

# LEZIONE 18

02.04.2026

Esercizi. Energie elettrostatiche di un condensatore sferico.  
Energie elettrostatiche di due condensatori in parallelo

Esercizio: Pressione elettrostatica

Dielettrici

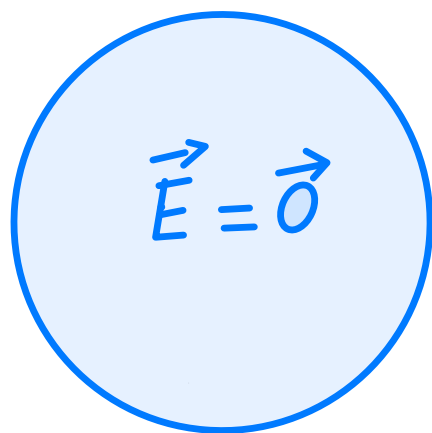
Condensatori con dielettrici in serie

Abbiamo visto che l'energia potenziale

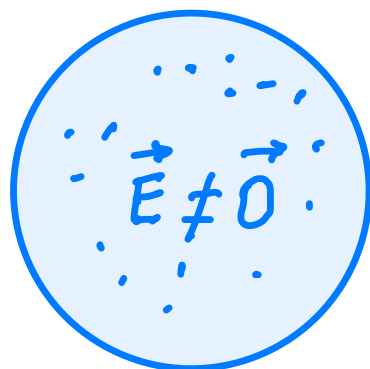
$$U_e = \int_0^{U_e} dU'_e = \int_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau \quad 1)$$

corrisponde al lavoro necessario per portare le cariche dall'infinito alla configurazione finale. Un esempio è rappresentato dalla figura

PRIMA: CARICHE ALL'INFINITO



DOPPO:



Lo spostamento delle cariche dall'infinito alla configurazione con  $\vec{E} \neq \vec{0}$  ha fornito un'energia potenziale elettrostatica al campo elettrostatico, data dalla 1)

La configurazione finale non è stabile: se si lanciano alcune le cariche avranno una certa dinamica. Per esempio se fossero tutte dello stesso segno, queste andrebbero all'infinito

acquistando energia cinetica. l'energia esterna fornita esternamente viene usata dal campo elettrostatico.

Calcolare l'energia potenziale all'interno dell'intercapedine di un conduttore sferico di raggio interno  $R_1$  ed esterno  $R_2$ .

N.B. Si noti che per calcolare tutte l'energia elettrostatica delle distribuzioni di cariche si dovrebbe integrare fino all'∞.

$$U_e = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

$d\tau = 4\pi r^2 dr$        $\uparrow$  quadrato del campo  
 $\vec{E}$  nell'intercapedine

$$= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

D'altronde, la capacità di un condensatore sferico è,  
come visto,

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

si ha quindi  $V_e = \frac{q^2}{2C}$

già ottenuto precedentemente. Nel limite  $R_2 \rightarrow \infty$

si ottiene

$$U_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_\infty}$$

con  $C_\infty = 4\pi\epsilon_0 R$ , capacità già calcolata.

### ESERCIZIO: ENERGIA ELETTROSTATICA DI DUE CONDENSATORI IN PARALLELO

Calcoliamo questa energia prima e dopo il collegamento in parallelo.

$$U_{e,im} = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2$$

$$U_{e,fin} = \frac{1}{2} (q_1 + q_2) V$$

da cui segue

$$\Delta U_e := U_{e,fin} - U_{e,im} = \frac{1}{2} q_1 (V - V_1) + \frac{1}{2} q_2 (V - V_2)$$

dove l'espressione del potenziale finale è, come già mostrato,

$$V = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}.$$

Si ha quindi

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} \frac{V_1 - V_2}{C_1 + C_2} (q_2 C_1 - q_1 C_2)$$

Poiché

$$V_1 - V_2 = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_1 C_2 - q_2 C_1}{C_1 C_2}$$

si ha

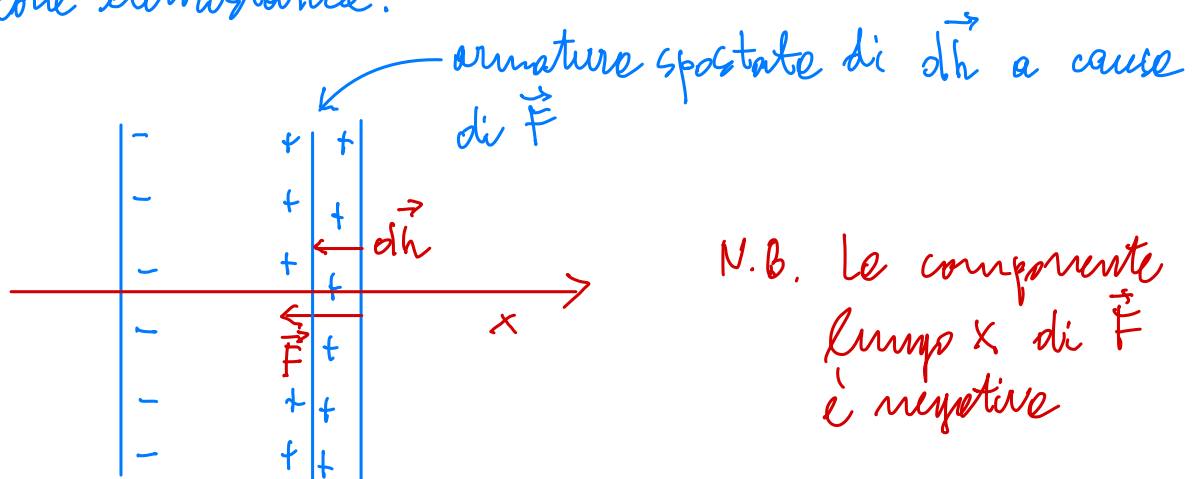
$$\Delta U_e = - \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (V_1 - V_2)^2$$

Si ricordi che il  $W$  nella relazione  $W = -\Delta U_e$  si riferisce al lavoro fatto dal campo elettrostatico. Quindi se  $W > 0$  è il campo che compie lavoro; se  $W < 0$  è il campo che acquista energia. Nel caso in esame  $\Delta U_e < 0$  per  $V_1 \neq V_2$ , quindi  $W > 0$ , ed è quindi il campo elettrostatico che, in questo caso, compie lavoro. La situazione è del tutto analoga al caso gravitazionale: per sollevare una molla da terra è necessario un lavoro esterno. Energia potenziale immagazzinata dal campo gravitazionale, che è una

volta verde, sotto forma di energia cinetica, una volta che la molla viene lasciata cedere.

## ESERCIZIO: Pressione elettrostatica

Calcolare le forze tra due armature di un condensatore piano, di area  $\Sigma$  distanti  $h$ , con carica  $q$ . Calcolare il rapporto  $F/\Sigma$ , detto pressione elettrostatica.



Come visto, l'energia elettrostatica per un condensatore piano è

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 h}{2\epsilon_0 \Sigma}$$

Per uno spostamento  $dh$  dell'armatura positiva si ha, come mostrato in figura, che  $dh < 0$ . Immaginiamo l'armatura con carica negativa come vincolata, equivalentemente, data la conservatività del campo elettrostatico, possiamo immaginare  $dh$  come

la variazione (negativa) delle distanze relative tra le due armature, senza specificare come esse avviano.

L'energia elettrostatica diminuisce poiché la sua variazione è negativa ( $dh < 0$ )

$$dU_e = \frac{q^2 dh}{2\epsilon_0 \Sigma} \stackrel{q = \sigma \Sigma}{=} \frac{\sigma^2 \Sigma dh}{2\epsilon_0}$$

e il lavoro fatto dalle forze è

$$dW = \vec{F} \cdot \underline{d\vec{h}} = -dU_e = \underbrace{-\frac{\sigma^2 \Sigma}{2\epsilon_0} dh}_{F_x} > 0$$

si ha quindi

$$F_x = -\frac{\sigma^2 \Sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{F} = (F_x, 0, 0)$$

e

$$|\vec{F}| = \frac{\sigma^2 \Sigma}{2\epsilon_0} \stackrel{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}{=} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma$$

per cui la pressione, cioè le forze per unità di superficie, è

$$P = \frac{F}{\Sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

detta pressione elettrostatica.

Si noti che tale relazione non contiene elementi caratteristici del sistema.

è l'espressione di

Risulta che tale pressione, identica a quella delle densità di energia elettrostatica, è valida anche per un conduttore sferico isolato carico. Questo è il caso di una bolla d'acqua saponata carica. Per valori di  $\sigma$  sufficientemente grandi, la pressione elettrostatica dovuta alla repulsione tra cariche dello stesso segno tende a dilatare la superficie delle bolle fino a distruggerle.

# DIELETTRICI

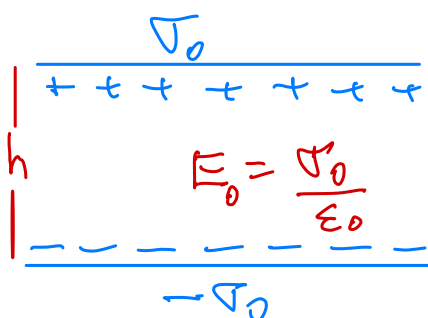
Come già discusso, un isolante è un materiale tale per cui le cariche prodotte localmente per strofinio non è libera di muoversi.

Tra gli isolanti ve ne sono alcuni che interposti tra armature cariche riducono la differenza di potenziale e quindi anche il campo elettrico. Gli isolanti con queste proprietà sono detti **dielettrici**.

Consideriamo un condensatore piano carico. Denotiamo con  $h$  le distanze tra le armature. Supponiamo che il condensatore sia isolato cosicché la carica rimane costante. Inserendo tra le armature una lastra conduttrice di spessore  $s < h$  la d.d.p. diminuisce:

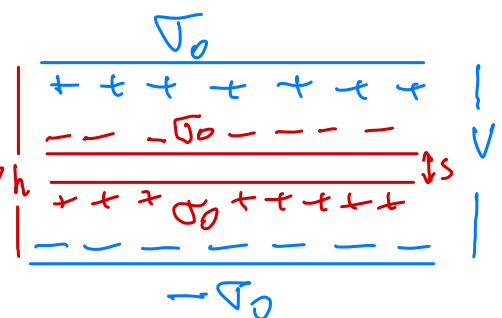
## CONDENSATORE PIANO

VUOTO



$$V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h$$

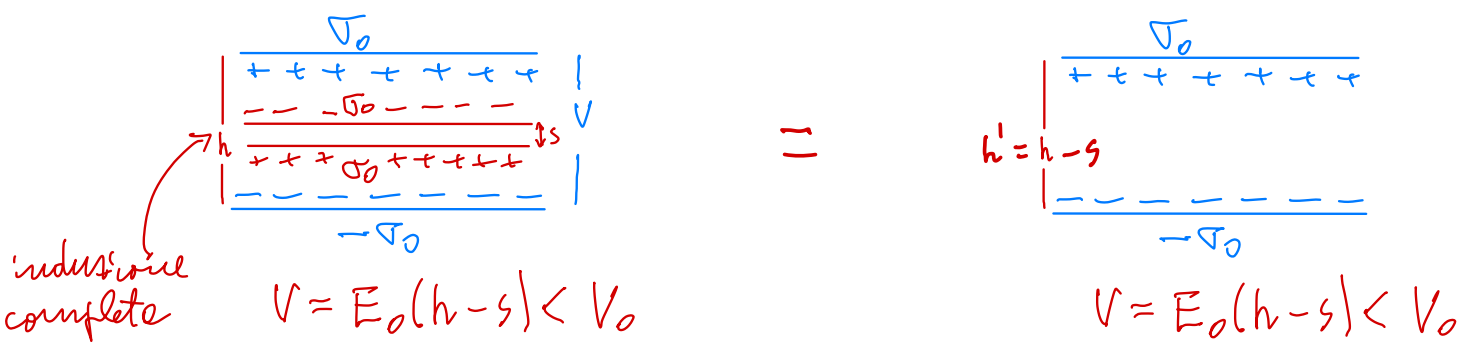
CON LASTRA CONDUTTRICE



induzione  
complete

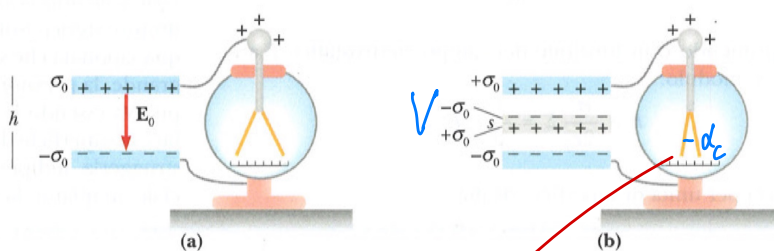
$$V = E_0 (h - s) < V_0$$

# LA LASTRA CONDUTTRICE "CANCELLA" LO SPAZIO



Si verifica sperimentalmente che anche inserendo una lastre di certi tipi di

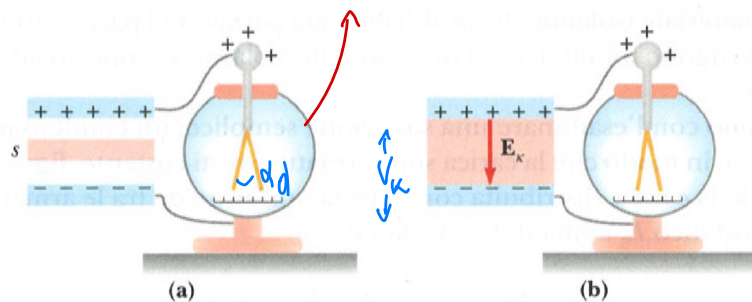
isolanti (detti **dielettici**) la d.d.p. diminuisce, anche se in misura minore



**Figura 4.32**

Schema di un esperimento per lo studio delle proprietà elettriche dei materiali conduttori.

$$\kappa_c < \kappa_d$$



**Figura 4.33**

Schema di un esperimento per lo studio delle proprietà elettriche dei materiali isolanti.

la d.d.p.  
diminuisce  
meno che  
nel caso  
del conduttore

$$\kappa := \frac{V_0}{V_K} > 1,$$

$$V_K < V_0,$$

$\kappa$ : COSTANTE DIELETTICA  
RELATIVA DEL DIELETTICO

Sperimentalmente si verifica che, a differenza della lastre conduttrice, nel caso del dielettrico non vi sono cariche libere sulle facce delle lastre dielettriche. La d.d.p. del condensatore diminuisce linearmente all'aumentare dello spessore del dielettrico, raggiungendo il minimo  $V_K$  quando  $s = h$ .

Sperimentalmente risulta

$k$  = "kappa" lettera  
dell'alfabeto greco  
"kappa" =  $k$

$$k := \frac{V_0}{V_K} > 1$$

= COSTANTE DIELETTRICA  
RELATIVA DEL  
DIELETTRICO

Inoltre,  $V_K$  dipende solamente dal tipo di dielettrico e non dalla carica né dalle dimensioni delle armature.

Per quanto riguarda il campo elettrico nel dielettrico, ipotizzando che resti uniforme si ha

$$E_K = \frac{V_K}{h} = \frac{V_0}{kh} = \frac{E_0}{k} = \frac{\sigma_0}{k\epsilon_0}$$

Si noti che

$$E_0 - E_K = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{K\epsilon_0} = \frac{K-1}{K} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\frac{K}{K-1} E_0}{1+K} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

dove  $\chi := K-1$ , detta *susceptività elettrica del dielettrico*.

La precedente relazione implica

$$E_K = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{K-1}{K} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

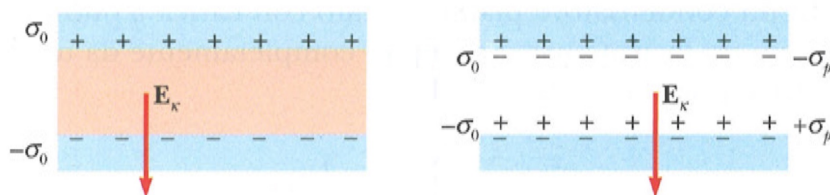
dove  $\sigma_p := \frac{K-1}{K} \sigma_0$ , è detta *densità di carica di polarizzazione*.

L'effetto del dielettrico è equivalente a quello di una

distribuzione di carica *non libera*  $\sigma_p$  accanto alla distribuzione

di carica  $\sigma_0$  di un condensatore identico ma senza dielettrico. Come

mostrato in figura questo riduce il campo elettrico a  $E_K = \frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\epsilon_0}$



**Figura 4.34**

Densità di carica  $\sigma_p$  sulle superficie di una lastra di materiale isolante.

↑  
deve essere dielettrico

Tali cariche sono il risultato di azioni del campo elettrico  $E_0$  all'interno del dielettrico.

Si noti che moltiplicando  $\sigma_p = \frac{\kappa-1}{\kappa} \sigma_0$  per l'area dell'armatura, si ottiene

$$q_p = \frac{\kappa-1}{\kappa} q_0$$

che è la carica sulle superficie del dielettrico,

la capacità del condensatore con lo spazio interno riempito di dielettrico è

$$C_K = \frac{q_0}{V_K} = \frac{\kappa q_0}{V_0} = \kappa C_0$$

## IL VUOTO COME UN DIELETTICO

Poniamo  $\epsilon := \kappa \epsilon_0$ , chiamata *costante dielettrica assoluta* (talvolta si usa il simbolo  $\epsilon$  piuttosto che  $\epsilon_0$ )  
È interessante notare che il vuoto può essere visto come un

dielettrico con caratteristiche particolari

- Costante dielettrica assoluta  $\epsilon_0$
- Costante dielettrica relativa  $\kappa = 1$
- Suscettività elettrica  $\chi = 0$

Gran parte dei risultati ottenuti nel vuoto si generalizzano immediatamente al caso in cui il vuoto sia riempito da un dielettrico.

Per esempio, tutti i passaggi utilizzati per derivare l'espressione dell'energia elettrostatica di un condensatore piano sono invariati e si ottiene

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{\sigma^2 \Sigma^2}{2 \epsilon \Sigma / h} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \Sigma h = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \tau$$

$\swarrow$   $\tau = \Sigma h$   
 $\nwarrow$   $C = \frac{\epsilon \Sigma}{h}$   $\nearrow$   $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$   
 $\nwarrow$   $C_k$

per cui la densità di energia elettrostatica è

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

Più generalmente, l'energia elettrostatica associata a qualsiasi campo elettrostatico è

$$U_e = \int_V u_e d\tau = \int_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 d\tau$$

Inoltre, il campo elettrico all'interno di un dielettrico dei condensatori sferici e cilindrici è

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 K r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \quad \text{condensatore sferico}$$

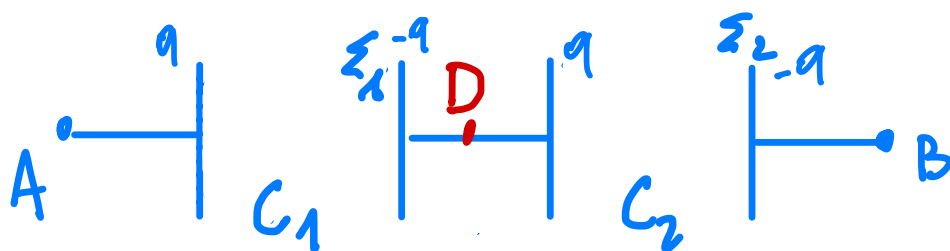
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 K r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \quad \text{condensatore cilindrico}$$

il caso del condensatore <sup>piano</sup> è stato considerato precedentemente:

$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ , dove  $\sigma$  è la distribuzione di carica sulle armature.

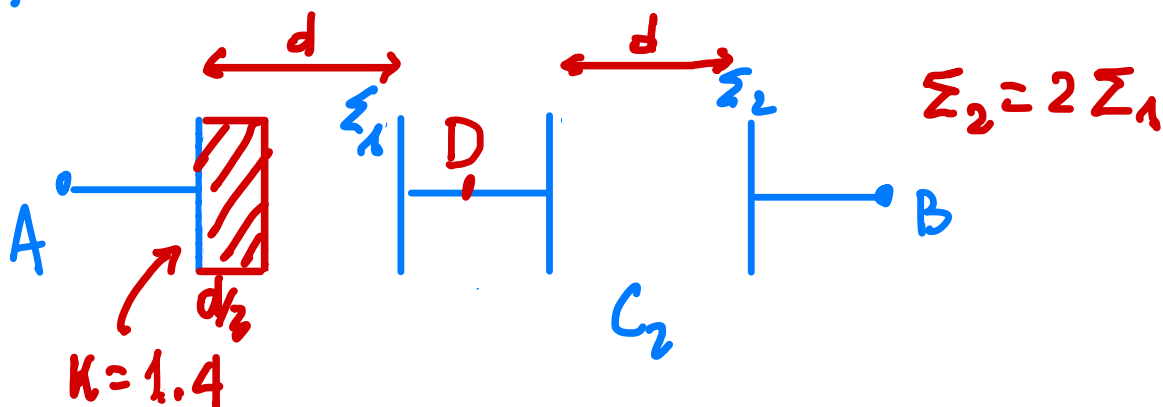
## ESERCIZIO

Si considerino due condensatori in serie. Entrambi hanno le armature alle stesse distanze ma le armature del condensatore tra D e B sono di area doppia rispetto a quelle del condensatore tra A e D:  $\Sigma_2 = 2 \Sigma_1$



È noto che  $V_{AB} = 270 \text{ V}$ . Calcolare  $V_{AD}$ .

Successivamente il I condensatore è riempito per  $\frac{1}{3}$  da un dielettrico con  $K = 1.4$ . Calcolare  $V_{AD}$  in questo caso.



**soluzione.** Si ricordi che nel vuoto

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{h} \quad 1)$$

mentre un condensatore riempito di dielettrico ha capacità

$$C_K = \kappa C_0$$

Osserviamo che dalla 1) segue

$$C_2 = 2 C_1$$

$$V_A - V_D = \frac{q}{C_1} \quad V_D - V_B = \frac{q}{C_2} = \frac{q}{2C_1}$$

$$\begin{cases} V_A - V_D = 2(V_D - V_B) \\ V_A - V_B = 270V \end{cases} \rightarrow \boxed{V_A - V_D = 180V}$$

La capacità di un condensatore dipende dall'inverso della distanza tra le armature. Possiamo considerare un condensatore con distanza  $h$  tra le armature

come due condensatori in serie la cui distanza tra le armature è  $l$  e  $h-l$  (con  $l \leq h$ ).

Poiché

$$l = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{C_l} \quad \text{e} \quad h-l = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{C_{h-l}}$$

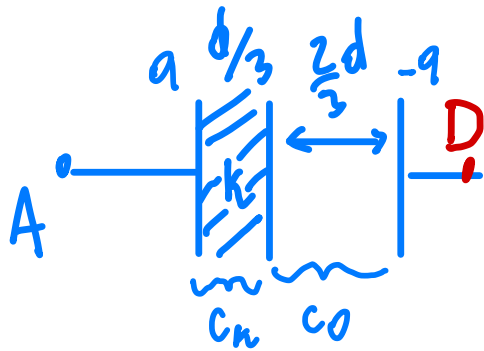
si ha

$$h = l + h-l = \epsilon_0 \Sigma \left( \frac{1}{C_l} + \frac{1}{C_{h-l}} \right)$$
$$\parallel$$
$$\frac{\epsilon_0 \Sigma}{C_h}$$

che è la dimostrazione che  $\frac{1}{C_h} = \frac{1}{C_l} + \frac{1}{C_{h-l}}$

cioè condensatori in serie hanno una capacità equivalente tale che la sua inversa è la somma dell'inverso delle capacità.

Possiamo quindi considerare il condensatore



come due condensatori in serie, di capacità

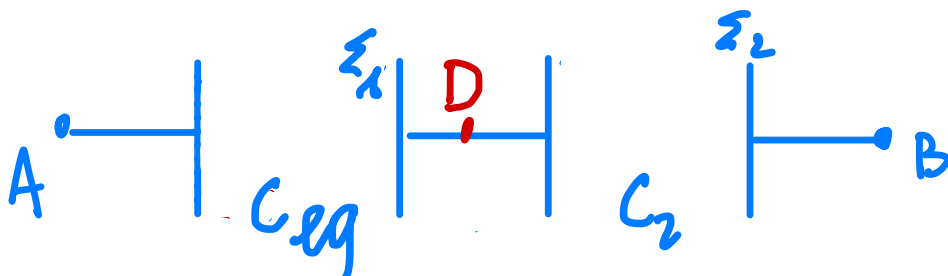
$$C_k = \frac{k \epsilon_0 \Sigma}{d/3} = 3k C_1 \quad \text{e} \quad C_0 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{2d/3} = \frac{3}{2} C_1$$

Ciò corrisponde a un condensatore di capacità equivalente

$$C_{eq} = \frac{C_k C_0}{C_k + C_0} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 3k C_1^2}{3k C_1 + \frac{3}{2} C_1}$$

$$= \frac{3k C_1}{2k + 1}$$

Il problema è ridotto a quello iniziale ma se



Quindi

$$V_A - V_D = \frac{q}{C_{eq}} = q \left( \frac{1}{C_k} + \frac{1}{C_0} \right) = \frac{2K+1}{3K} \frac{q}{C_1}$$

$$V_D - V_B = \frac{q}{C_2} = \frac{q}{2C_1} = \frac{3K}{2(2K+1)} (V_A - V_D)$$

$$V_A - V_D + V_D - V_B = (V_A - V_D) \left[ 1 + \frac{3K}{2(2K+1)} \right]$$

$\parallel$   
 $V_A - V_B$

da cui

$$V_A - V_D = \frac{2(2K+1)}{7K+2} (V_A - V_B) = \frac{3}{5} (V_A - V_B) = 162V$$