

## LEZIONE 23

16.04.2026

Campo magnetico generato da una corrente, legge di Ampère - Laplace

Campo magnetico generato da una carica in moto

Campi magnetici generati da circuiti particolari. legge di Biot-Savart. Spire circolari. Solenoide rettilineo.

Azioni elettrodinamiche tra fili percorsi da corrente

legge di Ampère

legge di Ampère in forma locale

Absence di monopoli:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \leftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\mu_0 = 4\pi K_m = 1.26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad \text{Henry}$$

$$H = \frac{Vs}{A} = \Omega s$$

Si ha quindi

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i ds}{r^2} \vec{u}_t \times \vec{u}_r \quad 9)$$

Si osservi l'analogia con la legge di Coulomb. A tal fine riscriviamo la legge di Coulomb in versione infinitesimale mostrando le analogie con i singoli termini della 9)

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i ds}{r^2} \vec{u}_t \times \vec{u}_r$$

|                      |                       |                              |
|----------------------|-----------------------|------------------------------|
| $d\vec{E}$           | $\longleftrightarrow$ | $d\vec{B}$                   |
| $dq$                 | $\longleftrightarrow$ | $i ds$                       |
| $\frac{1}{r^2}$      | $\longleftrightarrow$ | $\frac{1}{r^2}$              |
| $\vec{u}_r$          | $\longleftrightarrow$ | $\vec{u}_t \times \vec{u}_r$ |
| $\frac{\mu_0}{4\pi}$ | $\longleftrightarrow$ | $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$   |

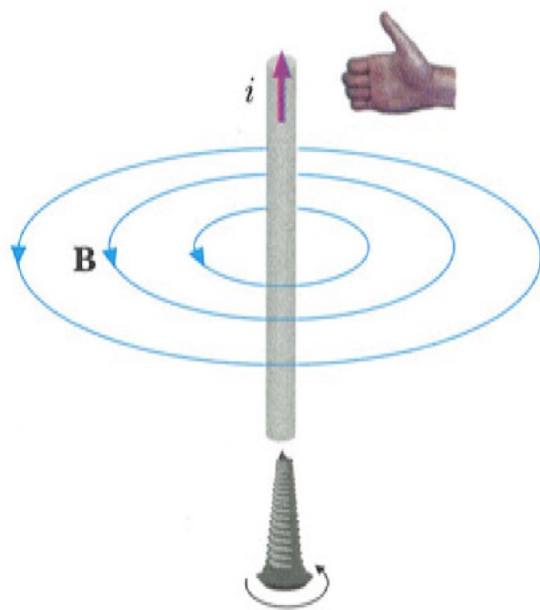
$i ds$  include un aspetto dinamico (la corrente) assente in  $dq$ .  $\vec{u}_t \times \vec{u}_r$  è perpendicolare a  $\vec{u}_r$ . Esiste una trasformazione del sistema di riferimento che connette  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ ? Sì, i corrisponde a cariche in movimento: relatività ristretta.

Il campo magnetico generato da un filo conduttore chiuso percorso da una corrente che è indipendente del punto è

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

relazione nota come legge di Ampère - Laplace.

Regole della mano destra



**Figura 7.2**

Linee di campo magnetico di un filo indefinito percorso da corrente.

## Campo magnetico generato da una carica in moto

Poiché una carica in moto definisce una corrente, si ha che questo genera un campo magnetico. Infatti, essendo  $i = j \Sigma$  e  $\vec{j} = n q \vec{v}$ , dalla 9) seg.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{r} \times \vec{v}}{r^2} n d\tau \quad d\tau = \Sigma ds$$

dove  $n d\tau$  è il numero di cariche nel volume  $d\tau = \Sigma ds$ . Nel caso di una singola carica si ha

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$$

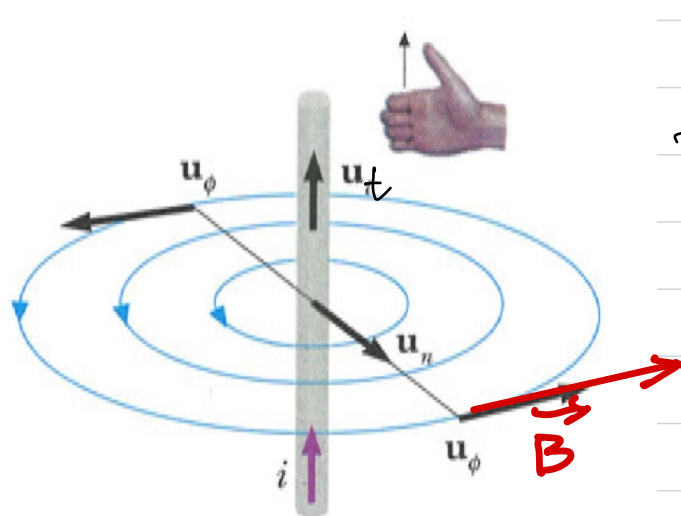
valide nel caso di velocità piccole rispetto alle velocità della luce  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Più precisamente quando  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$ .

# $\vec{B}$ generato da circuiti particolari

Di seguito riportiamo le espressioni del campo magnetico generato da alcuni semplici circuiti. Per la dimostrazione si rimanda al libro di testo.

## FILO DI LUNGHEZZA INFINITA: LEGGE DI BIOT-SAVART

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_t \times \vec{u}_r$$



$\vec{u}_t$ : vettore tangente

$$\vec{B} \parallel \vec{u}_\phi$$

**Figura 7.4**  
Legge di Biot-Savart.

## SPIRA CIRCOLARE

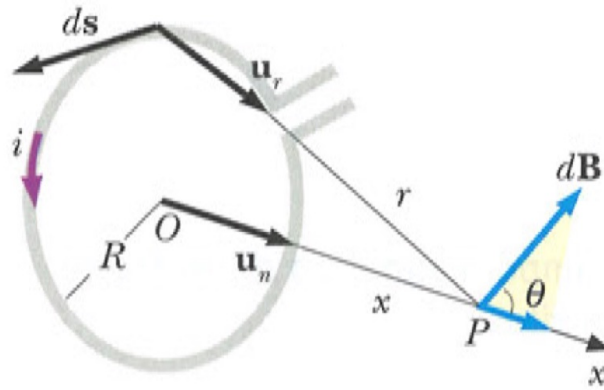


Figura 7.6

Calcolo del campo magnetico sull'asse di una spira circolare percorsa da corrente.

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_n$$

10)

$\vec{B}$  nel centro delle spire

$$\vec{B}_{max} = \frac{\mu_0 i}{2R} \vec{u}_n$$

N.B. Tale risultato va inteso nel senso del limite  $x \rightarrow 0^+$ . Nel caso  $x \rightarrow 0^-$  il verso di  $\vec{B}$  è opposto.

si noti che per  $x \gg R$  la 10) diventa

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} \vec{u}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{M}}{x^3} \quad (11)$$

dove

$$\vec{M} = i \sum \vec{u}_M = i \pi R^2 \vec{u}_M$$

è il momento magnetico della spira.

La 11) ha la stessa forma del campo elettrico generato da un dipolo, che, come abbiamo visto, è

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{P}}{x^3}$$

## $\vec{B}$ in un solenoide rettilineo

SOLENOIDE: filo conduttore avvolto a forma di elica di piccolo passo.

$d$  = lunghezza solenoide

$N$  = # di spire

$n = N/d$  : # di spire per unità di lunghezza

$R$  = raggio del solenoide

spire molto vicine:

$n dx$  spire in  $dx$

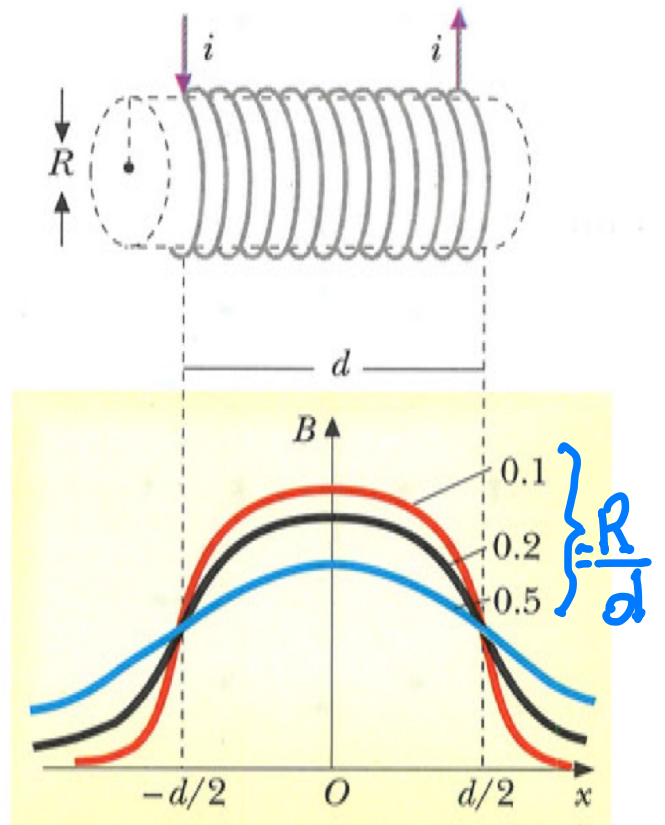


Figura 7.10

Campo magnetico sull'asse di un solenoide per alcuni valori di  $R/d$  (raggio del solenoide/lunghezza del solenoide).

Dall'espressione 10) del campo magnetico sull'asse  
di una spira, cioè ( $r = \sqrt{x^2 + R^2}$ )

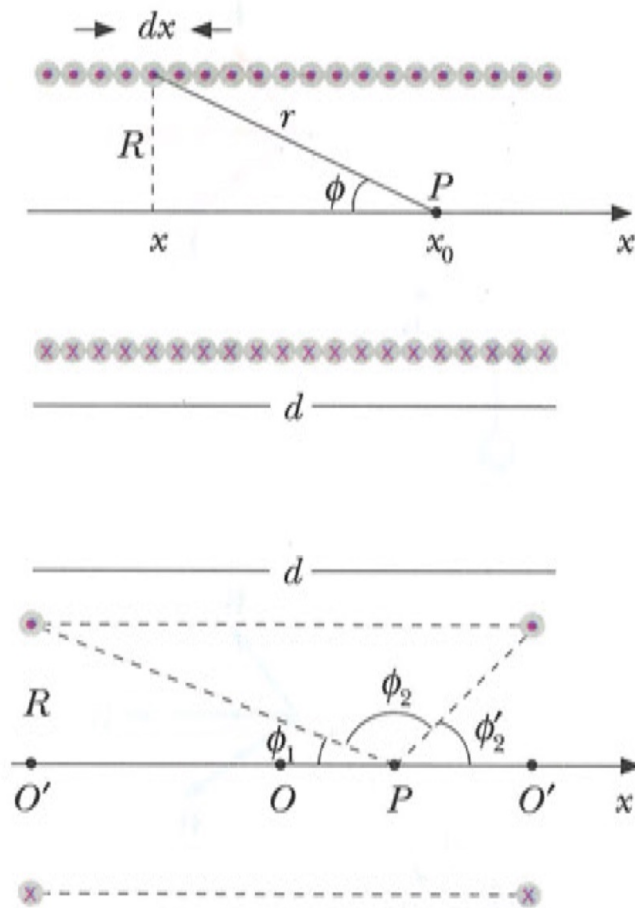
$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2 r^3} \vec{u}_m$$

segue che il modello del campo magnetico  
infinitesimo in un punto P sull'asse del  
solenoide percorso da una corrente  $n i dx$ ,

$n = \#$  spire per unità di lunghezza,  $n = N/d$

(N.B. ogni spira è percorsa dalla corrente  $i$ , per cui  
 $n dx$  spire possono esser considerate come un  
conduttore percorso dalla corrente  $n i dx$ )

$$d\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 n i R^2}{2 r^3} dx$$



**Figura 7.9**

Calcolo del campo magnetico sull'asse di un solenoide.

Campo magnetico sull'asse del solenoide:

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \phi_1 + \cos \phi'_2)$$

che è massimo nel centro  $O$  del solenoide

$$B_0 = \mu_0 n i \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}}$$

Nel limite di lunghezze infinite, quindi  
con buona approssimazione quando

$$d \gg R$$

si ha

$$B_{\infty} = \mu_0 n i$$

verso di  $\vec{B}$ : regola della mano destra  
applicato al verso delle corrente.

## Forse tre fili percorsi da corrente

Ricordiamo la seconda legge elementare di Laplace:

$$\vec{dF} = i d\vec{s} \times \vec{B} \quad (*) \quad \begin{array}{l} \text{forza magnetica su} \\ \text{un filopercorso da } i \text{ e} \\ \text{sogetto a } \vec{B}. \end{array}$$

che segue dalle forze di Lorentz

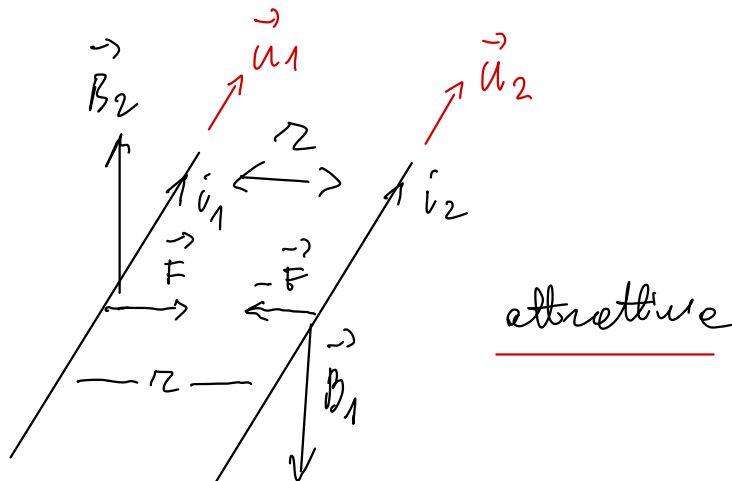
$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Consideriamo due fili conduttori <sup>rettilinei</sup> molto lunghi e vicini ( $r \ll L$ ), percorsi delle correnti  $i_1$  e  $i_2$ .

Caso in cui siano paralleli.

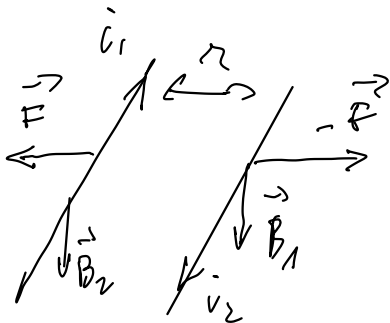
Ciascun tratto di filo di lunghezza  $ds_2$  percorso della corrente  $i_2$ , risente della forza  $d\vec{F}_{12}$  esercitata dal campo magnetico  $\vec{B}_1$  prodotto dal filo percorso dalla corrente  $i_1$ .

$$d\vec{F}_{12} = i_2 d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1 = i_2 ds_2 \vec{u}_2 \times \vec{B}_1$$



la forza per unità di lunghezza è

$$\vec{F}_{1,2} = i_2 \vec{u}_2 \times \vec{B}_1 \quad (\text{N.B. l'unità di misura di } \vec{F}_{1,2} \text{ è } \frac{\text{N}}{\text{m}})$$



repulsive

Si ha anche

$$\vec{F}_{2,1} = i_1 \vec{u}_1 \times \vec{B}_2$$

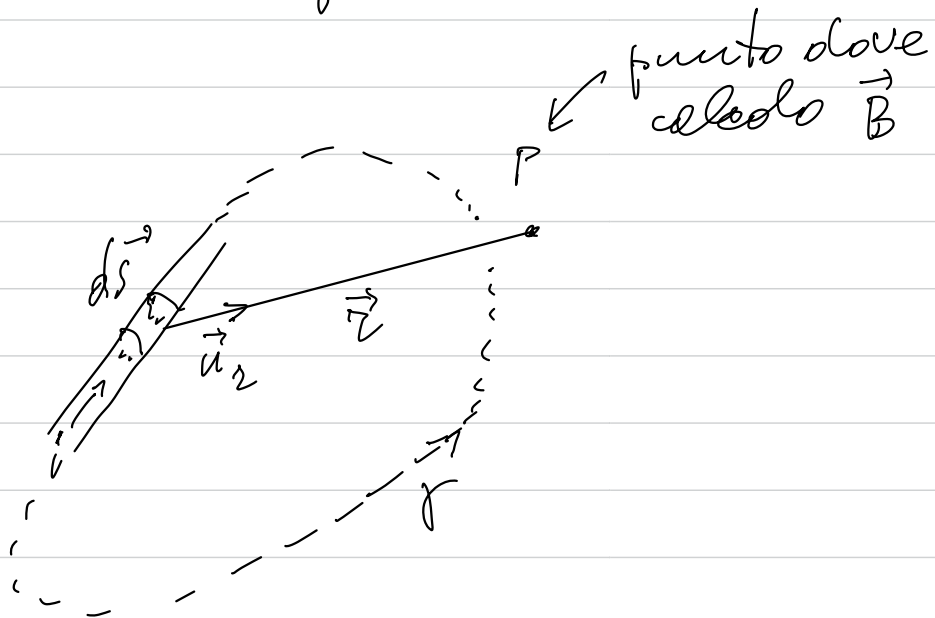
I valori dei campi  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  sono dati dalle leggi di Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{u}_\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{u}_t \times \vec{u}_n \Rightarrow F_{1,2} = F_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi R}$$

# LEGGE DI AMPÈRE

Abbiamo visto che il campo magnetico generato da un circuito chiuso  $\gamma$  è

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad \leftarrow \text{legge di Ampère-Laplace}$$



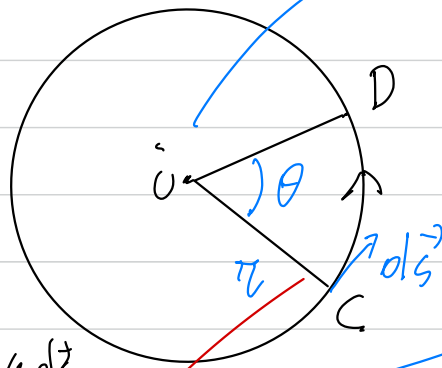
Abbiamo anche visto che il campo generato da un filo 'infinito' (= rettilineo e di lunghezza infinita) è dato da (BIOT-SAVART)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Consideriamo

corrente uscente  
dal foglio

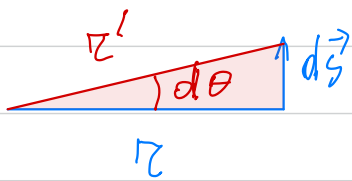
Vettori entranti:  
nel foglio "x"  
uscanti " "



$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} (\theta_D - \theta_C) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \theta \quad (12)$$

$$ds = r d\theta$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$



$$ds = r' \sin \theta d\theta \approx r \sin \theta d\theta \approx r d\theta$$

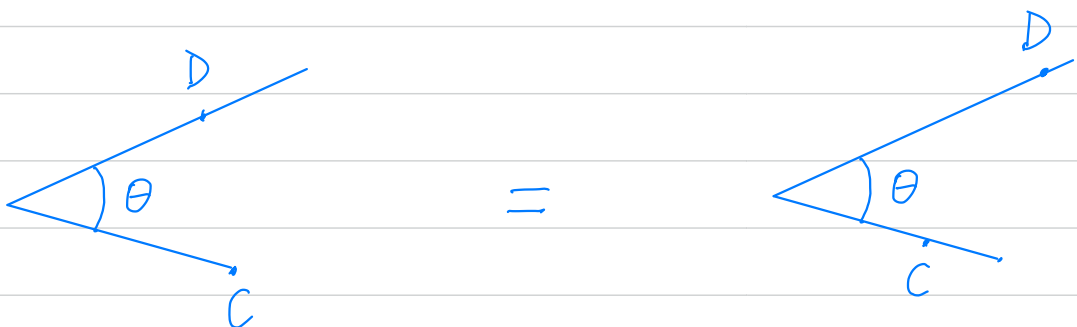
Nel caso di una circonferenza si ha  $r$  indipendente da  $\theta$ , e la lunghezza

de l'arco di cerchio è  $s = r\theta$ . D'altronde  $ds = \frac{ds}{dr} dr + \frac{ds}{d\theta} d\theta$ ,

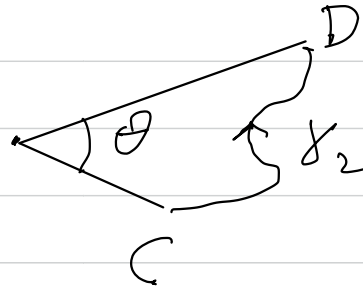
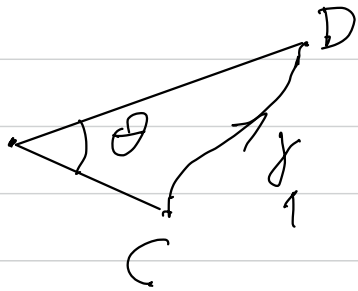
ed essendo  $r$  costante si ha  $\frac{ds}{dr} = 0$ , da cui  $ds = \frac{ds}{d\theta} d\theta = r d\theta$ .

La 12) mostra che tutte le coppie di punti con lo stesso

angolo danno lo stesso risultato



Inoltre, l'integrale  $\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s}$  non dipende dal percorso. Quindi gli integrali con contorni d'integrazione diversi coincidono

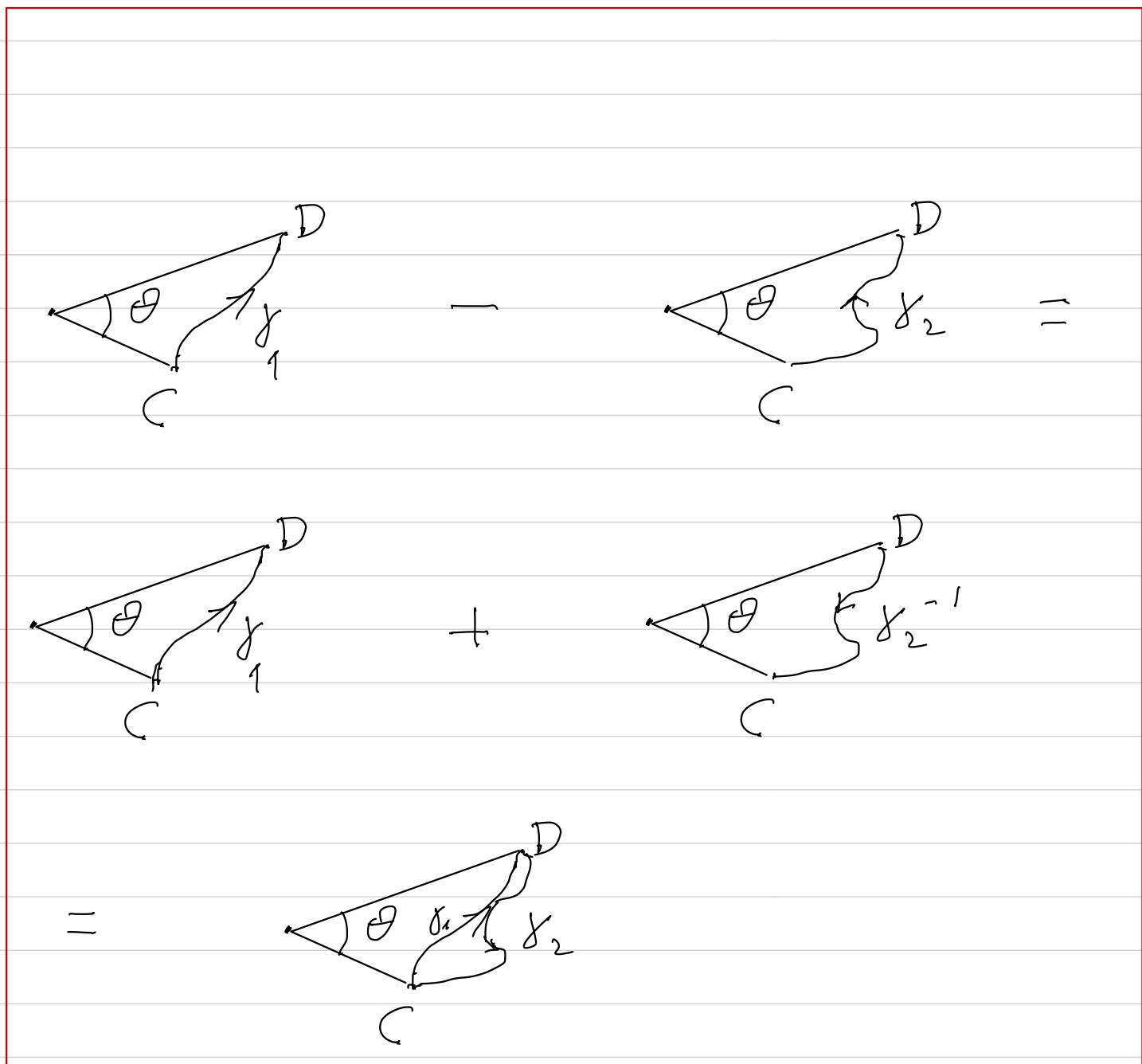


$$\int_{C\gamma_1}^D \vec{B} \cdot d\vec{s} - \int_{C\gamma_2}^D \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

D'altronde

$$\int_{C\gamma_1}^D - \int_{C\gamma_2}^D = \int_{C\gamma_1}^D + \int_{C\gamma_2^{-1}}^D$$

dove  $\gamma^{-1}$  indica il cammino  $\gamma$  percorso in senso opposto



da cui segue che se  $\gamma$  non racchiude alcuna corrente

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Osservazione: questo risultato è una versione "fisica" del teorema dei residui dell'analisi complessa.

Si ha quindi

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \theta$$

legge di Ampère

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

Qualsiasi  $\gamma$  che  
contenga il  
conduttore

Riassumiamo la procedura che ha portato alla legge di Ampère, che costituisce una delle quattro equazioni di Maxwell (senza la corrente di spostamento, che sarà introdotta in seguito).

I legge elementare di Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i ds}{r^2} \vec{u}_t \times \vec{u}_r$$



legge di Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$



legge di Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

la legge di Ampère finiva una relazione tra la corrente  $i$  e il campo magnetico che genera, questa è il corrispettivo magnetico delle relazione tra la carica  $q$  e il campo elettrico che genera

$$\vec{E} \leftrightarrow q: \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\forall \Sigma \mid \partial \Sigma = \phi$$

" $q$ : carica racchiusa"

$\uparrow$   
 $\Sigma$  2 dimensioni

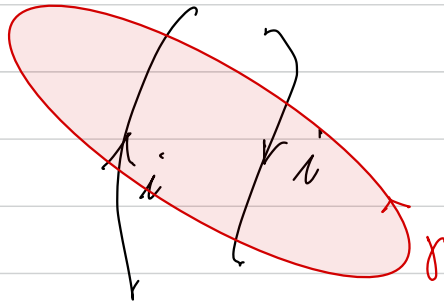
$$\vec{B} \leftrightarrow i: \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

$$\forall \gamma \mid \partial \gamma = \phi$$

" $i$ : corrente concatenata"

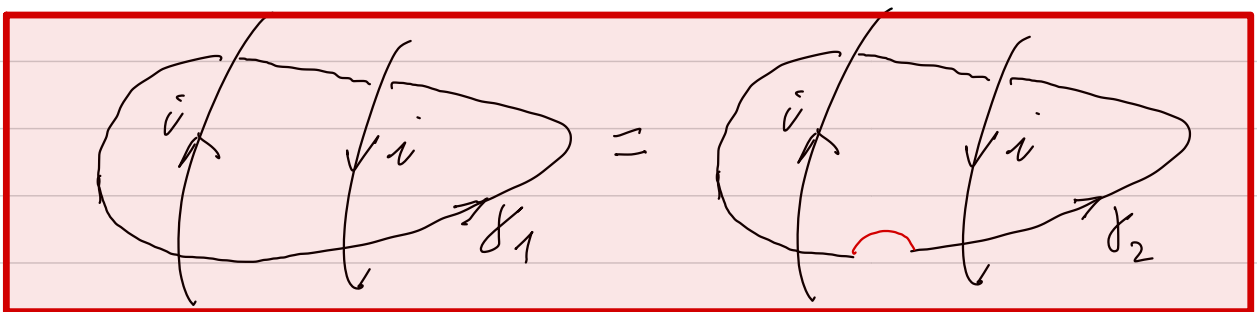
$\uparrow$   
 $\gamma$  1 dimensione

Consideriamo ora il caso di due fili conduttori percorsi dalle stesse correnti  $i$  ma di verso opposto



$\gamma$ : contorno chiuso con due correnti concatenate.

De quanto visto, possiamo deformare il contorno con continuità senza cambiare il valore di  $\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s}$ , a patto che non si scavalchino i conduttori



la "differenza" tra i due contorni equivale a un contorno chiuso  $\gamma_3$

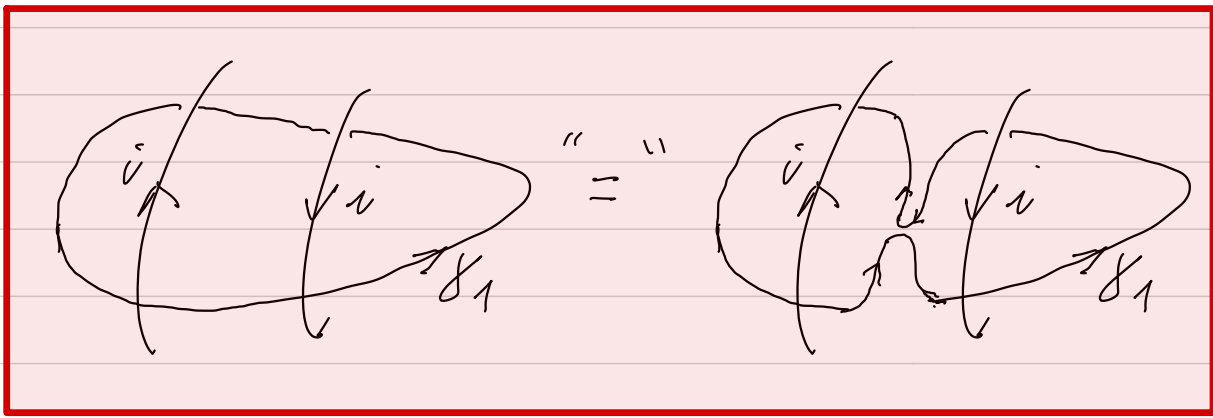
$$\gamma_1 + \gamma_2^{-1} = \gamma_3 \quad \therefore \quad \text{diagram of a closed loop}$$

The diagram shows a small red closed loop with a clockwise arrow, representing the contour  $\gamma_3$ .

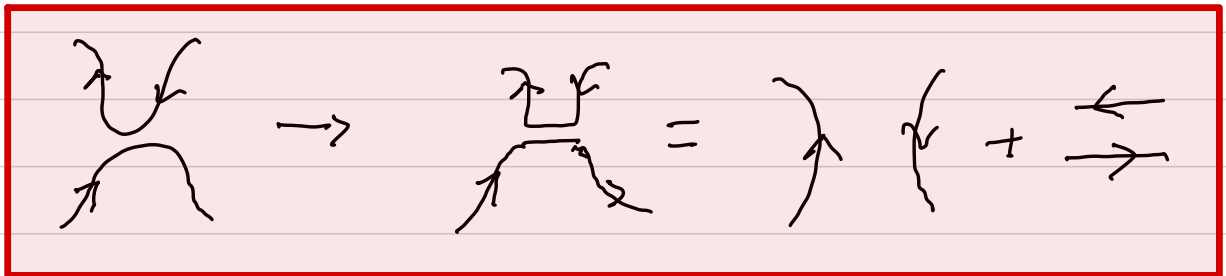
e poiché  $\gamma_3$  non racchiude correnti, si ha

$$\oint_{\gamma_3} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Definiamo quindi  $\gamma_1$  nel modo seguente



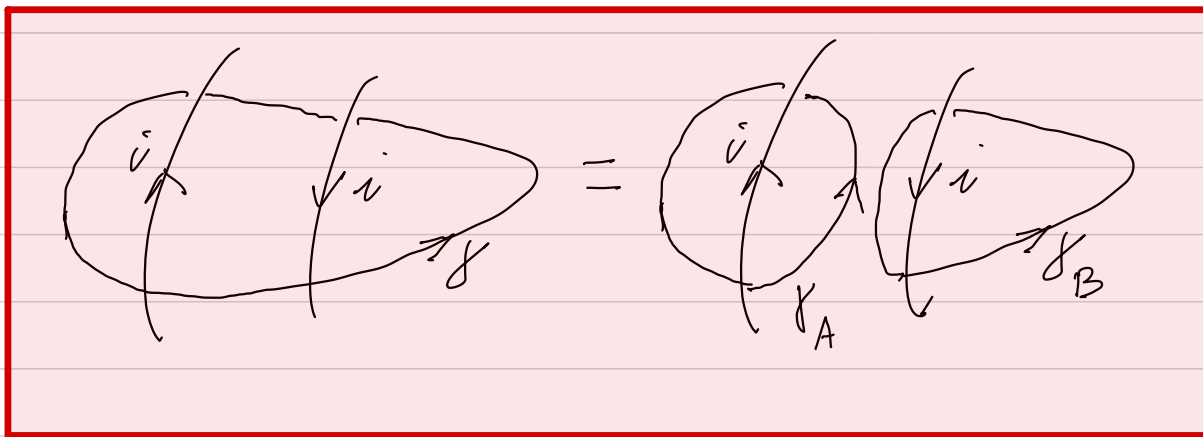
Nel limite



D'altronde

$$\int_{\leftarrow} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{\rightarrow} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{\leftarrow} \vec{B} \cdot d\vec{s} - \int_{\leftarrow} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

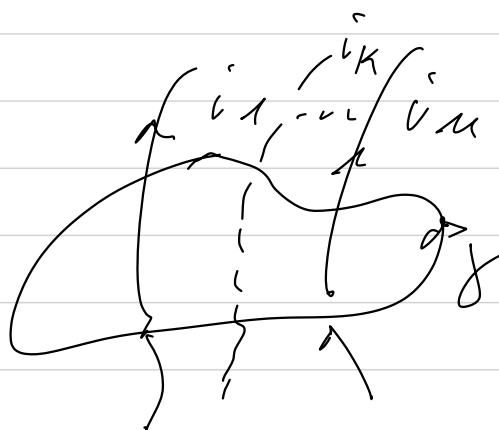
da cui segue



$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_{\gamma_A} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \oint_{\gamma_B} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$\mu_0 i \quad \quad \mu_0 i \quad \quad = 0$

Nel caso di  $n$  correnti



$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{k=1}^n i_k$$

dove le correnti vanno considerate con il segno corrispondente al loro verso.

# FORMA LOCALE DELLA LEGGE DI AMPÈRE

"locale": espressione che dipende dal punto nello spazio. Contrapposto a "non locale": integrale. Gli integrali in ogni dimensione hanno informazioni su insiemi estesi.

D'altronde c'è una sorta di dualità tra informazione locale e globale: dovuta al teorema di Stokes e a quello della divergenza.

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i \leftarrow \text{VERA PER QUALSIASI } \gamma \mid \partial\gamma = \emptyset, \text{ QUINDI}$$

$$\int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\Sigma} = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} \leftarrow \text{VERA PER QUALSIASI } \Sigma$$

$$\Sigma \mid \partial\Sigma = \gamma$$

ve osservato che  $\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}$

$$= \int_{\Sigma_0} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} \quad \text{dove } \Sigma_0 \text{ è la regione dove } \vec{J} \neq \vec{0}$$

analogo a  $\int_V \rho d\tau = \int_{V_0} \rho d\tau$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Ricordiamo anche la legge di Gauss

per  $\vec{B}$ : no monopoles  $\Rightarrow$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0 \quad \forall \Sigma \mid \partial \Sigma = \emptyset$$

$$\Rightarrow \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d\tau, \quad \partial V = \Sigma$$

$\uparrow$  vale per qualsiasi  $\Sigma \mid \partial \Sigma = \emptyset \rightarrow$  vale  $\forall V$

Ma se

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d\tau = 0 \quad \forall V$$

allora

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$\epsilon_0, \mu_0$  e la velocità della luce:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

Mostriamo che  $c$  è la velocità delle onde elettromagnetiche. Il che implica che la luce corrisponde a onde elettromagnetiche.