LEZIONE 21

14.04.2026

Il campo magnetico

Potenziale vettore e invariante di gauge

Forza di Lorentz

la forza di Lorentz non compie lavoro e non è conservativa

7 Forza magnetica. Campo magnetico

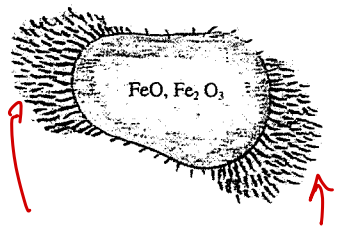


Figura 7.1

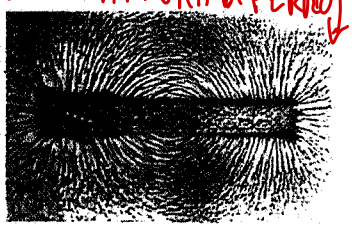


Figura 7.2

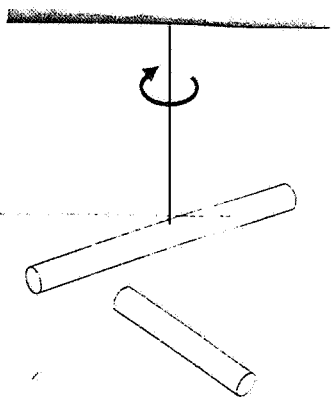


Figura 7.3

7.1 Primi fatti sperimentali sull'interazione magnetica

La proprietà di attirare la limatura di ferro, mostrata da alcuni minerali di ferro e in particolare dalla *magnetite* (combinazione di ossidi di ferro, $FeO{\cdot}Fe_2O_3$), era nota già nel VII secolo a.C.; il nome magnetite derivò da quello della città greca di Magnesia, in Asia minore, dove si trovavano giacimenti del minerale, e la proprietà osservata prese il nome di magnetismo.

Tale proprietà di attrazione non è uniformemente presente nel materiale, ma si manifesta principalmente in determinate parti ed è in particolare possibile costruire campioni cilindrici in cui essa è localizzata nella zona delle basi. Sia questi oggetti che altri con diversa geometria (ad esempio una sbarra piegata a forma di C) si indicano col nome di *magneti* e le parti in cui si localizza la proprietà di attrazione si chiamano i *poli del magnete*. Per ora ci riferiremo esclusivamente a magneti con due poli, pur essendo possibili altre configurazioni alle quali accenneremo.

Nel sedicesimo secolo W. Gilbert compì una serie di esperienze con magneti, aventi lo scopo di mettere in evidenza le caratteristiche del magnetismo e le differenze con i fenomeni di elettrostatica, da lui stesso studiati (vedi paragrafo 1.1). I risultati sullo studio delle interazioni tra poli magnetici, anche tenendo conto di successive osservazioni, sono riassunti nei punti seguenti.

A. Se ad un magnete sospeso nel centro tramite un filo, e quindi libero di ruotare, si avvicina un secondo magnete, tenuto ad esempio in mano, si osserva che questo esercita sul primo una certa forza. Come per le forze di natura elettrostatica, possiamo interpretare il fatto dicendo che un magnete genera un campo, chiamato *campo magnetico*, e che l'altro magnete risente dell'azione che il campo magnetico esercita nella posizione da esso occupata.

Un'analisi sistematica porta a stabilire che la forza di interazione tra i due magneti è attrattiva o repulsiva a seconda dei poli dei magneti che vengono affacciati e che esistono soltanto due specie di poli, detti *poli positivi* e *poli negativi*; inoltre si trova che *i poli di uno stesso magnete sono sempre di segno opposto*.

Le modalità di svolgimento di questo primo esperimento chiariscono che i fenomeni osservati non sono attribuibili in nessun modo a cariche elettriche fisse, localizzate in alcune regioni dei magneti. Infatti la magnetite è un conduttore e il secondo magnete, che è tenuto in mano, è certamente scarico, come del resto si può verificare con mezzi elettrostatici.

B. Se si avvicina a un pezzo di magnetite una bacchetta sottile di ferro, questo acquista la proprietà di attirare la limatura di ferro, principalmente in vicinanza delle estremità: la bacchetta di ferro immersa nel campo magnetico generato dalla magnetite è diventata pertanto un magnete, ovvero si è *magnetizzata*. Essa viene chiamata *magnete artificiale* o *calamita* e presenta due poli magnetici di segno opposto. Soprattutto se è di piccole dimensioni la bacchetta viene anche detta *ago magnetico*.

C. Se sospendiamo ad un filo l'ago magnetico sopra definito e lo lasciamo libero di ruotare, osserviamo che esso tende a disporsi approssimativamente parallelo al meridiano terrestre; spostato da questa posizione di equilibrio l'ago compie intorno ad essa oscillazioni, smorzate inevitabilmente dagli attriti.

L'esperienza mostra l'esistenza di un campo magnetico naturale, il *campo magnetico terrestre*, e mette in evidenza un comportamento dell'ago magnetico del tutto analogo a quello di un dipolo elettrico posto in un campo elettrico **E**, studiato nel paragrafo 2.9 e nell'esempio 2.14. L'ago magnetico, in altre parole, si comporta come un *dipolo magnetico* che lasciato libero si orienta nella direzione e verso del campo magnetico esistente nel punto dove è posto.

Il polo dell'ago che si orienta approssimativamente verso il nord geografico viene chiamato *polo nord* (*N*) e gli si attribuisce segno *positivo*, l'altro è chiamato *polo sud* (*S*) e gli si dà segno *negativo*. Accenneremo alle caratteristiche del campo magnetico terrestre nella nota alla fine del paragrafo 7.2.

Definiti nel modo detto i poli di un magnete ed eseguendo esperienze come quelle del punto *A*, si trova sempre che l'interazione tra *poli magnetici dello stesso segno è repulsiva*, quella tra *poli magnetici di segno opposto attrattiva*.

NON ESISTONO CARICHE MAGNETICHE!

Più precisamente: in natura non è mai stato osservato un monopolo. Dirac ha mostrato che se in natura ne esistesse anche uno solo, allora la carica elettrica, come di fatto è, dovrebbe essere quantizzata.

N.B. Al momento non esiste una dimostrazione teorica che la carica elettrica sia quantizzata.

La non esistenza di cariche magnetiche implica la legge di Gauss magnetica

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0 \qquad \forall \Sigma \mid \partial\Sigma = \phi \qquad 1)$$

D'altronde $\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{V} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\, d\tau, \quad \partial V = \Sigma \qquad 2)$

N.B. Questo è il teorema della divergenza. L'altro ben noto teorema che coinvolge l'operatore $\vec{\nabla}$ è il teorema del rotore.

Questo afferma che un campo vettoriale $\vec{C}$ soddisfa la relazione

$$\oint_{\gamma} \vec{C} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot d\vec{\Sigma} \qquad \forall \gamma \text{ e } \forall \Sigma \text{ tale che } \partial\Sigma = \gamma$$



In proposito è bene ricordare le identità

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{C}) = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

Eq. 1) e 2) implicano la forma "locale" o differenziale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

cioè

$$\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial B_y(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial B_z(x,y,z,t)}{\partial z} = 0$$

che va confrontata con quella del campo elettrico

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

È facile mostrare che $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ implica

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$\vec{A}$ è detto potenziale vettore

Esercizio: mostrare che effettivamente

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \qquad \forall \vec{A}$$

$\vec{A}$ non è unico

Dato $\vec{B}$ ci sono infiniti $\vec{A}$ tali che $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Questo segue da

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \forall f \text{ (di cui esista il gradiente)}$$

dimostrazione: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0} = (0,0,0)$

Si ha quindi il seguente schema

$\vec{E}$ elettrostatico: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ invariante sotto $V \to V + \frac{\partial f}{\partial t}$

segue da $\vec{F} = q\vec{E}$ conservativa

$\vec{B}$: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ invariante sotto $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla} f$

segue dall'assenza dei monopoli

e quindi dalla legge di Gauss magnetica

→ SONO MOTIVI DIVERSI

Come vedremo, nel caso non elettrostatico

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1)$$

con lo stesso $\vec{A}$ in

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2)$$

INVARIANZA DI "GAUGE": (1) e (2) sono invarianti sotto la trasformazione di gauge (verificare)

$$V \longrightarrow V' = V + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f \quad f \text{ arbitraria}$$

Tipicamente si utilizza una condizione per fissare questa arbitrarietà. Una scelta frequente è richiedere $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$, cioè data $\vec{A}$, si sceglie f tale che $\Delta f = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$.

Come determinare la dinamica delle equazioni di Maxwell

Data la corrente i e la distribuzione di cariche ρ, le equazioni di Maxwell determinano $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Con questi campi determiniamo sia la forza elettrostatica che quella magnetica agenti sulle particelle cariche.

Quindi, l'algoritmo per "risolvere la dinamica" di particelle cariche sotto l'azione di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ è:

Dati ρ e j risolvere le equazioni di Maxwell per determinare $\vec{E}$ e $\vec{B}$

Calcolare $\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_L$

$\vec{F}_E$: Eq forza elettrica

$\vec{F}_L$: Lorentz (forza magnetica, vedere sotto)

Utilizzare la II legge della dinamica per calcolare l'accelerazione. Nel caso di n particelle

$$\vec{a}_k = \frac{\vec{F}_k}{m} \qquad k = 1, \dots, n$$

e quindi determinare le traiettorie delle cariche: $\vec{r}_k(t)$.

Si ricorda che $\vec{E}$ è composto da una parte conservativa, $-\vec{\nabla}V$ più il termine $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, in genere non conservativo.

Si noti anche che la legge di Coulomb mostra il campo elettrico generato da una carica è conservativo

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\hat{u}_r$$

cioè $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ dove $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. $\vec{\nabla}$ denota il gradiente in coordinate sferiche ed essendo V indipendente da θ e ϕ, si ha $\frac{\partial}{\partial\theta}V = 0$ e $\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$, quindi

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial}{\partial r}V\,\hat{u}_r$$

In proposito si ricorda che la legge di Gauss fornisce informazioni su $\vec{E}$ a meno del termine $\vec{\nabla}\times\vec{C}$, dove $\vec{C}$ è un campo vettoriale arbitrario.

FORZA DI LORENTZ

Risultato dall'osservazione sperimentale: una carica q che si muove con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico $\vec{B}$ è soggetto alla "forza di Lorentz"

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Quindi, in presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico la forza totale è

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F} + \vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$\vec{F} = q\vec{E}$ Lorentz

La forza di Lorentz non è conservativa!

Quindi

$$\oint_\gamma \vec{F}_L \cdot d\vec{\ell}$$

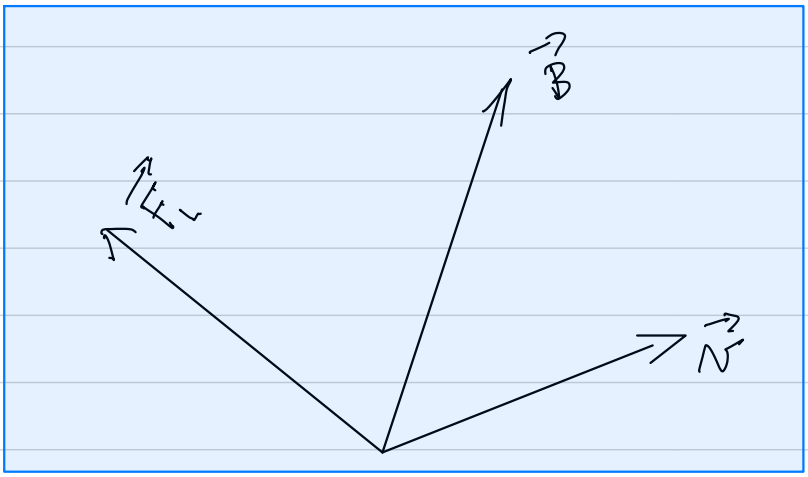
non è nullo per tutti i possibili contorni d'integrazione chiusi.

Ciò equivale a dire che non esiste alcun potenziale V_B tale che $\vec{F}_L = \vec{\nabla} V_B$.

Proprietà che invece ha la forza di Coulomb

$$\vec{F}_C = \vec{\nabla}\left(-\frac{V}{q}\right)$$

Si noti che poiché $\vec{F}_L$ è proporzionale a $\vec{v} \times \vec{B}$, si ha che $\vec{F}_L$ è perpendicolare al piano identificato da $\vec{v}$ e $\vec{B}$



FONDAMENTALE: IL CAMPO MAGNETICO NON COMPIE LAVORO!

Infatti per qualsiasi traiettoria delle particelle si ha che $\vec{v}$ e $d\vec{s}$ sono sempre paralleli: per ogni punto della traiettoria, $\vec{v}$ e $d\vec{s}$ hanno lo stesso versore $\frac{\vec{v}}{v} = \frac{d\vec{s}}{ds}$

D'altronde, come visto, $\vec{F}_L$ è perpendicolare sia a $\vec{v}$ che a $\vec{B}$, per cui anche $d\vec{s}$ è perpendicolare a $\vec{F}_L$. Ciò implica

SE $d\vec{s}$ DENOTA LO SPOSTAMENTO DELLA CARICA, ALLORA

$$dW = \vec{F}_L \cdot d\vec{s} = |\vec{F}_L||d\vec{s}| \cos 90^\circ = 0$$

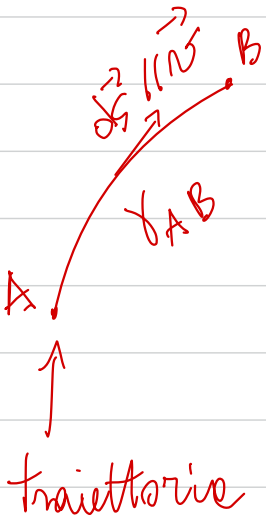
da cui segue

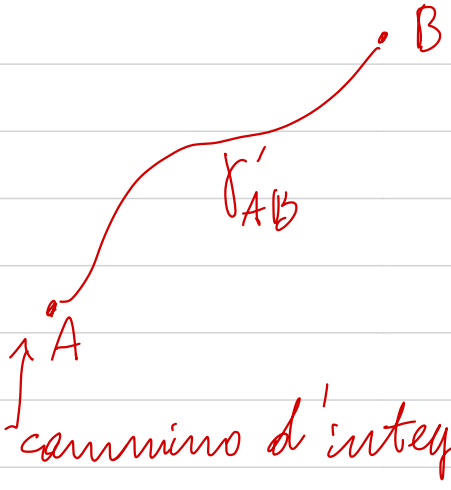
$$W = \int_0^W dW' = \int_{A\,\gamma_{AB}}^{B} \underbrace{\vec{F}_L \cdot d\vec{s}}_{=0} = 0$$

che, ovviamente, vale per qualsiesi coppie di punti A e B purché γ_{AB} coincida con la traiettoria, o con la sua inversa: in questo caso si ha ancora $\vec{F}_L \cdot d\vec{s} = 0$.

Apparente paradosso: $\vec{F} = -q\vec{\nabla}V$ è conservativa ma compie lavoro, $\vec{F}_L$ non è conservativa ma non compie lavoro.

Una forza è conservativa se l'integrale lungo qualsiesi contorno chiuso è zero. D'altronde, quando $d\vec{s}$ è lo spostamento effettivo in una traiettoria allora $\vec{F}_L \cdot d\vec{s} = 0$, fatto in generale non vero nel caso in cui il cammino d'integrazione non coincide con quello della traiettoria





$$\int_{\gamma_{AB}}^{B} \vec{F}_L \cdot d\vec{s} = 0, \qquad \int_{\gamma'_{AB}}^{B} \vec{F}_L \cdot d\vec{s} \neq 0$$

si noti che anche per una forza conservativa si ha $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0$, vale comunque $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0, \forall \gamma$, mentre nel caso di $\vec{F}_L$ si ha $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0$ a meno che γ = traiettoria.

Poiché la forza di Lorentz è sempre ortogonale a $\vec{v}$ (e quindi all'effettivo spostamento fisico $d\vec{s}$) questa non modifica il valore assoluto di $\vec{v}$ bensì la sua direzione:

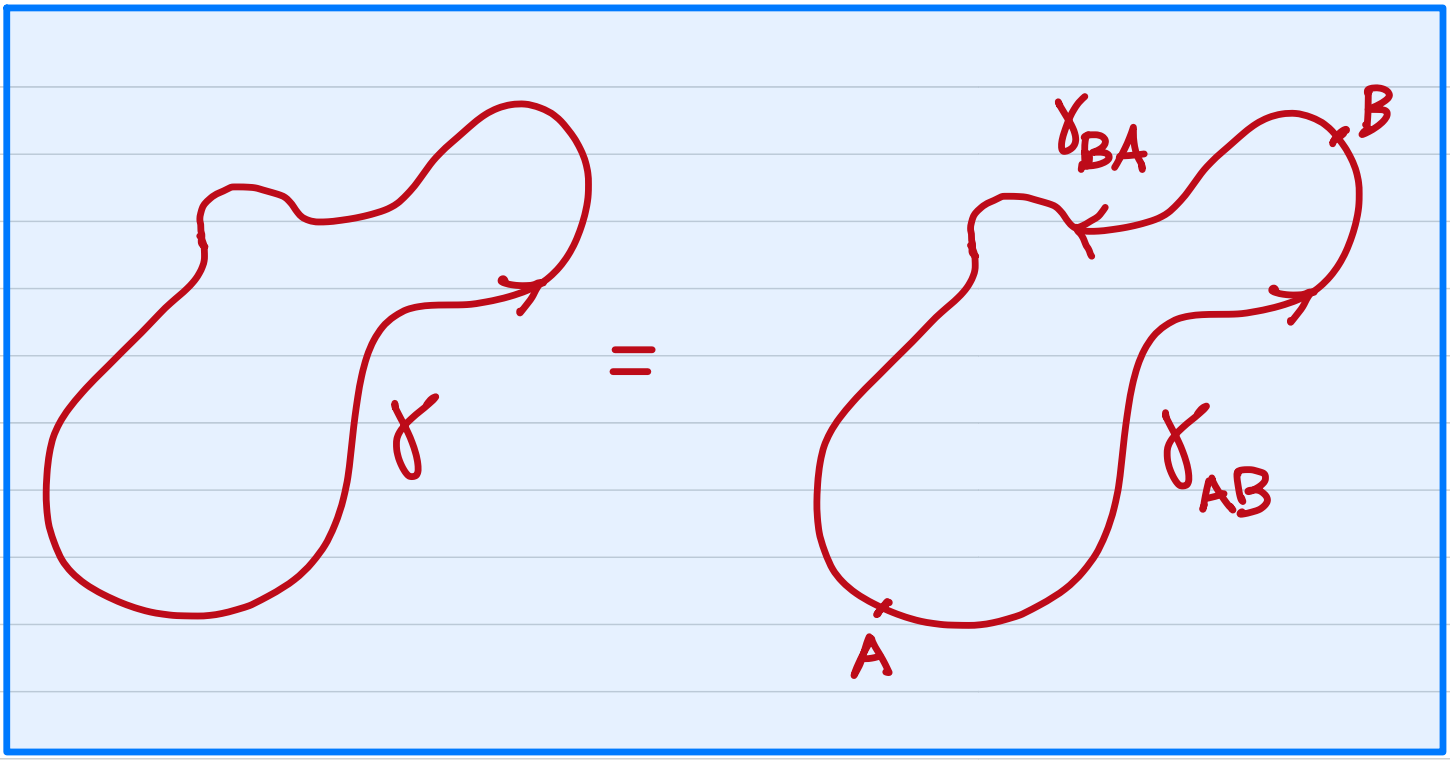
$$W = \Delta E_c := \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \int_{A\,\gamma_{AB}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

γ_{AB} : traiettoria. Quindi

LA FORZA DI LORENTZ NON COMPIE LAVORO E NON È CONSERVATIVA

Questo è in contrasto con la forza elettrostatica che è parallela ad $\vec{E}$, compie lavoro ed è conservativa.

Si noti che le forze conservative, come quella elettrostatica e quella gravitazionale possono compiere sia lavoro POSITIVO che NEGATIVO. Ciò risulta immediatamente dal seguente schema



$$\gamma = \gamma_{AB} \cup \gamma_{BA}$$

$$0 = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{\gamma_{AB} \cup \gamma_{BA}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A}^{B}{}_{\gamma_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{B}^{A}{}_{\gamma_{BA}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

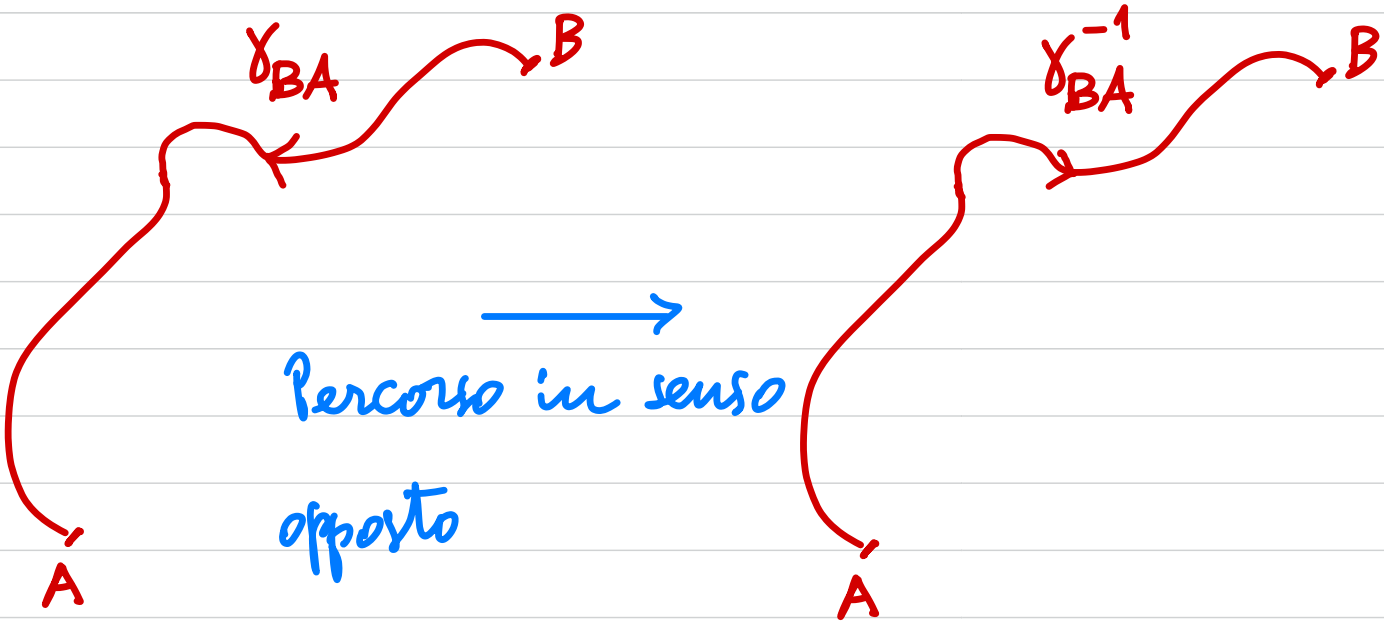
$\uparrow$ γ

F conservativa

Da cui segue che se $\int_{A}^{B}{}_{\gamma_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{s} > 0$, allora $\int_{B}^{A}{}_{\gamma_{BA}} \vec{F} \cdot d\vec{s} < 0$

e viceversa. Poiché quanto detto vale per qualsiasi γ, ciò vale anche nel caso in cui γ_{AB} e γ_{BA} siano delle traiettorie.

N.B. Si noti che $\int_{\gamma_{BA}}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_{\gamma_{BA}^{-1}}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s}$



Unità di misura del campo magnetico.

Dalla forza di Lorentz $\vec{F_L} = q\vec{v}\times\vec{B}$ segue che

$[B] = [F][q]^{-1}[v]^{-1}$, quindi l'unità di misura di $\vec{B}$ è

$$\frac{N}{C\frac{m}{s}} = \frac{N}{Am} = \frac{Kg}{As^2} := T$$

dove T sta per tesla. Altre unità: Gauss, $1\,G = 10^{-4}\,T$, $kG = 10^{-1}\,T$

Campo magnetico terrestre sulla sua superficie: $0{,}4\,G = 4\cdot 10^{-5}\,T$.

Laboratorio: ordine del tesla. Con i superconduttori si può arrivare a 20 T.