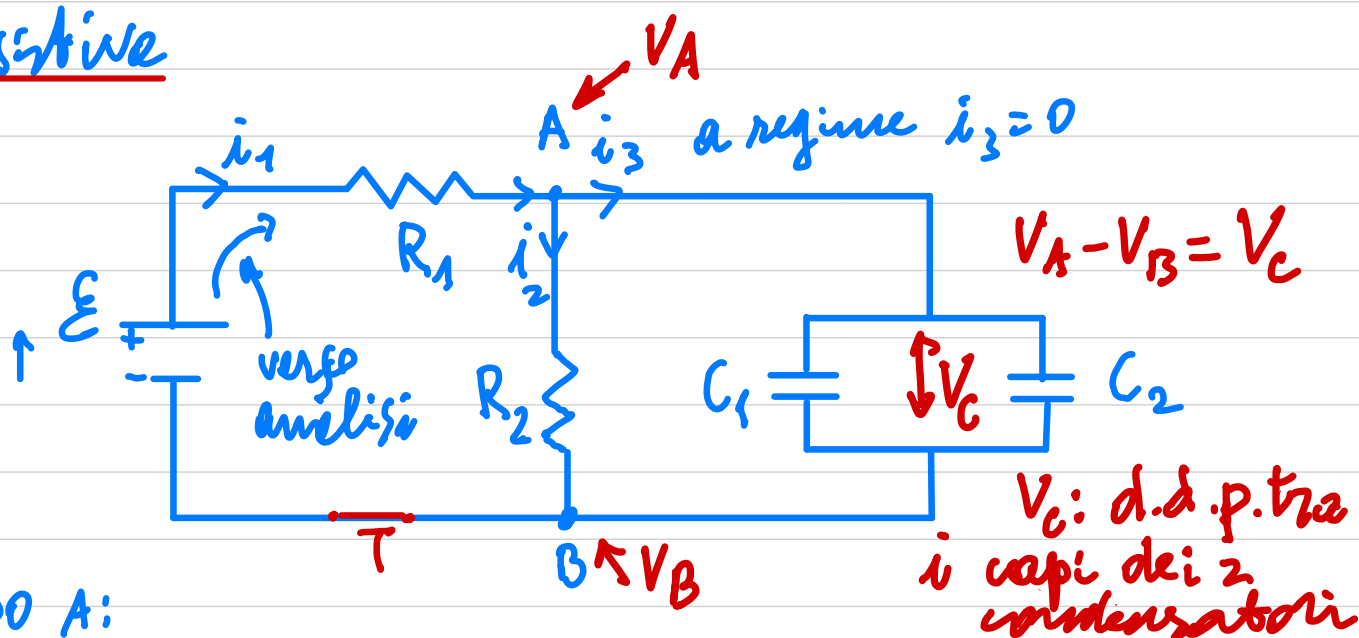
Moltiplicando la relazione tra  $\sigma_p$  e  $\sigma_0$  in \*) per l'area delle armature, si ha

$$q_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q_0$$

dove  $q_p$  è detta carica di polarizzazione.

Si noti che nel caso del problema il circuito è diverso da un semplice circuito RC: 

D'altronde, anche in questo caso, a fine carica la corrente circolante ai capi dei condensatori è nulla. Questo significa che a regime la corrente circola solo nelle maglie puramente resistive



NODO A:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$i_3 = 0 \rightarrow i_2 = i_1 \quad 1)$$

MAGLIA RESISTIVA:

$$\cancel{V_B} + \mathcal{E} - i_1 R_1 - i_2 R_2 = \cancel{V_B} \quad 2)$$

$$1) + 2) \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} \quad 3) \text{ dove } i \equiv i_1 = i_2$$

MAGLIA CONDENSATORI: non ci sono correnti.

Comunque, poiché i conduttori sono equipotenziali, si ha  $V_A - V_B = \text{d.d.p. ai capi dei condensatori}$ ; scegliendo  $V_B = 0$

$$V_A = V_C$$

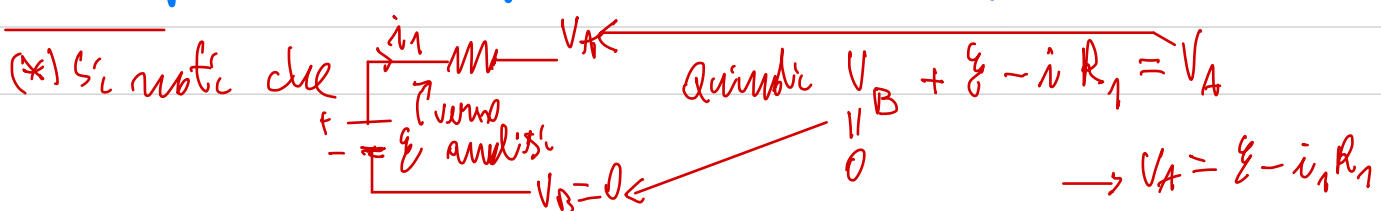
D'altronde (\*)  $V_A = \mathcal{E} - i_1 R_1$ , ed avendo denotato  $i_1$  con  $i$ , si ha, usando la 3):  $i = \mathcal{E} / (R_1 + R_2)$ ,

$$V_C = \mathcal{E} - i R_1 = \mathcal{E} - \mathcal{E} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

cioè

$$V_C = \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Si noti che i due condensatori sono in parallelo, per cui la capacità equivale



lente è

$$C = C_1 + C_2$$

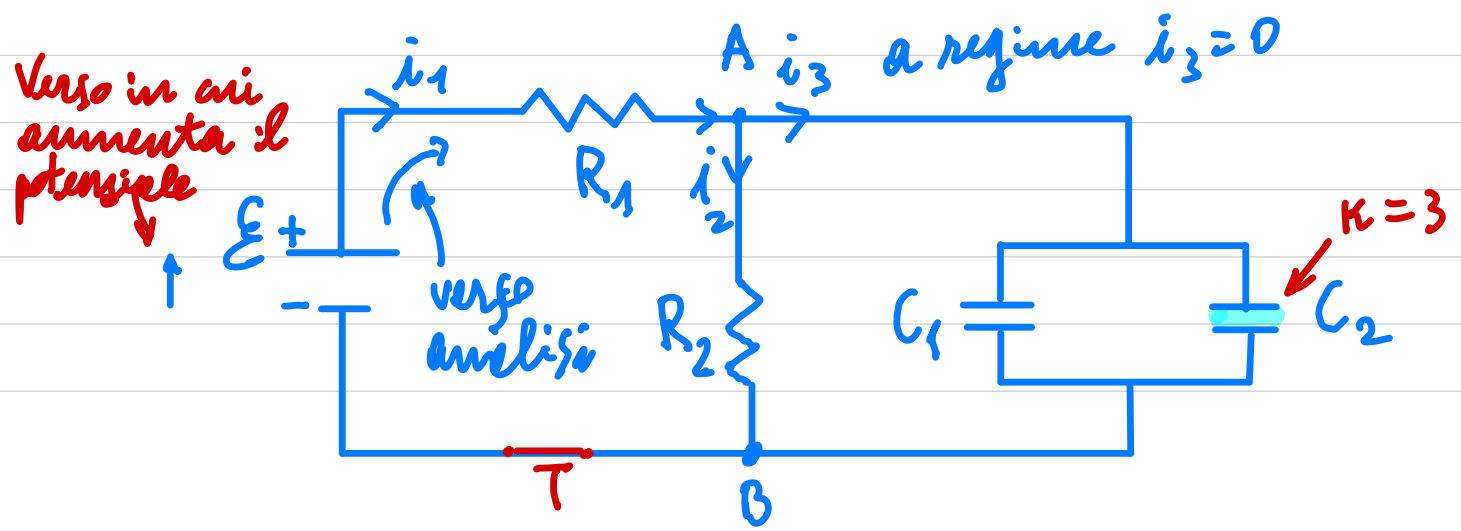
per cui l'energia elettrostatica dei condensatori è

$$U_e = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) V_C^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left( \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2$$

quindi

$$\mathcal{E} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \sqrt{\frac{2 U_e}{C_1 + C_2}} = 150 \text{ V}$$

2. Nella nuova configurazione il condensatore di capacità  $C_2$  è riempito da un dielettrico con  $K=3$



Questo è l'unico cambiamento, per cui

$$\Delta U_e = U_{e,f} - U_{e,i} = \frac{1}{2} (\kappa C_2 - C_2) V_C^2 = \frac{C_2 (\kappa - 1)}{2} V_C^2 = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

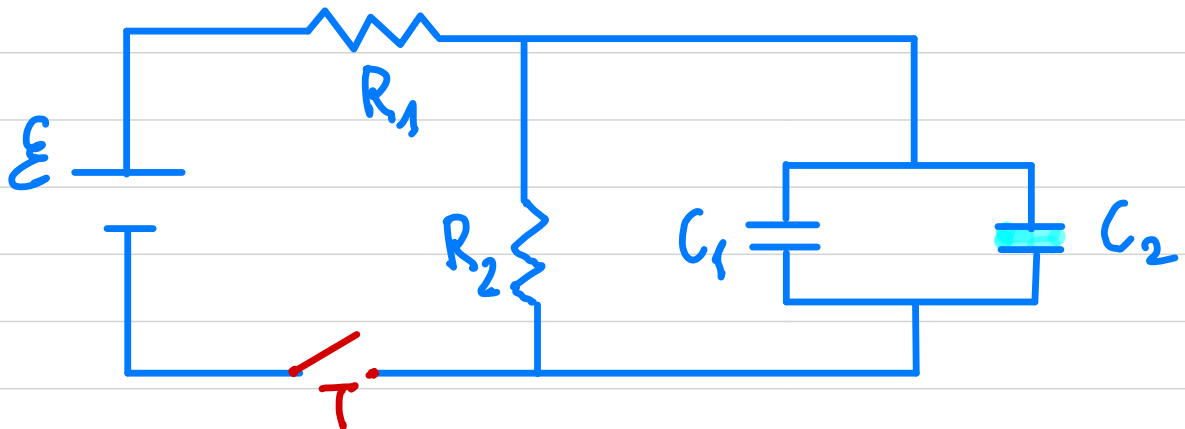
3. la carica del condensatore con il dielettrico è

$$q_2 = \kappa C_2 V_C$$

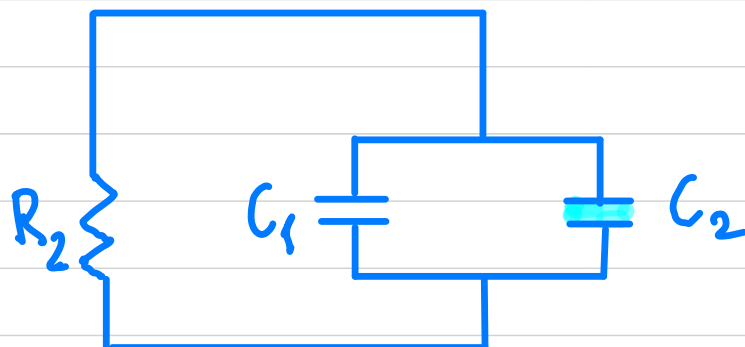
quindi

$$q_{2,p} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q_2 = (\kappa - 1) C_2 V_C = 3.6 \mu\text{C}$$

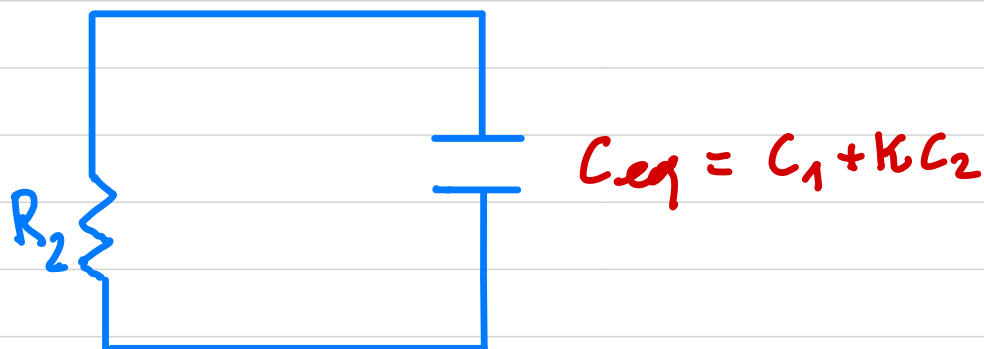
4. Ora l'interruttore è aperto



Questo circuito è equivalente al circuito RC  
in fase di scarica



dove i due condensatori sono sostituiti da un  
unico condensatore di capacità equivalente



Notazione:

$U_0, q_0$ : energia elettrostatica e carica all'istante  
iniziale

$U_{1/2}, q_{1/2}$ : energia elettrostatica e carica all'istante  $t_{1/2}$   
in cui l'energia elettrostatica si dimezza.

Si ha

$$2 = \frac{U_0}{U_{1/2}} = \frac{q_0^2 / (2C_{eq})}{q_{1/2}^2 / (2C_{eq})} = \left( \frac{q_0}{q_{1/2}} \right)^2$$

dove  $C_{eq} = C_1 + K C_2$ .

D'altronde

$$q_{1/2} = q_0 e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau}}, \quad \tau := R_2 C_{eq} = 7.4 \mu s$$

Quindi

$$e^{2 \frac{t_{1/2}}{\tau}} = 2 \rightarrow$$

$$\ln e^{2 t_{1/2} / \tau} = \ln 2 \rightarrow 2 \frac{t_{1/2}}{\tau} = \ln 2$$

$$t_{1/2} = \frac{\tau}{2} \ln 2 = 2.56 \mu s$$

## PROBLEMA 2

Determinare una possibile funzione  $f(x, y, z)$ , tale per cui il campo vettoriale

$$\vec{E} = C(yf, xf, xy) \quad 1)$$

con  $C$  una costante, è conservativo.

$\vec{E}$  è conservativo se e solo se  $\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ ,

$\forall \gamma \mid \partial\gamma = \emptyset$ . Equivalientemente, se e solo se

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Queste sono 3 equazioni

Componente di  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$



$$x: \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$y: \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

$$z: \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

2)

Sostituendo 1) in 2) si ha per la componente  $x$

$$x: x - x \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

che implica

$$f = z + g(x, y) \quad 3)$$

con  $g$  una qualche funzione di  $x, y$ .

La condizione dovuta alla componente  $y$  è soddisfatta per qualsiasi  $g(x, y)$

$$\frac{\partial [y(z + g(x, y))]}{\partial z} - \frac{\partial xy}{\partial x} = y - y = 0$$

La condizione dovuta alla componente  $z$  è

$$\frac{\partial [x(z + g(x, y))]}{\partial x} - \frac{\partial [y(z + g(x, y))]}{\partial y} = 0$$

$$z + g(x, y) + x \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - y - y \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0$$

che ha come possibile soluzione  $g = 0$ .

Quindi

$$f(x, y, z) = z$$

cioè  $\vec{E} = C(yz, xz, xy)$ . D'altronde  $(yz, xz, xy) = \vec{\nabla}(xyz)$ ,

per cui

$$\vec{E} = C\vec{\nabla}(xyz) = -\vec{\nabla}V$$

con  $V = -Cxyz$