

LEZIONE 22

15.04.2026

Forze magnetiche su un conduttore percorso da corrente, seconda legge elementare di Laplace

Moto in un campo magnetico uniforme

Momenti meccanici in circuiti piani.
Momento magnetico

Campo magnetico generato da una corrente, prima legge elementare di Laplace.

FORZA MAGNETICA SU UN CONDOTTORE PERCORSO DA CORRENTE

Tipicamente in un conduttore metallico la corrente è dovuta ad elettroni liberi. Abbiamo visto che la densità di corrente è

$$\vec{J} = -n e \vec{v}_d$$

dove $-e < 0$ è la carica dell'elettrone, n il numero di elettroni liberi per unità di volume e $\vec{v}_d$ la velocità di deriva.

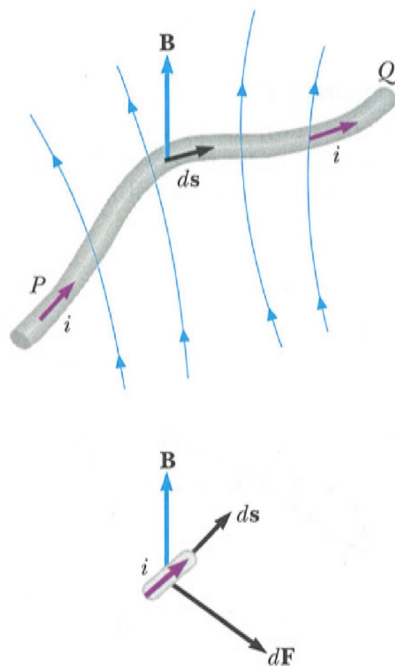


Figura 6.16

Forza su un elemento di conduttore percorso da corrente in un campo magnetico.

su ciascun elettrone agisce la forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = -e \vec{v}_d \times \vec{B}$$

Gli elettroni urtano gli ioni fissi trasmettendo in tal modo la forza al conduttore.

In un tratto ds del filo, con sezione Σ vi sono

$n \underbrace{\Sigma ds}_{\text{volume infinitesimo}}$ elettroni, per cui

$$d\vec{F} = n \Sigma ds \vec{F}_L = -(\Sigma ds) n e \vec{v}_d \times \vec{B} = \Sigma ds \vec{j} \times \vec{B} \quad 1)$$

Nel caso di un conduttore filiforme, la corrente è $i = j \Sigma$. D'altronde $\vec{j}$ ha la stessa direzione del filo, per cui possiamo scegliere $d\vec{s}$ parallelo a $\vec{j}$. In tal modo si ha che la 1) diventa la **seconda legge di Laplace**

$$d\vec{F} = i d\vec{s} \times \vec{B}$$

2)

Si noti che $d\vec{F}$ è ortogonale al filo.

Dalla 2) segue che la forza su un tratto di filo, che immaginiamo indeformabile, è

$$\vec{F} = i \int_{P \rightarrow Q} d\vec{s} \times \vec{B}$$

dove abbiamo assunto che la corrente sia la stessa in tutti i punti del contorno d'integrazione.

Consideriamo il caso in cui $\vec{B}$ sia uniforme lungo tutto la sezione di filo tra i punti P e Q.

In tal caso $\vec{B}$ non dipende da $\vec{s}$, per cui non deve essere integrato. Supponiamo inoltre che il filo sia

rettilineo

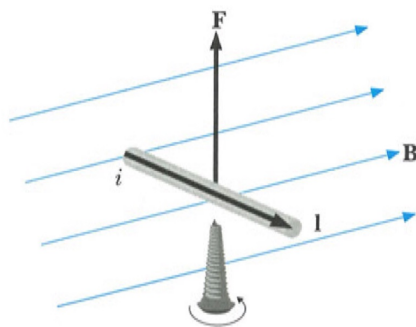


Figura 6.17

Forza su un filo conduttore rettilineo percorso da corrente in un campo magnetico uniforme

In tal caso si ha che γ_{PQ} è un segmento di retta, per cui

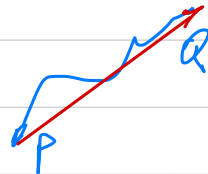
$$\vec{F} = i \left(\int_P^Q d\vec{s} \right) \times \vec{B} = i \vec{l} \times \vec{B}$$

dove $\vec{l}$ è il vettore il cui modulo è dato dalla lunghezza del filo mentre direzione e verso sono quelli del filo (orientato come $\vec{j}$). Si noti che

$F = i l B \sin \theta$ dove θ è l'angolo tra $\vec{l}$ e $\vec{B}$. Tale risultato vale anche nel caso in cui il filo non sia rettilineo, e, più generalmente anche nel caso non giaccia in un solo piano.

Si ha

$$\vec{F} = i \left(\int_{P \times PQ}^Q d\vec{s} \right) \times \vec{B} = i \vec{PQ} \times \vec{B}$$

dove $\vec{PQ}$ è il "vettore spostamento", 

Dimostriamo che

$$\int_{P \times PQ}^Q d\vec{s} = \vec{PQ}$$

Q e P indicano punti in $\mathbb{R}^3$

$$P \equiv (x_P, y_P, z_P), \quad Q \equiv (x_Q, y_Q, z_Q)$$

$$\int_{P \rightarrow Q}^Q d\vec{s} = \left(\int_{P \rightarrow Q}^Q dx, \int_{P \rightarrow Q}^Q dy, \int_{P \rightarrow Q}^Q dz \right) = (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P) = \vec{PQ}$$

che è il vettore spostamento tra P e Q , di lunghezza

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

Nel caso di un circuito chiuso si ha $P = Q$, per cui

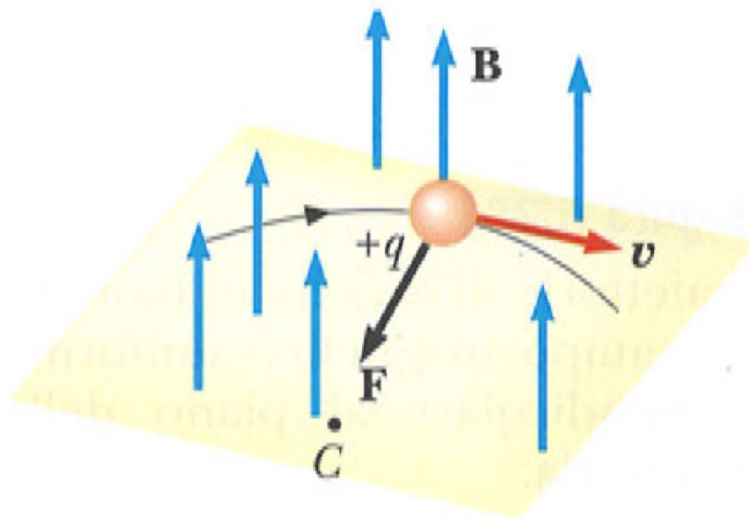
in tal caso $\vec{F} = \vec{0}$:

la forza dovuta a un campo magnetico uniforme

che agisce su un circuito chiuso è nulla.

MOTO IN UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME

CASO $\vec{B}$ e $\vec{v}$ ortogonali



$$|\vec{F}_L| = |q \vec{v} \times \vec{B}| = q v B \sin \pi/2 = q v B$$

$F_L = q v B$ è una costante se $q > 0$

$$F_L = q v B = m a = \frac{m v^2}{r}$$

dove r è il raggio delle circonferenze corrispondente alle traiettorie. Si ha quindi

$$r = \frac{m v}{q B} = \frac{P}{q B}$$

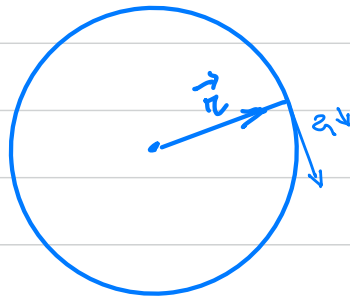
quantità di moto

Il modulo di v non cambia. La velocità angolare è

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

$$\frac{q}{m} = \frac{\omega}{B}$$

conosciuto
conosciuto



$\vec{\omega}$ perpendicolare
al piano

accelerazione centripeta $\downarrow$

direzione, verso e modulo di $\vec{\omega}$ sono costanti $\uparrow$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\parallel 0} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Quindi;

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} = m \vec{a} = m \vec{\omega} \times \vec{v} = -m \vec{v} \times \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B}$$

$q > 0$ $\vec{\omega}$ e $\vec{B}$ sono antiparalleli

$q < 0$ $\vec{\omega}$ e $\vec{B}$ sono paralleli

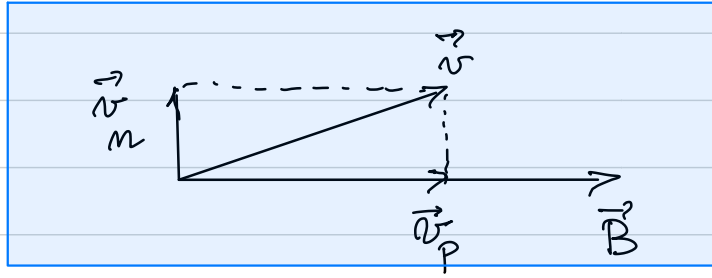
Periodo = tempo per percorrere la circonferenza

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \rightarrow v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$$

$$B = \frac{mv}{qr}$$

segue che conoscendo $\frac{m}{q}$, v e r , si ricava B .

Caso in cui l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{B}$ è arbitrario



Un qualsiasi vettore $\vec{A}$ è esprimibile come la somma vettoriale delle componenti parallela e di quella perpendicolare rispetto ad un altro vettore $\vec{A} = \vec{A}_p + \vec{A}_n$.

Si ha quindi

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = q (\vec{v}_n + \vec{v}_p) \times \vec{B} = q \vec{v}_n \times \vec{B}$$

$\vec{v}_p \times \vec{B} = \vec{0}$

Si noti che poiché $\vec{v}_n$ è perpendicolare a $\vec{B}$, segue che il modulo di $q \vec{v}_n \times \vec{B}$ è $|q \vec{v}_n \times \vec{B}| = |q| v_n B$

(*) Un risultato importante riguardante i campi vettoriali è il teorema di Helmholtz.

Ogni campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$, $\vec{C}(x, y, z)$, può essere decomposto

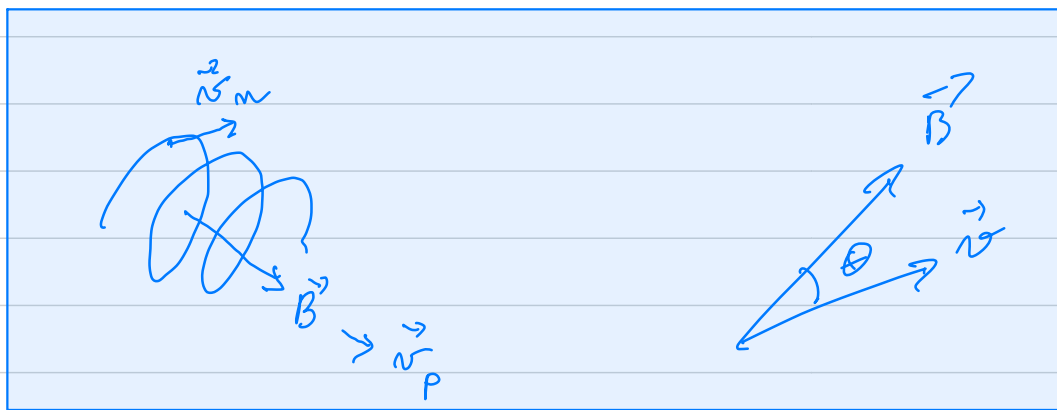
nella forma $\vec{C} = -\vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \vec{G}$ con opportuni ϕ e $\vec{G}$.

Si noti che lo stesso potenziale vettore può quindi essere scritto nella forma

$$\vec{A} = -\vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \vec{G}$$

Si ha quindi che la componente $\vec{v}_p$ non è modificata dall'azione di $\vec{B}$.

Segue che il moto è la composizione di un moto rettilineo uniforme ^{con velocità $\vec{v}_p$} nella direzione di $\vec{B}$ (con il verso che può essere opposto o meno e secondo del segno di q) con quello circolare uniforme. La traiettoria risultante è elicoidale



$$v_m = v \sin \theta$$

$$v_p = v \cos \theta$$

Però dell'elice: $\tau = \frac{m v_m}{q B} = \frac{m v \sin \theta}{q B}$

$\rightarrow p = v_p T = \frac{2 \pi m v \cos \theta}{q B}$

$v_p = v \cos \theta$

$T = \frac{2 \pi \tau}{v_m} = \frac{2 \pi m v_m}{v_m q B} = \frac{2 \pi m}{q B}$

MOMENTI MECCANICI SU CIRCUITI PIANI

Spire rettangolare di lati a e b percorse da una corrente i , in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$.

$$\vec{F} = i \vec{\ell} \times \vec{B}$$

$\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ hanno

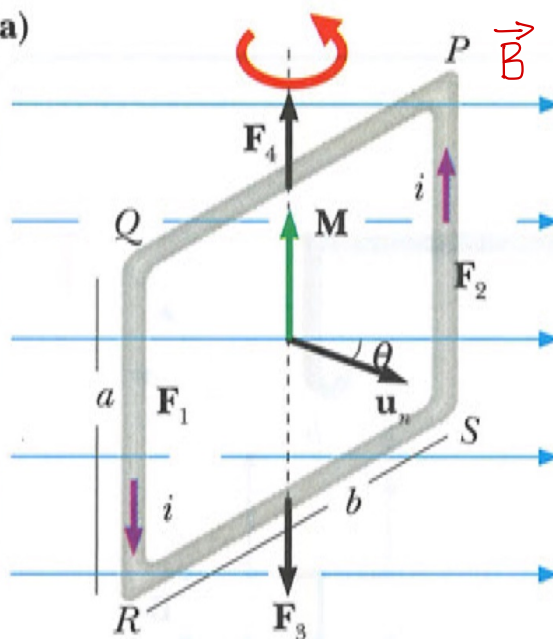
la stessa retta

di azione

Vettore $\vec{u}_n$ delle spire scelto in base alle regole della mano destra rispetto al verso della corrente

$\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ agiscono sui lati QR e SP ciascuna di modulo $i a B$. Sono una coppia di forze di braccio $b \sin \theta$

(a)



(b)

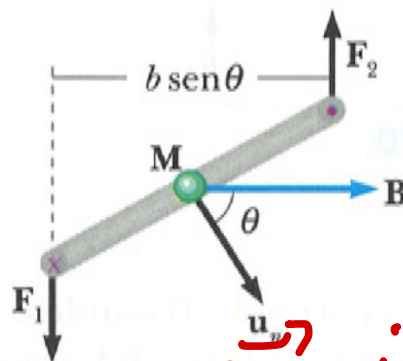


Figura 6.22

Forze su un circuito rettangolare rigido percorso da corrente in un campo magnetico uniforme (a) e momento meccanico agente sul circuito (b).

$$\vec{F}_4 = -\vec{F}_3$$

$$|\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = i b |\vec{B}|$$

$\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ formano una coppia di braccio nullo

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = i a |\vec{B}|$$

$$= i a |\vec{B}|$$

$$\vec{F}_1 \text{ e } \vec{F}_2$$

formano una coppia di braccio $b \sin \theta$

$$\vec{m} = i \vec{\Sigma}$$

MOMENTO MECCANICO DELLA COPPIA $\vec{F}_1, \vec{F}_2$

$$M = b \sin \theta F = i a b B \sin \theta = i \Sigma B \sin \theta$$

dove $F = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ e $\Sigma = ab$ è l'area della spira. la precedente relazione può essere riscritta nella forma

$$\vec{M} = \vec{M} \times \vec{B} \quad 3)$$

dove

$$\vec{M} := i \Sigma \vec{u}_n = i \vec{\Sigma}$$

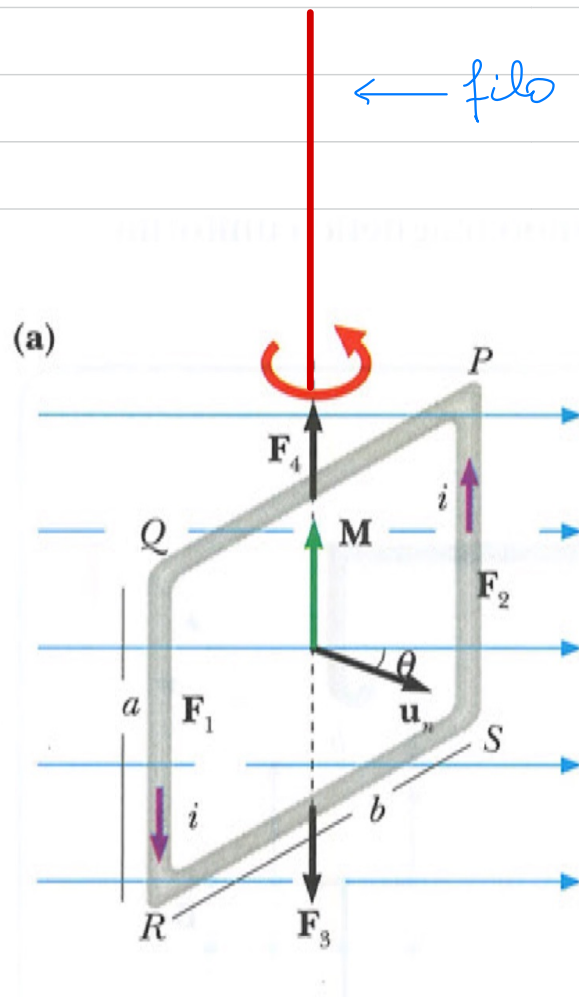
è il "momento magnetico della spira".

la 3) risulta valida per qualsiasi spira piana, quindi non solo di forma rettangolare.

si noti che $\vec{M} = \vec{0}$ solo nel caso $\theta = 0$

(equilibrio stabile) o $\theta = \pi$ (equilibrio instabile).

Per $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$, il momento $\vec{M}$ tende a far ruotare le spire in modo che $\vec{m}$ sia parallelo a $\vec{B}$. Appendendo le spire ad un filo questo può compiere un moto oscillatorio



Spostiamo le spire di un angolo θ così piccolo che sostituire $\sin\theta$ con θ risulti una buona approssimazione.

Del teorema del momento angolare

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

appross. $\sin\theta \sim \theta$

$$M = -m B \sin\theta \stackrel{\downarrow}{=} -m B \theta = \frac{dL}{dt} = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad 4)$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione delle spine e α è l'accelerazione angolare.

Si ha quindi l'equazione differenziale

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mB}{I} \theta$$

il che implica che nel caso di **piccole oscillazioni** le spine compie un moto armonico di periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mB}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{i \Sigma B}}$$

Misurare B misurando T .

I LEGGE ELEMENTARE DI LAPLACE

Abbiamo visto che dai dati sperimentali
è stata dedotta la forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Quindi, dato $\vec{B}$ si ricava $\vec{F}_L$. Poiché la corrente
è data da cariche in movimento, segue che
la forza infinitesimale a cui è soggetto un
tutto $d\vec{s}$ di filo percorso da una corrente i è

$$d\vec{F} = i d\vec{s} \times \vec{B} \rightarrow [\vec{B}] = \frac{N}{Am} =: T \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{5) Tesla} \end{matrix}$$

Questa legge implica che la forza a cui
è soggetto un filo conduttore di lunghezza
finita, percorso da una corrente che ha lo stesso

valore in tutti i punti, è

$$\vec{F} = i \int_P^Q d\vec{s} \times \vec{B}$$

Si noti che finora non abbiamo ricavato alcuna equazione soddisfatta da $\vec{B}$. Al momento non abbiamo una relazione che descriva $\vec{B}$ in termini di altre quantità fisiche. Di seguito ricaviamo un'espressione per $\vec{B}$ che ha un'analogie fondata con la legge di Coulomb

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad 6)$$

che, ricordiamo, fu ricavata sperimentalmente. L'analogo magnetico dello 6), ricavato sempre sperimentalmente, è dato dalla **prima legge elementare di Laplace**

$$d\vec{B} = k_m i \frac{d\vec{s} \times \vec{ur}}{r^2} \quad 7)$$

equivalente a ($d\vec{s} = ds \vec{u}_t$, $\vec{u}_t$: vettore di $d\vec{s}$)

$$d\vec{B} = k_m \frac{i ds}{r^2} \vec{u}_t \times \vec{ur} \quad 8)$$

la 7), e quindi anche la 8), esprime il campo magnetico infinitesimo generato da un tratto infinitesimo $d\vec{s}$ di filo percorso dalla corrente i , in un punto P di coordinate $\vec{r}$ rispetto al tratto $d\vec{s}$, il cui centro è visto come l'origine del sistema di coordinate ($\vec{r} := (x, y, z)$, $d\vec{s} \rightarrow (0, 0, 0)$). k_m è una nuova costante, analoga alle k elettrostatiche

$$k_m = 10^{-7} \frac{Tm}{A} = 10^{-7} \frac{H}{m}$$

dove H è una nuova unità di misura chiamata Henry.

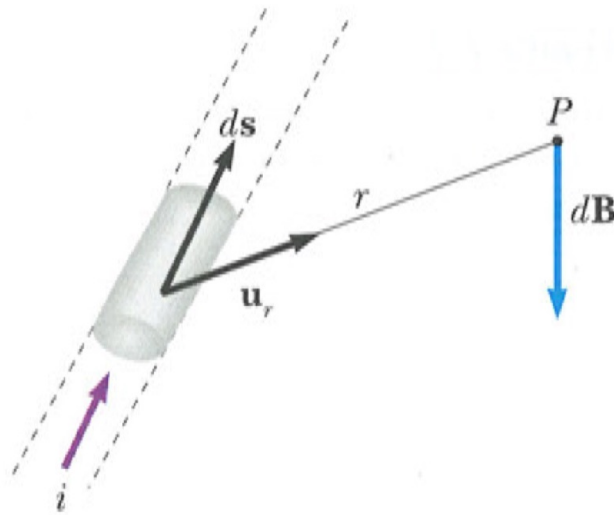


Figura 7.1

Campo magnetico prodotto da un elemento di filo percorso da corrente.

Usualmente, analogamente a quanto fatto in elettrostatica, si utilizza μ_0 invece di K_m

$$K_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

↖ superficie sfera
di raggio 1.

μ_0 : permeabilità magnetica del vuoto.