

LEZIONE 19

8.04.2026

Esercizi sui condensatori

Corrente elettrica

Resistenza e legge di Ohm

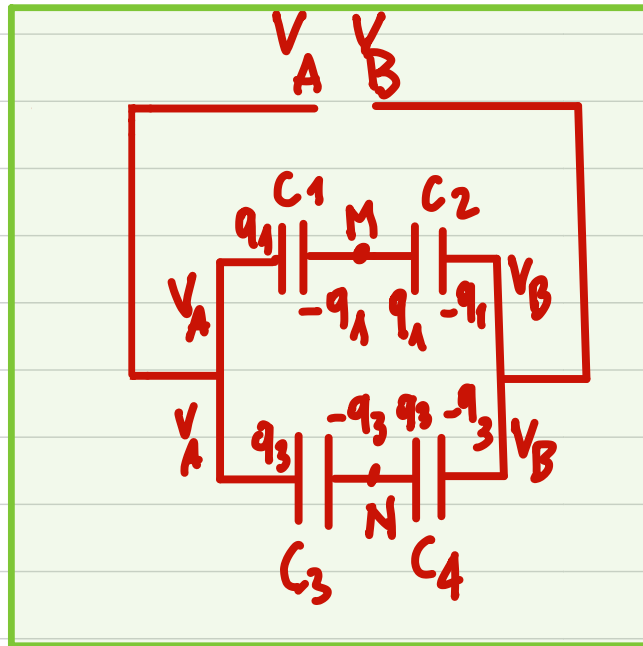
Effetto Joule

Resistenza in serie e in parallelo

Esercizio

Determinare la capacità C_4 in modo tale

che $V_M = V_N$ sapendo che $C_k = k \text{ mF}$, $k=1,2,3$



$$C = \frac{q}{\Delta V} \rightarrow \Delta V = \frac{q}{C}$$

$$V_A - V_M = \frac{q_1}{C_1}$$

$$V_M - V_B = \frac{q_1}{C_2}$$

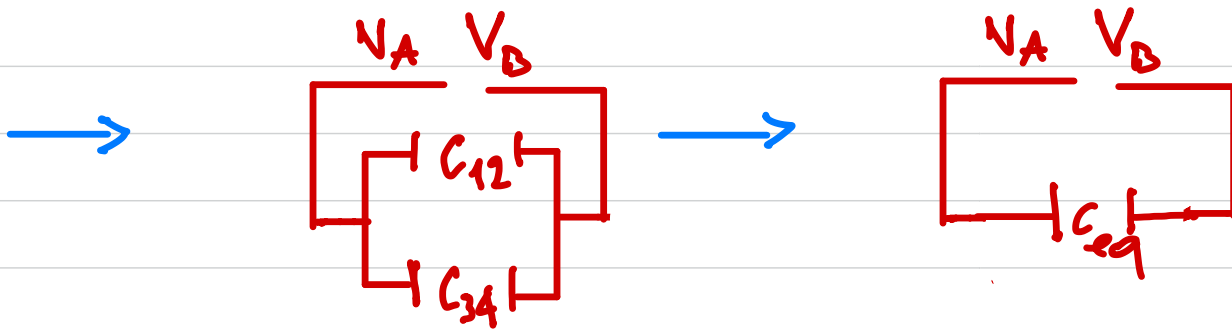
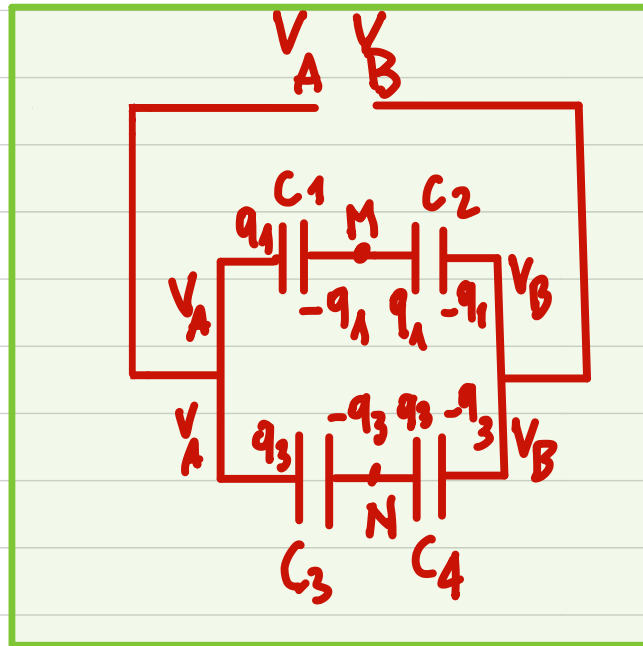
$$V_A - V_N = \frac{q_3}{C_3}$$

$$V_N - V_B = \frac{q_3}{C_4}$$

$$V_M = V_N \rightarrow \begin{cases} \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_3}{C_3} & 1) \\ \frac{q_1}{C_2} = \frac{q_3}{C_4} & 2) \end{cases}$$

Dalla 1) $\frac{q_3}{q_1} = \frac{C_3}{C_1} = 3$, dalla 2) $C_4 = \frac{q_3}{q_1} C_2 = 3 C_2 = 6 \text{ mF}$

Si noti che il circuito è riducibile a un circuito con C_{eq}



$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

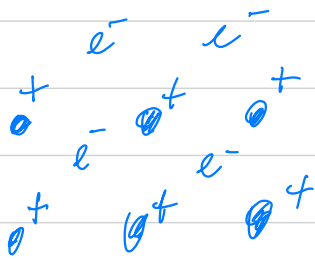
$$\frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}$$

$$C_{eq} = C_{12} + C_{34}$$

$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}$$

CONDUZIONE ELETTRICA

Materiali conduttori elettrici:



IONI POSITIVI

e^+ : FISSI

e^- : portatori mobili di carica (elettroni)

Nel rame vi sono

$$n \approx 8.5 \cdot 10^{28} \text{ elettroni/m}^3$$

nell'argento

$$n = 5.86 \cdot 10^{28} \text{ elettroni/m}^3$$

Gli elettroni compiono un moto disordinato.

Applicando un campo elettrico esterno al conduttore,

il suo effetto all'interno di esso viene annullato

in tempi brevissimi, in quanto le cariche

si muovono per tornare quasi immediatamente nello stato coatto, annullando l'effetto interno al conduttore del campo pervenuto esternamente.

Si tratta quindi di una corrente che dura per un intervallo temporale brevissimo.

Per ottenere un flusso di carica ordinato che duri nel tempo, è necessario un dispositivo capace di mantenere una differenza di potenziale e quindi un campo elettrico. Un tale dispositivo è detto

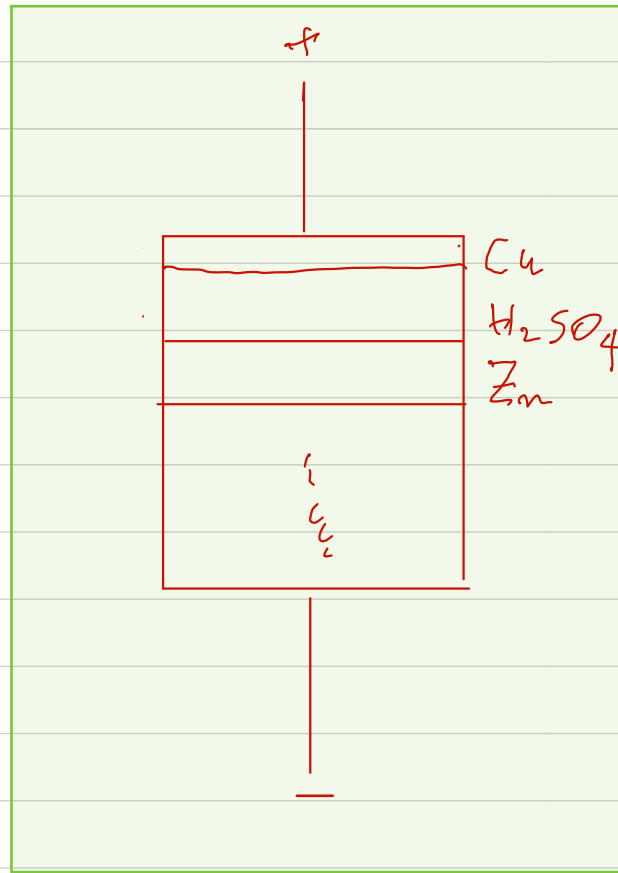
GENERATORE DI FORZA ELETTROMOTRICE (f.e.m.)

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

\(\oint\) è il concetto
elettrico

$$\vec{E} \neq -\vec{\nabla} V$$

Alessandro Volta 1800 : Pila



DISCO DI RAME

TAMPONE IMBEVUTO DI UNA SOLUZIONE ACQUOSA DI
ACIDO SOLFORICO

DISCO DI ZINCO

|||

Energia chimica si trasforma in energia elettrica

Effetto di una forza elettromotrice

le cariche positive che si spostano dal conduttore
da potenziale più alto a quello più basso;
tipo cascate d'acqua



CORRENTE: MOTO ORDINATO DI CARICHE ELETTRICHE

per esempio: elettroni in un filo d'rame.

Come vedremo, il contributo alla corrente delle cariche
positive che si muovono in un verso è lo stesso delle cariche
negative che si muovono, con le stesse velocità, nel verso
opposto. La velocità tipica degli elettroni è: 10^6 m/s, di per sé
molto alta, ma appena lo 0.3% della velocità della luce,
che è $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Non si hanno quindi effetti relativistici
rilevanti. Infatti l'ordine di grandezza degli effetti relativistici
è dato da γ^{-1} , dove $\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$. Nel caso in esame
si ha $\gamma^{-1} = 1.000005$

Intensità di corrente

L'intensità di corrente è definita come le "valore di carica":

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

Unità di misura di i :
 $\frac{\text{Coulombs}}{\text{secondi}} = \text{A (Ampère)}$

Importante: i è una grandezza scalare e tipicamente si considera il suo valore assoluto:

"1 Ampère" non "-1 Ampère"

Comunque, è chiaro che $i = \frac{dQ}{dt}$ può essere anche negativo, che quindi serve ad i un verso di percorrenza.

Più avanti considereremo le densità di corrente $\vec{j}$. Risulta

che

$$i = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}$$

$\uparrow$

densità di corrente

Quindi il verso di i è deducibile da quello di $\vec{j}$.

VERSO DI i = Verso nel quale si muoverebbero le cariche positive (anche se spesso gli effettivi portatori di carica sono negativi: ioni sono più mobili che non gli elettroni).

GENERATORI

Dispositivi in grado di mantenere una d.d.p. costante o variabile

- fili, accumulatori, generatori di tensione

- Schema di un generatore $\begin{array}{c} + \\ | \\ - \end{array}$

Velocità di deriva: velocità media

assunta da una carica a causa del
campo elettrico

$$i = n A e \overset{\text{vel. di deriva}}{v_d}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
area della sezione del filo conduttore

(n) : # cariche per unità di volume

→ l'elettrone è accelerato da $\vec{E}$

→ l'elettrone "urta" una molecola
e cambia direzione → perde
velocità lungo la direzione del
conduttore

→ n_+ = numero di portatori di
carica $+|e|$ per unità di volume

→ n_- = numero di portatori di carica $-|e|$
per unità di volume

Forse mi portatori di carica
è $\vec{F} = q \vec{E}$

→ origine una corrente i

— $\vec{F} = q \vec{E}$:

$q > 0$ $\vec{F}$ è parallelo ad $\vec{E}$, quindi la carica
si muove nel verso di $\vec{E}$

$q < 0$ $\vec{F}$ è antiparallelo ad $\vec{E}$, quindi la carica
si muove nel verso che è l'opposto di quello di $\vec{E}$

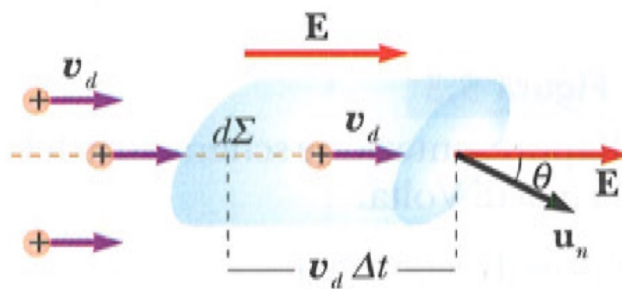


Figura 5.6

Calcolo dell'intensità di corrente
attraverso una superficie.

la carica complessiva che attraversa $d\Sigma$ in un tempo Δt
è quella contenuta nel volume

$$d\tau = v_d \Delta t d\Sigma \cos\theta$$

è (d'ora in avanti consideriamo $e > 0$)

$$\Delta q = n_+ e d\tau = n_+ e v_d \Delta t d\Sigma \cos\theta$$

per cui

$$i = \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = n_+ e v_d d\Sigma \cos\theta$$

↑
corrente che passa attraverso Σ

Densità di corrente

$$di = \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma, \quad d\vec{\Sigma} = \vec{u}_n d\Sigma$$

$\vec{j} = n_+ e \vec{v}_d$

$\vec{u}_n \uparrow d\vec{\Sigma}$

$\vec{u}_n =$ vettore di $d\vec{\Sigma}$, quindi
perpendicolare alla
superficie infinitesimale
 $d\Sigma$

$$i = \int_0^i di' = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{se } \vec{j} \parallel \vec{u}_n \text{ su tutto } \Sigma}}{=} \int_{\Sigma} j d\Sigma \stackrel{\substack{\downarrow \\ \text{se } j \text{ uniforme su tutto } \Sigma}}{=} j \int_{\Sigma} d\Sigma = j \Sigma$$

Se, come nei conduttori metallici, i portatori di carica sono gli elettroni, allora

$$\vec{J} = -n_- e \vec{v}_- \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{velocità di deriva cariche} \\ \text{negative} \end{array}$$

Se, come nei semiconduttori, sono presenti portatori sia con carica positiva che negativa allora

$$\vec{J} = \vec{J}_+ + \vec{J}_- = n_+ e \vec{v}_+ - n_- e \vec{v}_- \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{velocità di deriva} \\ \text{cariche positive} \end{array}$$

Si noti che, per quanto detto riguardo al verso delle velocità delle cariche rispetto ad $\vec{E}$, si ha che $\vec{J}_+$ e $\vec{J}_-$ sono vettori paralleli.

Sperimentalmente si deduce la legge di Ohm

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

σ : conduttività elettrica

La densità di corrente $\vec{J}$ è

proporzionale al campo elettrico $\vec{E}$

σ : CONDUITTIVITÀ ELETTRICA

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \longrightarrow \vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho}$$

ρ : RESISTIVITÀ ELETTRICA

Poiché $j = \frac{i}{\Sigma}$, si ha che $J = E/\rho$ implica

$$E = \rho \frac{i}{\Sigma}$$

Applicando una d.d.p. V ad un conduttore di lunghezza h , si ha

$$V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\zeta} \quad \begin{matrix} \vec{E} \parallel d\vec{\zeta} \text{ e uniforme} \\ \downarrow \\ = E h, \quad h = B - A \end{matrix}$$

e la legge di Ohm può essere espressa nella forma

$$V = E h, E = \frac{\rho}{\Sigma} i$$

$$V = \frac{\rho h}{\Sigma} i$$

1)

Definiamo la "resistenza"

$$R := \frac{\rho h}{\Sigma}$$

2)

la cui unità di misura, V/A , è detta **Ohm**, e rappresentata da Ω .

La 1) e la 2) implicano la forma più nota della legge di Ohm

$$V = R i$$

La resistività, e quindi la resistenza, dipende dal tipo di materiale.

Sicché che R dipendono anche dalla temperatura. Tale dipendenza

è ben approssimata, in un intervallo di qualche decina di

gradi intorno a 20°C , dalla funzione lineare

$$\rho = \rho_{20} (1 + \alpha \Delta T)$$

dove $\Delta T := T - 20^\circ\text{C}$ e ρ_{20} è la resistività a 20°C .

EFFETTO JOULE

Consideriamo una carica dq che si muove attraverso una d.d.p. $V = V_A - V_B$. Il lavoro del campo elettrico è

$$V = -\Delta V = -(V_B - V_A)$$

$\downarrow$

$$dW = V dq = V i dt$$
$$dq = \left(\frac{dq}{dt} \right) dt = i$$

Viene "scesa" la potenza elettrica

$$P := \frac{dW}{dt} = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$$

$$dW = P dt$$
$$W = \int_0^W dW' = \int_0^t P dt' = \int_0^t Ri^2 dt'$$

Se i è costante, allora

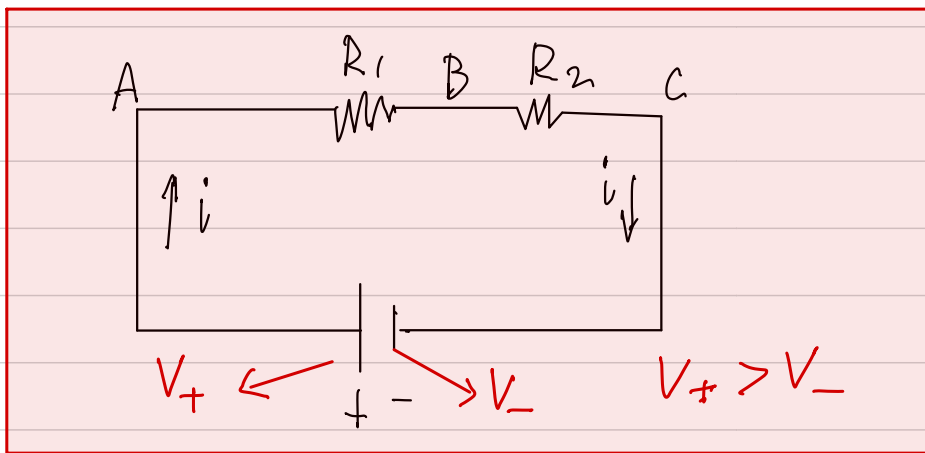
$$W = Ri^2t$$

Questo è il lavoro necessario per vincere la resistenza opposta dal reticolo cristallino al moto ordinato degli elettroni. Ciò significa che tale energia è assorbita dal conduttore, fenomeno che implica un aumento della temperatura del conduttore stesso. Questo è l'effetto Joule.

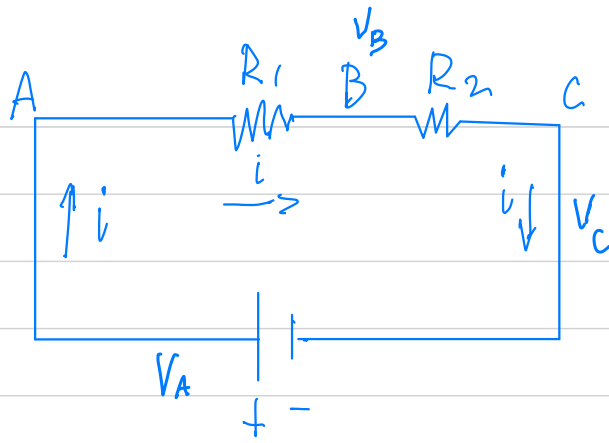
RESISTENZE IN SERIE E IN PARALLELO

Resistenza: $\overset{R}{\text{---} \text{m} \text{---}}$

Resistenze in serie: 2 resistenze connesse da un unico conduttore



N.B. È utile dare un verso alla corrente, alla fine dei conti può capitare che si ottenga una i negativa. Questo vuol dire che il verso della corrente è l'opposto di quello assegnato. Mentre i può esser negativo, il valore riportato è sempre positivo. Quindi, il valore riportato è il valore assoluto.

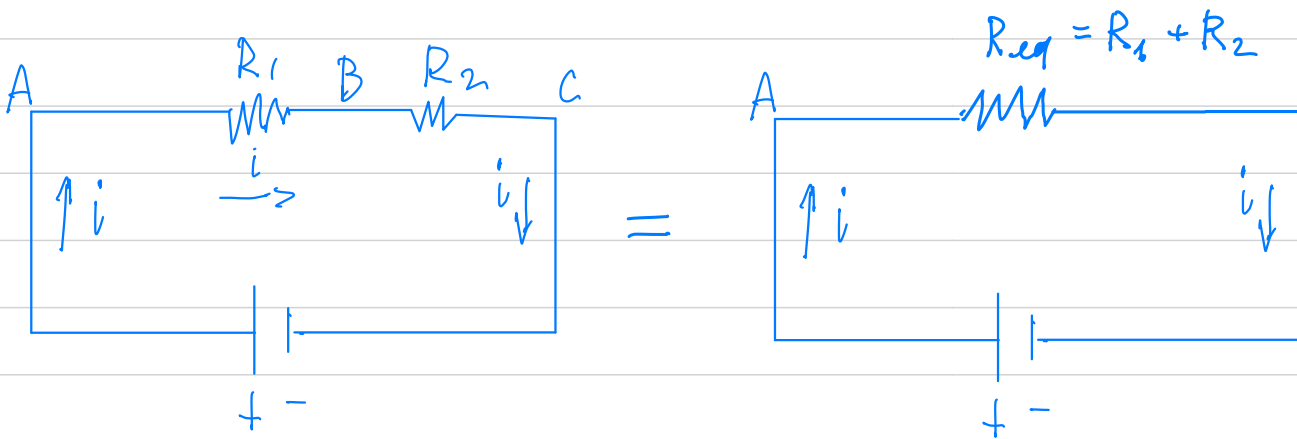


le due resistenze sono percorse dalla stessa corrente

$$\begin{cases} V_A - V_B = R_1 i \\ V_B - V_C = R_2 i \end{cases} \rightarrow \text{stesse corrente}$$

$$\Rightarrow V_A - V_C = (R_1 + R_2)i = R_{eq} i$$

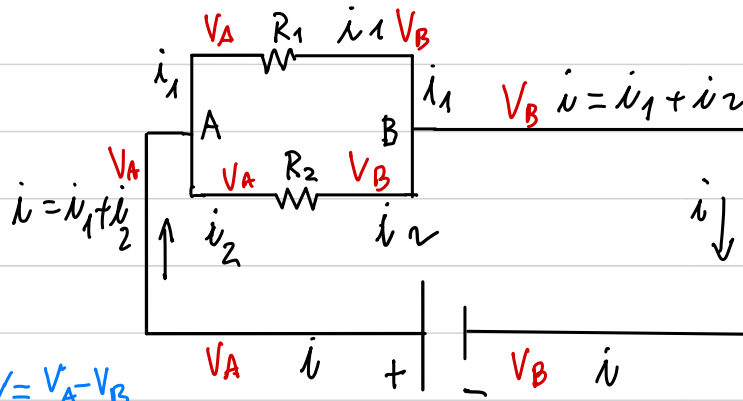
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$



n resistenze in serie:

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k$$

Resistenze in parallelo: connesse tramite 2 conduttori (fili elettrici)



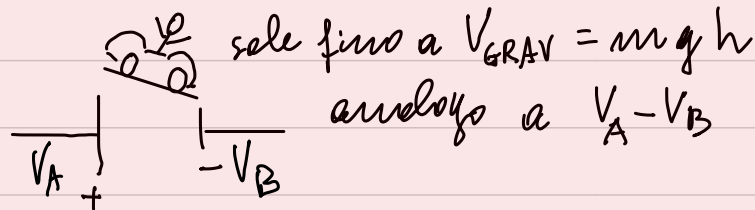
STESSO $V = V_A - V_B$

$$i_1 = \frac{V}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V}{R_2}$$

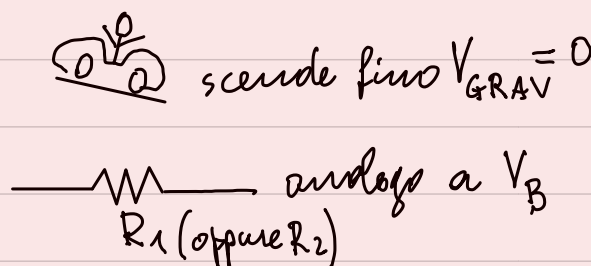
Il potenziale in $\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ V_A \end{array} \right]$ è ovunque lo stesso. Analogamente il potenziale in $\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ V_B \end{array} \right]$ è ovunque lo stesso. Ognuno dei due rami è un conduttore, quindi il potenziale in un ramo è ovunque lo stesso.

Un circuito con sde resistenze può essere interpretato come l'analogo elettrico delle montagne russe

SALE



SCENDE



Si ha quindi

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V}{R_{eq}} \quad 3)$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Poiché 3) implica

$$V = R_{eq} i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i \quad 4)$$

si ha

$$i_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \quad i_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Potenza spesa:

$$\begin{aligned} P &= R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = R_1 \frac{V^2}{R_1^2} + R_2 \frac{V^2}{R_2^2} \\ &= V^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V^2}{R_{eq}} \stackrel{4)}{=} R_{eq} i^2 \end{aligned}$$

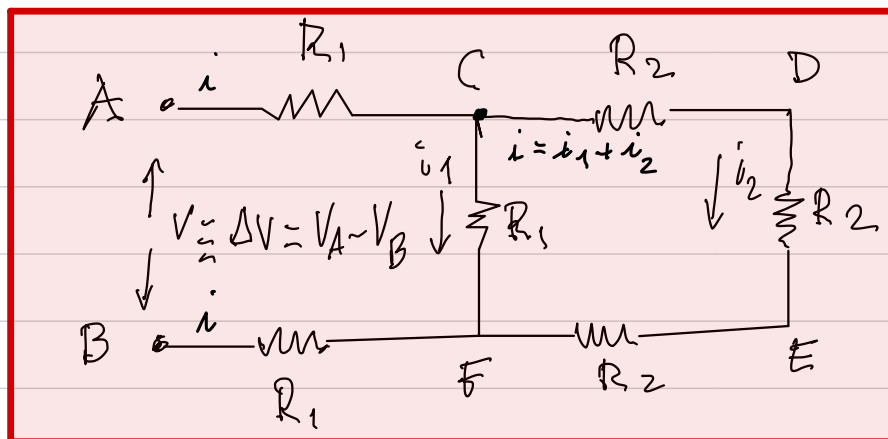
quindi

$$P = R_{eq} i^2$$

Nel caso di n resistenze:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

ESERCIZIO



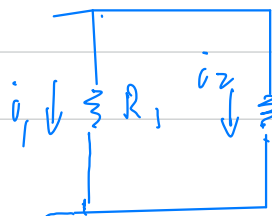
$$R_1 = 3\Omega \quad R_2 = 9\Omega \quad V = 17.4V$$

Calcolare la resistenza equivalente del circuito e la potenza spesa nel circuito stesso.

Panno CDEF  3 resistenze in serie dello stesso valore R_2

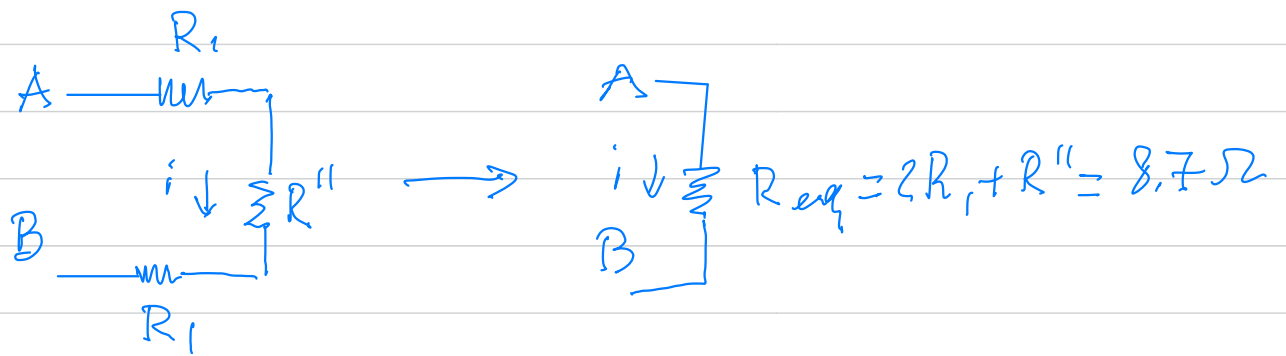
$$R' = 3R_2 = 27\Omega$$

R' è in parallelo con la resistenza in CF



$$\rightarrow R' \parallel R_1 \rightarrow \frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'}$$

Quindi il circuito è equivalente a



In R_{eq} fluisce la corrente

$$i = \frac{V}{R_{eq}} = 2A$$

la potenza totale spesa è

$$P = R_{eq} i^2 = \frac{V^2}{R_{eq}} = 34.8 \text{ W}$$

la d.d.p. tra i punti C e F è

$$V_C - V_F = R_2 i = 5.4 \text{ V}$$

Infine

$$i_1 = \frac{V_C - V_F}{R_1} = 1.8 \text{ A}$$
$$i_2 = \frac{V_C - V_F}{R_3} = 0.2 \text{ A}$$