

LEZIONE 20

9.04.2026

Esercizi su circuiti

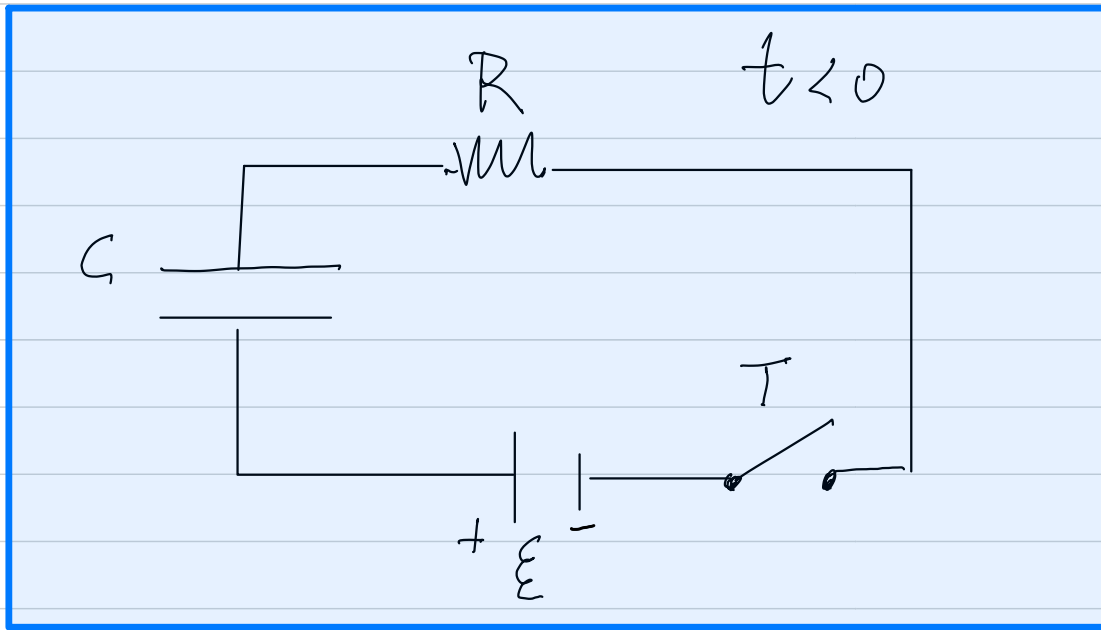
Circuito RC. Carica e scarica di un condensatore

Corrente di spostamento

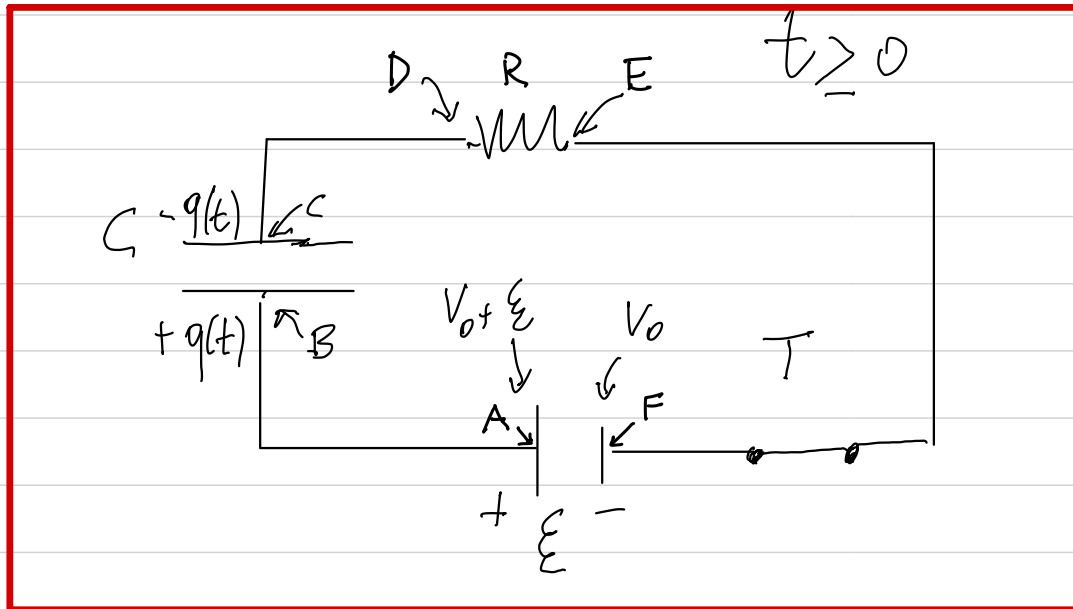
Leggi di Kirchhoff per le reti elettriche

Riassunto schematico corrente elettrica

CIRCUITO RC

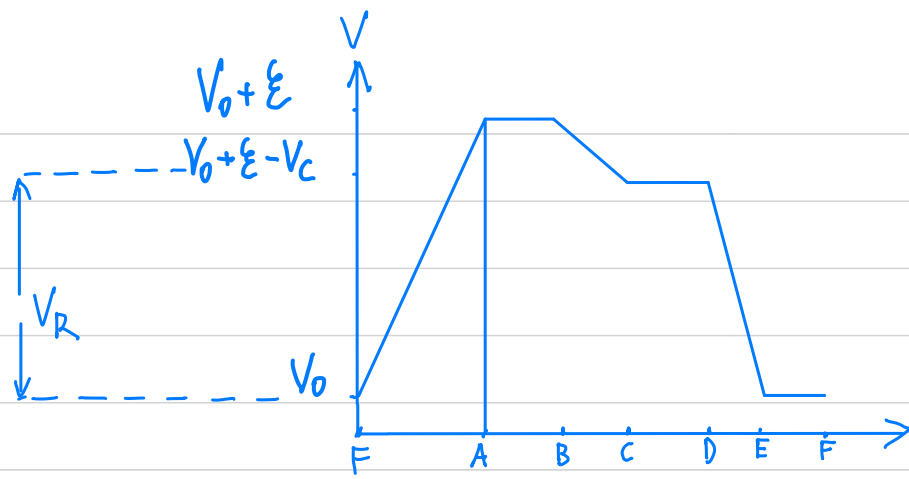


$T = \text{interruttore}$



$$C = \frac{q}{V}$$

V_0 è un potenziale arbitrario ma costante che, per convenienza di calcolo, si può porre a zero. In questo esercizio lo lasciamo arbitrario.



$$\rightarrow V_0 + \mathcal{E} - V_C - V_R = V_0 \rightarrow \mathcal{E} = V_C + V_R$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = V_R + V_C = R \dot{q}(t) + \frac{q(t)}{C}$$

$$\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$$

$$R \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} - \frac{q}{C}$$

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}$$

integrando

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - C\xi} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt'$$
$$\ln(q' - C\xi) \Big|_0^q = -\frac{t'}{RC} \Big|_0^t$$

$$\ln(q - C\xi) - \ln(-C\xi) = -\frac{t}{RC} \quad (*)$$

il log di un numero
negativo non è definito
in $\mathbb{R}$ (ma in $\mathbb{C}$ è definito)

D'altronde $-\frac{t}{RC}$ è ben definito. Quindi

anche $q - C\xi$ deve essere negativo in modo

tale che la differenza dei due logaritmi sia

ben definita. Si noti che sia il primo che il

secondo logaritmo hanno argomento che non è

adimensionale, quindi ognuno dei due logaritmi

ha problemi di definizione. Come al solito,

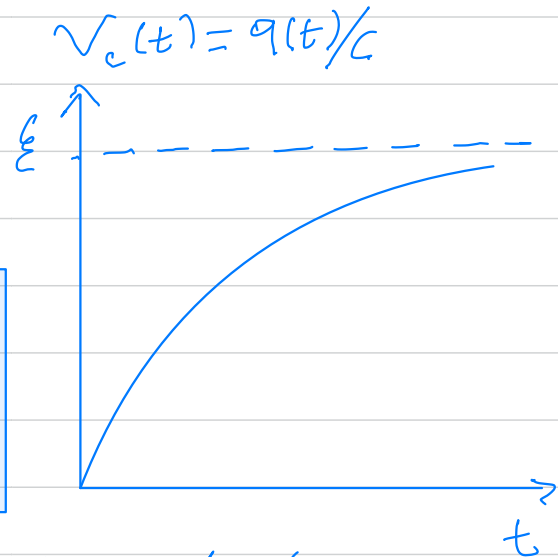
i problemi di definizione si risolvono in quanto
le (*) è equivalente a

$$\ln \left(\frac{q - C\xi}{-C\xi} \right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\rightarrow \frac{q - C\xi}{-C\xi} = e^{-t/RC}$$

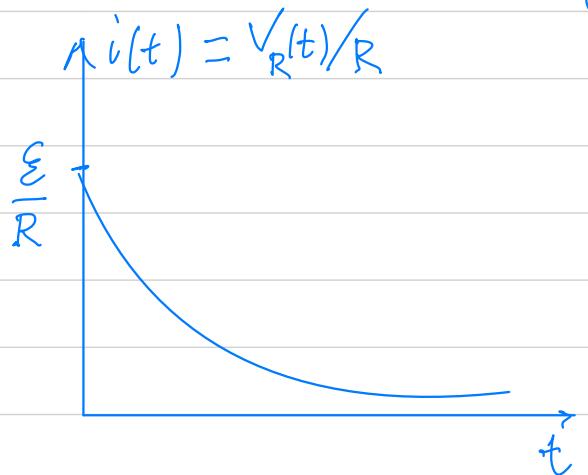
$$q(t) = C\xi (1 - e^{-t/RC})$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \xi (1 - e^{-t/RC})$$



$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\xi}{R} e^{-t/RC}$$

$$V_R(t) = R i(t) = \xi e^{-t/RC}$$



la forma delle curve dipende da RC in $e^{-t/RC}$

RC deve avere le dimensioni di un tempo: verifica
(t/RC deve essere adimensionale),

$\tau := RC$ "costante di tempo" caratteristica
del circuito

la potenza istantanea erogata dal generatore è

$$P_{\text{gen}} = \mathcal{E} i = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-t/RC}$$

la potenza istantanea spesa nella resistenza è

$$P_R = R i^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC}$$

Il lavoro necessario per caricare il condensatore, corrispondente ad un aumento dell'energia elettrostatica del condensatore, è $V_c dq$. Ne segue che la relativa potenza è

$$P_c = V_c \frac{dq}{dt} = V_c i = \underbrace{\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})}_{V_c(t)} \underbrace{\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}}_{i(t)}$$

$$\rightarrow P_c = \frac{\mathcal{E}^2}{R} (e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}) = P_{gen} - P_R$$

Si noti che in ogni istante

$$P_{gen} = P_R + P_c$$

Quindi, in accordo con il principio di conservazione dell'energia, si ha che la potenza istantanea erogata dal generatore viene spesa in R e C .

N.B. Questa relazione è espressa in termini di potenza

spese ed erogate. D'altronde il bilancio energetico è immediato e si ottiene integrando nel tempo

$$W_{\text{gen}}(t) = \int_0^t P_{\text{gen}} dt' = \text{lavoro fornito dal generatore nel tempo } t$$

$$E_R(t) = \int_0^t P_R dt' = \text{energia dissipata in calore nella resistenza}$$

$$E_C(t) = \int_0^t P_C dt' = \text{energia elettrostatica corrispondente all'energia immagazzinata dal condensatore, dovuta alla carica } q(t)$$

Si osserva che a fine processo di carica, cioè per $t \rightarrow \infty$ si ha

$$E_R(\infty) = E_C(\infty)$$

indipendentemente dal valore di R e C ! Infatti

$$W_{\text{gen}}(\infty) = \int_0^{\infty} P_{\text{gen}} dt = \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-t/RC} dt = C \mathcal{E}^2$$

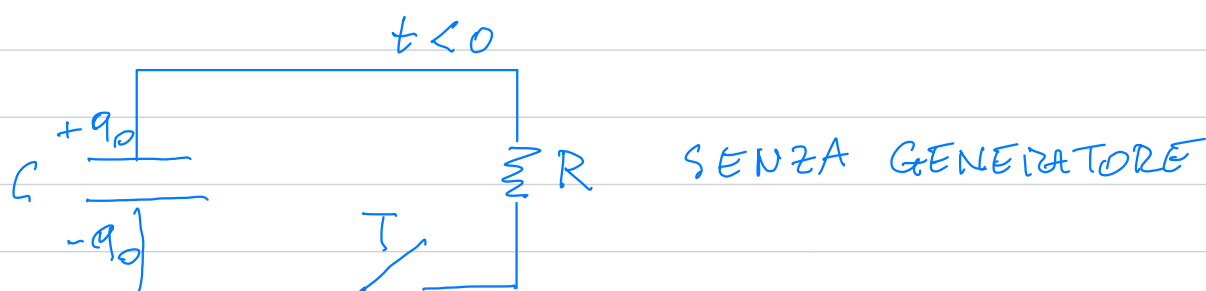
$$E_R(\infty) = \int_0^{\infty} P_R dt = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2, \quad E_C(\infty) = \int_0^{\infty} P_C dt = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{RC}{(-2)} e^{-2t/RC} \Big|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 \end{aligned}$$

SCARICA DI UN CONDENSATORE

Condensatore che inizialmente ha carica q_0 .

Il circuito ha anche resistenza R



Adesso

$i = - \frac{dq}{dt}$ poiché q diminuisce nel tempo (ma non serve, se non si

$V(t) = \frac{q}{C} = V_R(t) = R i$ mette il " $-$ " si ottiene una corrente negativa)

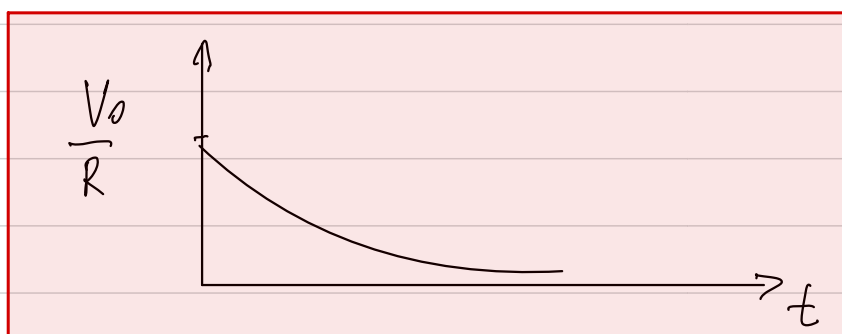
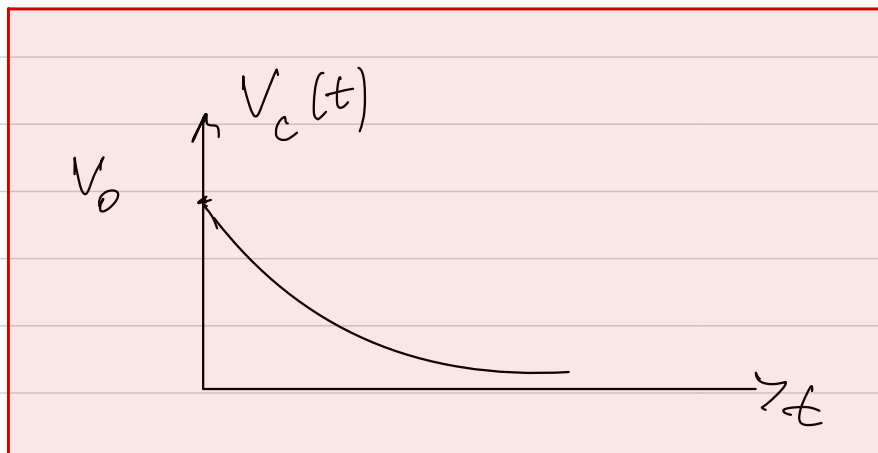
non essendoci più il generatore
i potenziali sono uguali

$$i = -\frac{dq}{dt} \rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

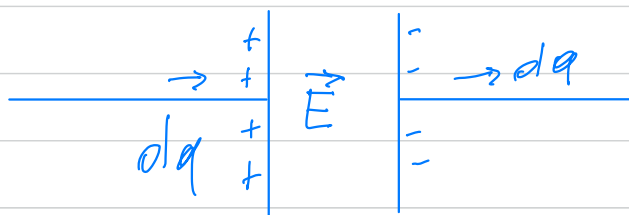
$$\int_{q_0}^q \frac{dq'}{q'} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \Rightarrow \ln \frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = q_0 e^{-t/RC}, \quad V_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/RC}$$

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = \frac{V_C}{R}$$



CORRENTE DI SPOSTAMENTO



$$\vec{\Sigma} \parallel \vec{E}$$

$$i_s = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\Sigma V}{h} \right) \stackrel{\vec{\Sigma} \parallel \vec{E}}{=} \epsilon_0 \frac{d}{dt} (\vec{\Sigma} \cdot \vec{E})$$

Daltronde

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{E} =: \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) := \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$$

Quindi:

$$i_s = \frac{\epsilon_0 d\Phi_{\Sigma}(\vec{E})}{dt}$$

$$\begin{matrix} | & | & | \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Come vedremo sarà aggiunto all'equazione di Ampère.

Leggi di Kirchhoff per le reti elettriche

Elementi geometrici di una rete elettrica:

- **NODO**: Punto nel quale convergono almeno 3 conduttori. Il tratto di conduttore che collega due nodi è detto ramo.

- **MACLIE**: All'interno di una rete è possibile individuare determinati cammini chiusi, detti maglie, costituiti da più rami.

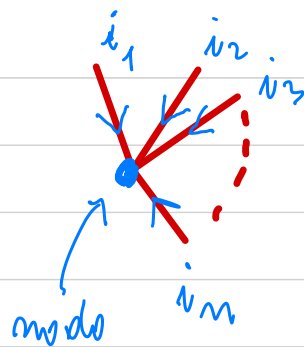
N.B. Un ramo può appartenere a più maglie.

I legge di Kirchhoff (legge dei nodi)

La somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla. Il segno delle correnti che entrano e che escono dal nodo hanno segno opposto (N.B. In questo caso i più essere negative).

L'assunzione di i sempre positive può indurre qualche confusione).

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$



Consideriamo ora una maglia di una rete, nella quale fissiamo arbitrariamente un verso di percorrenza. Fissiamo anche un verso delle correnti in modo arbitrario (se il suo segno risulterà negativo, vuol dire che il verso effettivo era opposto).

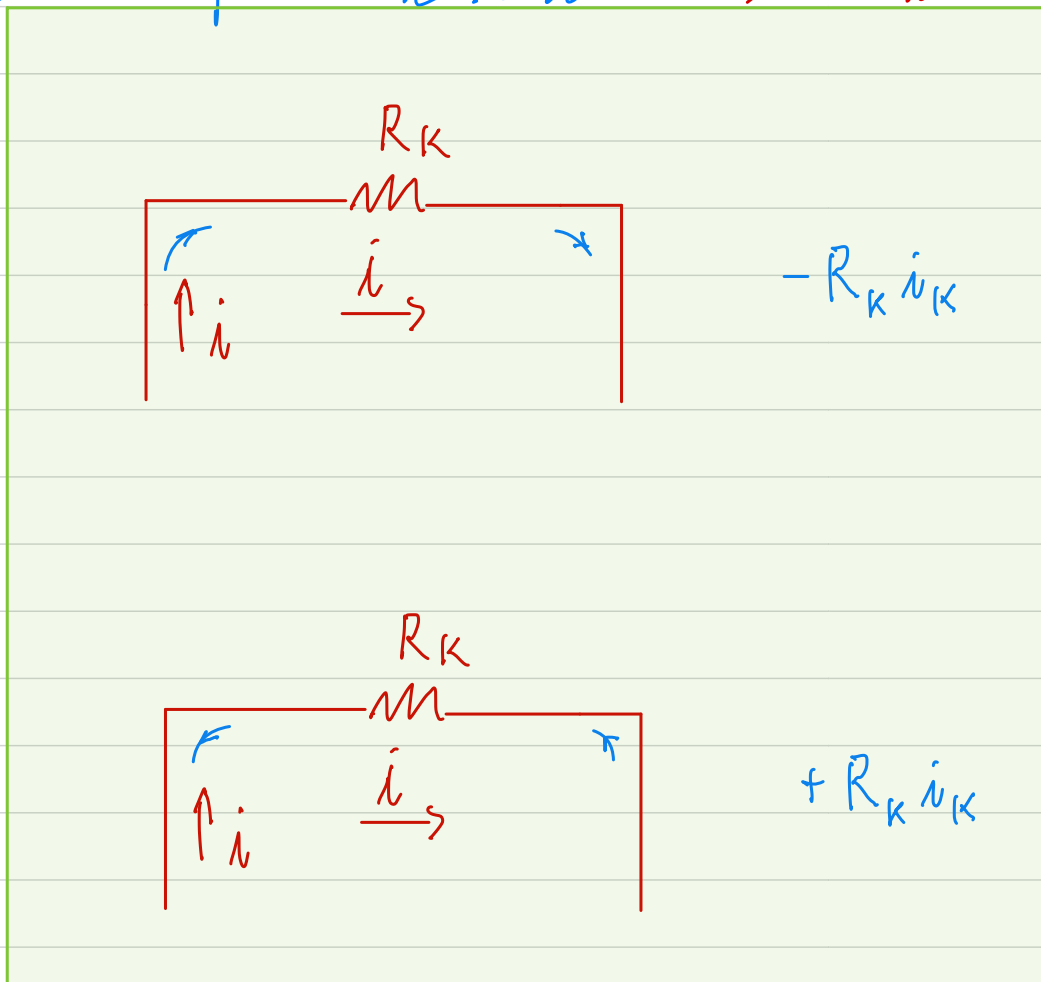
II legge di Kirchhoff

$$\sum_k R_k i_k + \sum_k \mathcal{E}_k = 0 \quad (**)$$

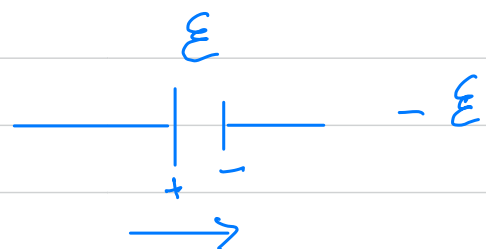
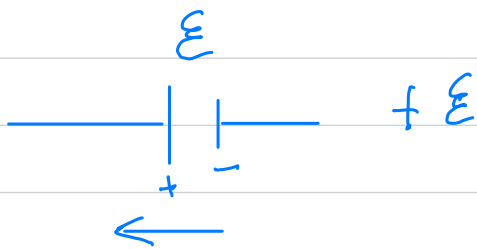
con le seguenti criteri che devono essere soddisfatti:

Se quando si incontra una resistenza nel
 ramo k -esimo la corrente i_k è concorde
 al verso scelto nella maglia, allora nella relazione si inserisce $-R_k i_k$, altrimenti $+R_k i_k$.

→ verso percorrenza salto → verso corrente scelto



b) Se la sorgente di f.e.m. $\mathcal{E}_k$ viene attraversata nel senso di percorrenza fissato nel verso che va dal polo negativo al polo positivo, essa va presa col segno positivo. Altrimenti il segno è negativo.

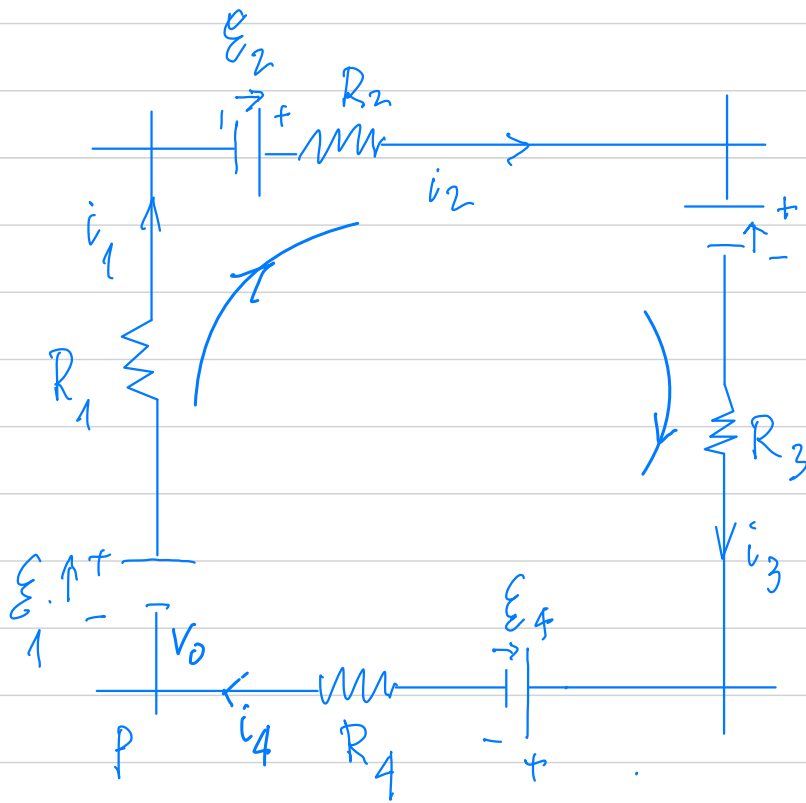


N.B. la (***) è talvolta scritta nella forma

$$\sum_k R_k i_k = \sum_k \mathcal{E}_k$$

Con questa convenzione, il segno di $R_k i_k$ deve essere l'opposto di quello descritto nel punto a).

Esercizio



→ : VERSO DI
PERCORRENZA
NELL'ANALISI
DEL CIRCUITO.
LA SCELTA E'
ARBITRARIA

→ : VERSO DI i
LA SCELTA E' ARBITRARIA

$$\cancel{V_0 + E_1 - R_1 i_1 + E_2 - R_2 i_2 - E_3 - R_3 i_3 - E_4 - R_4 i_4 = V_0}$$

Poiché non ci sono nodi $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i$

Quindi $E_1 + E_2 - E_3 - E_4 - i(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = 0$

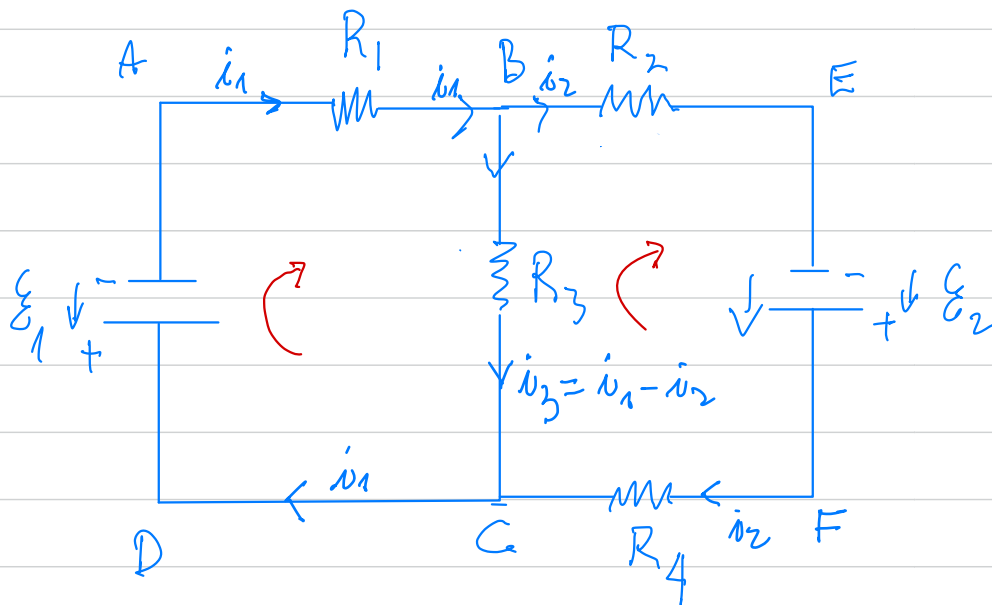
$$i = \frac{E_1 + E_2 - E_3 - E_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

N.B. Se $E_1 + E_2 < E_3 + E_4$ allora $i < 0$. In tal caso, la soluzione è $|i| = -i$.

Esercizio

Calcolare le correnti i_1 e i_2 e la potenza erogata dai generatori, verificando che questa è dissipata nelle resistenze (effetto Joule).

$$\mathcal{E}_1 = 18\text{ V} \quad \mathcal{E}_2 = 12\text{ V}, \quad R_1 = 12\ \Omega, R_2 = 2\ \Omega, R_3 = 6\ \Omega \\ R_4 = 4\ \Omega$$



i : verso
percorrendo
analisi
maglie

N.B. Se non c'è un nodo, allora le correnti non sono serie.

Consideriamo le maglie e scriviamo, per ora, come disegnato, in verso orario. Partiamo dal punto D.

Poniamo a zero il potenziale in tale punto. Si ha

$$-\mathcal{E}_1 - R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0. \text{ Si noti che in C il potenziale}$$

è lo stesso di quello in D. Per la maglia a destra:

$$-i_2 R_2 + \mathcal{E}_2 - i_2 R_4 + i_3 R_3 = 0. \text{ Inoltre, in B } i_3 = i_1 - i_2.$$

Quindi

$$-\mathcal{E}_1 - R_1 \dot{i}_1 - R_3 (\dot{i}_1 - \dot{i}_2) = 0$$

$$\mathcal{E}_2 - (R_2 + R_4) \dot{i}_2 + R_3 (\dot{i}_1 - \dot{i}_2) = 0$$

da cui segue

$$\dot{i}_1 \approx -0.8 \text{ A}, \quad \dot{i}_2 \approx 0.6 \text{ A}$$

Potenza erogata dai generatori:

$$P_{\text{gen}} = \mathcal{E}_1 |\dot{i}_1| + \mathcal{E}_2 |\dot{i}_2| = 21.6 \text{ W}$$

Potenza dissipata nelle resistenze

$$P_R = \sum_k R_k \dot{i}_k^2 = (12 \cdot 0.64 + 2 \cdot 0.36 + 6 \cdot 1.96 + 4 \cdot 0.36) \text{ W} = 21.6 \text{ W}$$

Sia noti che sia $\dot{i}_1 = -0.8 \text{ A}$ che $\dot{i}_3 = \dot{i}_1 - \dot{i}_2 = -1.4 \text{ A}$ sono negative, quindi il loro verso è l'opposto di quello riportato in figura.

Corrente elettrica

In metalli come il rame o l'argento, il numero di elettroni liberi per unità di volume coincide col numero di atomi per unità di volume

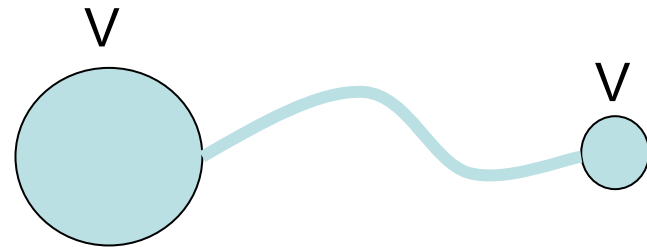
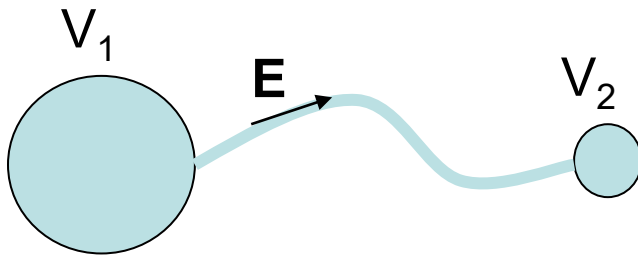
numero di portatori di carica nel rame per unità di volume

$$n = \frac{N_A \rho}{A} = \frac{6.022 \cdot 10^{26} \cdot 8.96 \cdot 10^3}{63.55} \\ = 8.49 \cdot 10^{28} \text{ elettroni/m}^3$$

L'ordine di grandezza è lo stesso per tutti i conduttori metallici

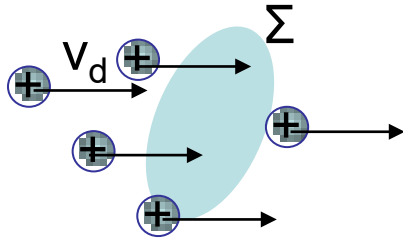
La velocità media dei portatori di carica è nulla:

$$\vec{v}_m = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i = 0$$



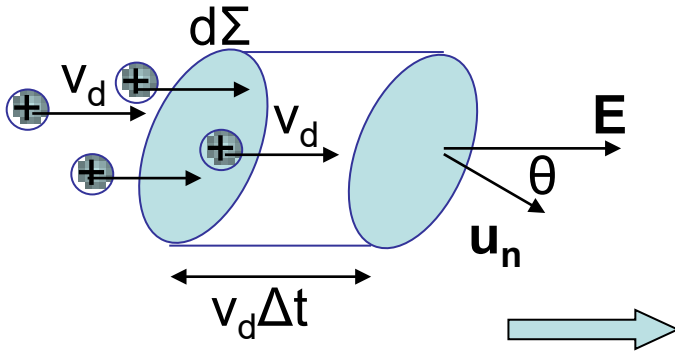
Se $V_1 > V_2$, si genera un passaggio di carica (corrente) che equilibra il sistema di conduttori finché il potenziale è uniforme.

Corrente elettrica



L'intensità di corrente è la carica Δq che passa attraverso Σ nell'unità di tempo Δt per $\Delta t \rightarrow 0$

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$



$$d\tau = v_d \Delta t d\Sigma \cos \theta$$

$$\Delta q = n_+ e d\tau = n_+ e v_d d\Sigma \cos \theta \Delta t$$

$$di = n_+ e v_d d\Sigma \cos \theta$$

definiamo il vettore densità di corrente:

$$\vec{j} = n_+ e \vec{v}_d$$

$$\Rightarrow di = \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$



$$i = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

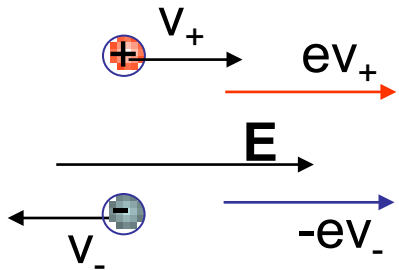
La corrente è uguale al flusso del vettore densità di corrente.

Corrente elettrica

Se in particolare Σ è perpendicolare a $\mathbf{j}$:

$$i = j\Sigma$$

$$j = \frac{i}{\Sigma}$$



Se i portatori di carica sono elettroni ($q=-e$), sotto l'azione di $\mathbf{E}$ si muoveranno verso sinistra, ma la densità di corrente non cambia verso.

$$\mathbf{j} = -n_- e \mathbf{v}_-$$

Quando sono presenti, come nei semiconduttori, portatori positivi e negativi:

$$\vec{\mathbf{j}} = n_+ e \vec{\mathbf{v}}_+ - n_- e \vec{\mathbf{v}}_-$$

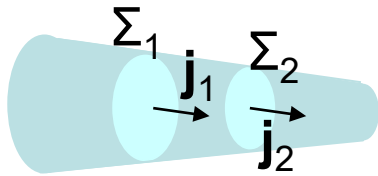
$\mathbf{j}$ ha sempre la direzione e il verso di $\mathbf{E}$

Esempio: Un conduttore cilindrico di rame, avente sezione di area $\Sigma = 4 \text{ mm}^2$, è percorso da una corrente di intensità $i = 8 \text{ A}$. Calcolare la velocità di deriva degli elettroni

$$j = \frac{i}{\Sigma} = 2 \text{ A/mm}^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$$

$$\begin{aligned} v_d &= j / n e = 1.47 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \\ &= 0.147 \text{ mm/s} \end{aligned}$$

Corrente elettrica stazionaria



Conduttore percorso da corrente

Non c'è passaggio di corrente attraverso la superficie laterale del cono.

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \int_{\Sigma_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_1 d\Sigma && \text{corrente che entra} \\ i_2 &= \int_{\Sigma_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_2 d\Sigma && \text{corrente che esce} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{dal volume delimitato da } \Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2 \text{ e la} \\ \text{superficie laterale del cono.} \end{array}$$

Se $i_1 = i_2$ la corrente è stazionaria: corrente costante attraverso ogni sezione del conduttore

Unità di misura: Ampere (A): si ha l'intensità di corrente di 1A quando, attraverso una data superficie, passa la carica di 1C in un secondo

$$A = \frac{C}{s}$$

Legge di Ohm

La densità di corrente nel conduttore è proporzionale al campo elettrico esterno:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$$

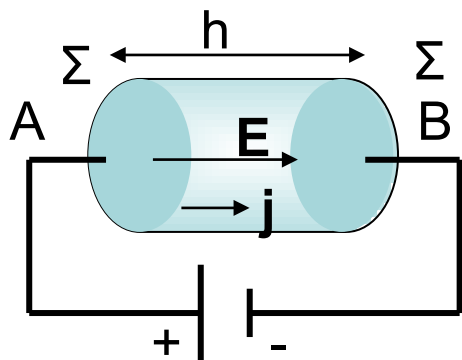
Legge di Ohm della
conduttività elettrica

σ : conduttività elettrica

$$\rho = \frac{1}{\sigma} : \text{resistività del conduttore}$$

Verificata sperimentalmente anche nei gas e nei liquidi

Conduttore metallico



$$i = j\Sigma = \frac{\Sigma}{\rho} E \longrightarrow E = \frac{\rho}{\Sigma} i$$

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Eh = \frac{\rho h}{\Sigma} i$$

$$R = \frac{\rho h}{\Sigma}$$

Resistenza

$$V = Ri$$

Legge di Ohm per i
conduttori metallici

Legge di Ohm

Se la sezione del conduttore metallico è variabile, per un tratto lungo dh e sezione Σ :

$$V = \int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \underbrace{\int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma}}_R i = Ri$$

In regime stazionario il rapporto tra la d.d.p. applicata ai capi di un conduttore metallico e l'intensità di corrente che lo attraversa è pari alla RESISTENZA

La resistenza dipende soltanto dalla resistività del materiale e dalle sue dimensioni.

(dipende anche dalla temperatura)

Unità di misura: resistenza R : Ohm (Ω): $\Omega = V/A$
resistività ρ : Ωm
conduttività σ : $(\Omega m)^{-1}$

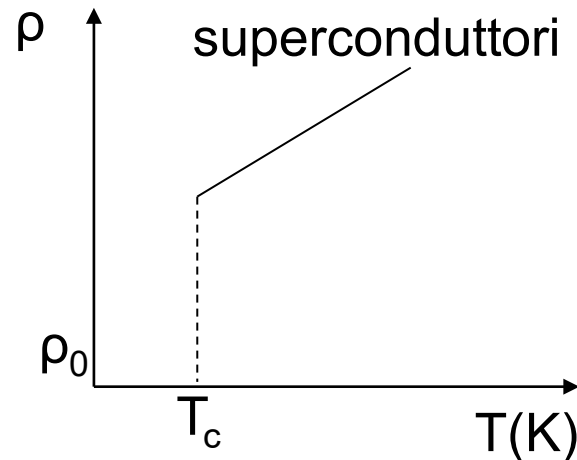
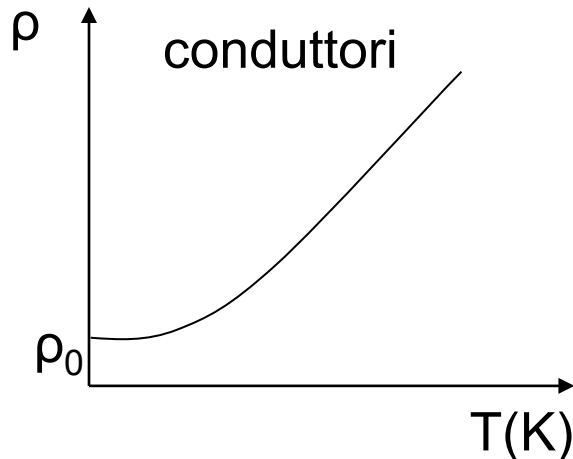
Dipendenza con la T

Effetti termici: attorno a $T=20^{\circ}\text{C}$, la dipendenza è lineare

$$\rho(T) = \rho(20^{\circ}\text{C})(1 + \alpha \cdot (T - 20^{\circ}\text{C}))$$

con α : coefficiente termico

$$\alpha = \frac{1}{\rho(20^{\circ}\text{C})} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}$$



Per i materiali superconduttori (H. Kammerlinnigh Onnes (1911)), al di sotto di una temperatura critica T_c , si può mantenere una corrente anche elevata senza applicare una d.d.p.

Potenza – Effetto Joule

Consideriamo una carica dq che si muove attraversando una d.d.p. V .

Nello spostamento viene compiuto il lavoro:

$$dW = V dq = V i dt$$

e spesa la potenza:

$$P = \frac{dW}{dt} = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$$



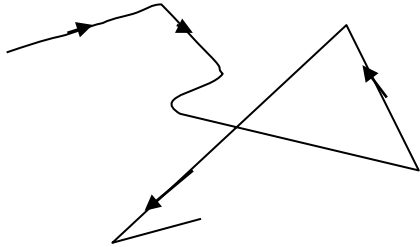
$$W = \int_0^t P dt = \int_0^t Ri^2 dt = Ri^2 t$$

Questo lavoro è necessario per vincere la resistenza opposta dal reticolo cristallino al moto ordinato degli elettroni e viene assorbito dal conduttore la cui energia interna aumenta  aumenta la sua temperatura: **Effetto Joule**

Modello classico della conduzione elettrica

Proposto da Drude (1900) e sviluppato da Lorentz (1906)

Gli elettroni si muovono nel reticolo in modo disordinato. Il cammino libero medio tra due urti con gli ioni è: $\lambda = v \tau$



Quando si applica un campo $\mathbf{E}$, gli elettroni acquistano un'accelerazione $\mathbf{a} = -e\mathbf{E}/m$ e alla distribuzione casuale e isotropa delle velocità si sovrappone una velocità di deriva
 $v_d \ll v$

Sia $\mathbf{v}_i$ la velocità dopo un urto e $\mathbf{v}_{i+1}$ la velocità subito prima dell'urto successivo :

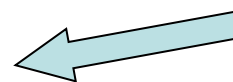
$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i - \frac{e\mathbf{E}}{m} \tau \quad \rightarrow$$

$$\vec{\mathbf{v}}_d = \frac{1}{N} \sum_i \vec{\mathbf{v}}_{i+1} = \frac{1}{N} \sum_i \vec{\mathbf{v}}_i - \frac{e\vec{\mathbf{E}}}{m} \tau = -\frac{e\mathbf{E}}{m} \tau$$

La densità di corrente che consegue a questo moto ordinato è $\vec{\mathbf{j}} = -n_e e \vec{\mathbf{v}}_d = \underbrace{\frac{n_e e^2 \tau}{m}}_{\sigma} \vec{\mathbf{E}}$

$$\vec{\mathbf{j}} = \sigma \vec{\mathbf{E}}$$

Legge
di Ohm



σ conduttività

Esempio

La resistività del rame a $T=20^{\circ}\text{C}$ è $\rho=1.67 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$.

Calcolare il valore di $\mathbf{E}$ necessario per mantenere una densità di corrente $j=2 \text{ A/mm}^2$ (massima tollerabile)

$$E = \rho j = 3.34 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$$

La conduttività del rame è: $\sigma = 1 / \rho = 0.60 \cdot 10^8 (\Omega\text{m})^{-1}$

Il tempo medio tra due urti è: $\tau = \frac{m\sigma}{n_e e^2} = 2.51 \cdot 10^{-14} \text{ s}$

Il cammino libero medio: $\lambda = v\tau = v_F\tau = 2.51 \cdot 10^{-14} \cdot 1.58 \cdot 10^6 = 3.97 \cdot 10^{-8} \text{ m}$

distanza tra gli ioni del reticolo: $2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$



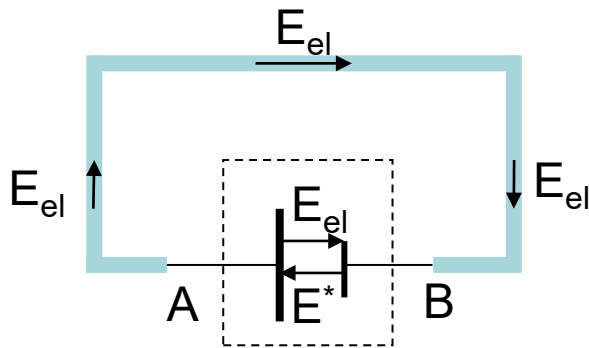
$\lambda \cong 200$ distanze
interatomiche

Forza elettromotrice

In un circuito chiuso: $\oint \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = 0$

Perché la corrente nel circuito sia non nulla è necessaria la presenza di una f.e.m.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E}^* \cdot d\vec{s} = R_T i$$



La f.e.m. è caratterizzata da una resistenza interna r_i

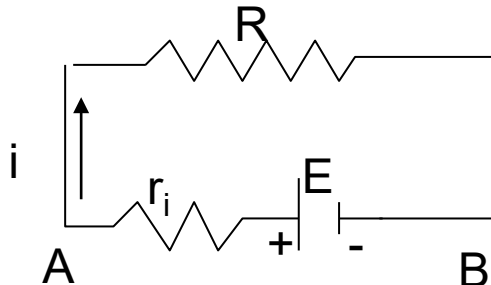
$$V_B - V_B = 0 = \mathcal{E} - r_i i - Ri$$

$$\mathcal{E} = (r_i + R)i = R_T i$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r_i}$$

La d.d.p. ai capi della resistenza è:

$$V_A - V_B = Ri = \mathcal{E} - r_i i$$



$$\mathcal{E} i dt = R_T i^2 dt$$

Il lavoro fornito dal generatore viene dissipato nelle resistenze del circuito. La potenza dissipata è:

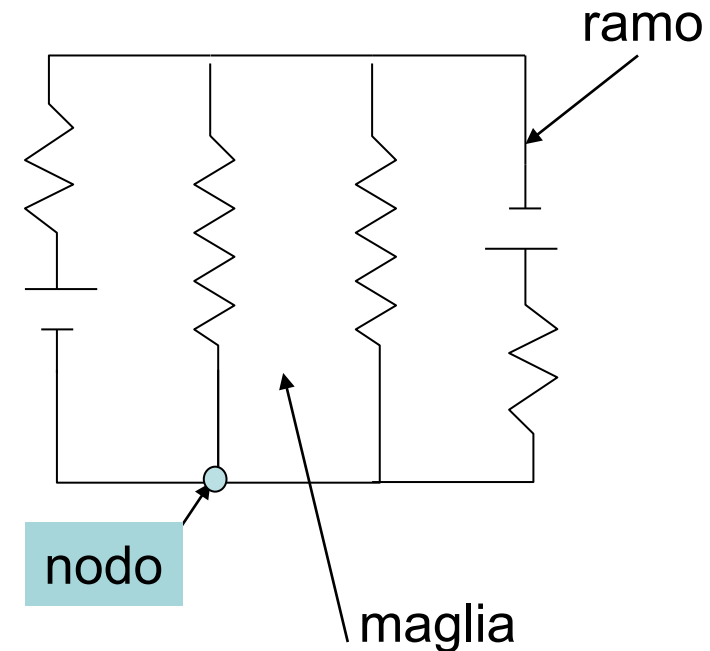
$$\mathcal{E} i = R_T i^2$$

Leggi di Kirchhoff per le reti elettriche

nodo: punto nel quale convergono almeno 3 conduttori

ramo: può contenere componenti attivi (generatori) o passivi (resistori)

maglia: cammini chiusi costituiti da più rami



Prima legge di Kirchhoff (nodi):

La somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla

$$\sum_k i_k = 0$$

Seconda legge di Kirchhoff (maglie):

La somma algebrica delle f.e.m. presenti nei rami della maglia è uguale alla somma algebrica delle d.d.p. ai capi dei resistori

$$\sum_k R_k i_k = \sum_k \mathcal{E}_k$$