

LEZIONE 17

01.04.2026

Condensatore cilindrico e condensatore piano. Campo elettrostatico dell'atmosfera. Condensatori in serie e in parallelo. Partitore capacitivo. Energia del campo elettrostatico. Densità d'energia elettrostatica.

I condensatori hanno un'infinità di applicazioni, sono fondamentali nei circuiti elettrici. Si noti che

$$C = \frac{q}{\Delta V}, \quad q = C \Delta V, \quad \Delta V = \frac{q}{C}$$

Sfemo, invece del simbolo ΔV , si usa il simbolo V che ha comunque inteso come differenza di potenziale.

UNITÀ DI MISURA

L'unità di misura della capacità è coulomb/volt, questa definisce una nuova unità, il Farad

$$F = \frac{C}{V}$$

Le unità utilizzate usualmente sono molto più piccole

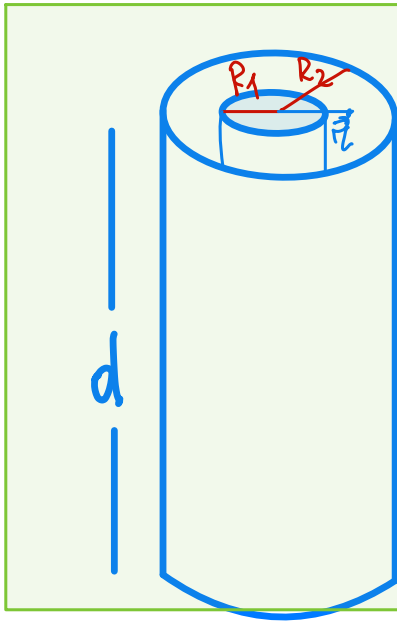
$$mF = 10^{-3} F \quad \text{millifarad}$$

$$\mu F = 10^{-6} F \quad \text{microfarad}$$

$$nF = 10^{-9} F \quad \text{nanofarad}$$

$$pF = 10^{-12} F \quad \text{picofarad}$$

CONDENSATORE CILINDRICO



$$d \gg R_2 > R_1$$

Escludendo i tratti estremi dell'intercapedine cilindrica, il campo elettrico interno all'intercapedine è a simmetria radiale. Tale campo è stato calcolato precedentemente e si ha

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

dove il cilindretto interno è visto come un filo conduttore con densità di carica $\lambda = q/d$.

Si ha quindi che la capacità è

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 d}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

D'altronde se, come usuale, $h := R_2 - R_1 \ll R_2 > R_1$, $\nearrow \frac{1}{1+x} \Big|_{x=0}$
 allora $\frac{R_2 - R_1}{R_1} \approx 0$, per cui $\ln(1+x) = \ln(1+x) \Big|_{x=0} + \ln(1+x) \Big|_{x=0} x + \dots$

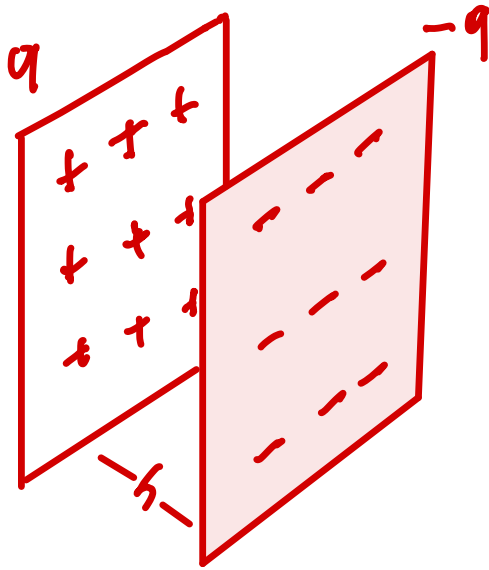
$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) \approx \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{h}{R} = \underline{\underline{x + \dots}}$$

$$\approx \frac{x}{x} = \frac{h}{R}$$
 dove $R \equiv R_1$. In tale approssimazione si ha quindi

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 dR}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$$

dove $\Sigma = 2\pi R d$ è l'area delle armature cilindriche.
 Si ha quindi la stessa espressione della capacità del condensatore sferico.

CONDENSATORE PIANO



Abbiamo visto che il campo elettrico interno alle armature è

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$$

inoltre

$$V_1 - V_2 = E h = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{\sigma \Sigma h}{\epsilon_0 \Sigma} = \frac{q h}{\epsilon_0 \Sigma}$$

si ha quindi

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$$

che ha le stesse formule delle capacità del condensatore sferico e di quello cilindrico.

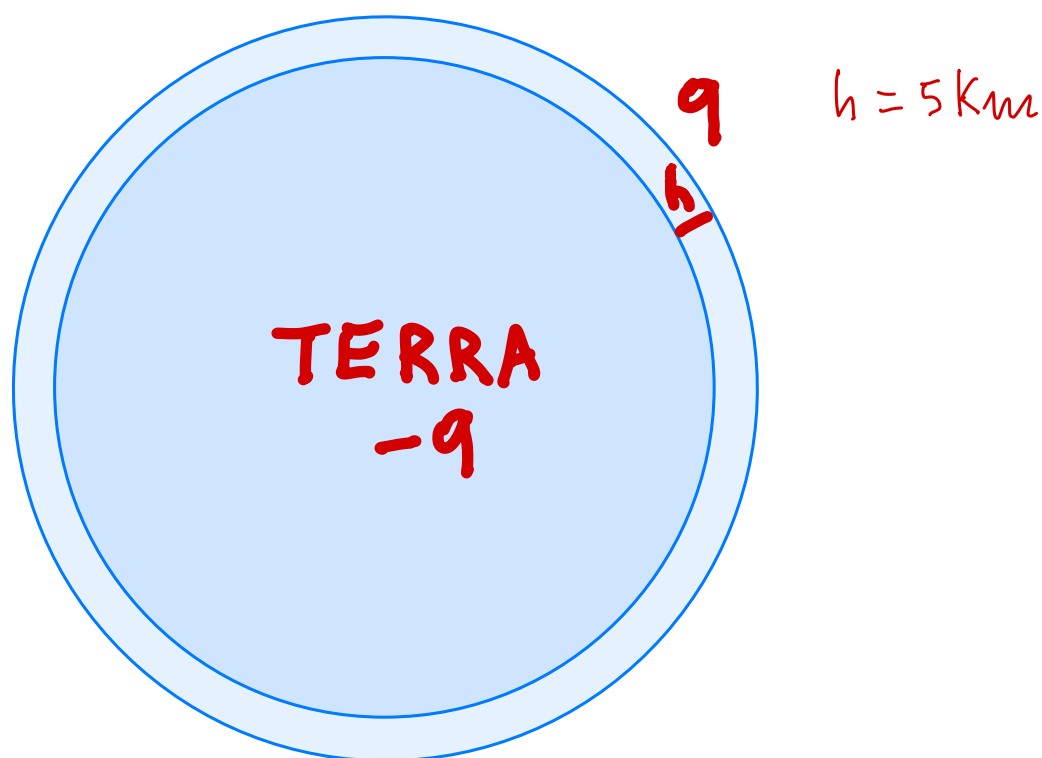
Esercizio: Il campo elettrico dell'atmosfera terrestre

$\vec{E}$ nell'atmosfera terrestre è diretto verso la Terra
con

$$E = 100 \text{ V/m}$$

Un modello che spiega tale campo elettrico è considerare la superficie terrestre come l'armatura interna di un condensatore sferico carico negativamente, con l'altra armatura data da una distribuzione di carica positiva distante $h = 5 \text{ km}$ dalla Terra.

Calcolare la capacità C_{Terre} del condensatore sferico
Terre - atmosfera



Per calcolare q consideriamo la densità di carica.

Dal teorema di Coulomb $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r$

$$V = -\epsilon_0 \vec{E} = -8.86 \cdot 10^{-10} \frac{C}{m^2}$$

da cui

$$q = \sigma 4\pi R_{Terra}^2 = -4.56 \cdot 10^5 C$$

D'altronde $h/R_{Terra} \approx 7.8 \cdot 10^{-4}$

per cui, con ottima approssimazione

$$C_{\text{Terre}} = \epsilon_0 \frac{4\pi R_{\text{Terre}}^2}{h} = 0.9 \text{ F}$$

Risultato che avremmo potuto derivare senza conoscere il valore di E . Si noti che

$$\Delta V = \frac{q}{C_{\text{Terre}}} \approx 500 \text{ kV}$$

peraltro deducibile da $\Delta V = Eh = 500 \text{ kV}$ poiché l'uso di $C = \epsilon_0 \Sigma / h$ assume che il campo elettrostatico sia costante.

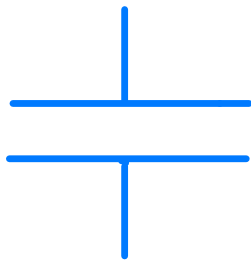
EFFETTI DI BORDO

Si osservi che sia nel caso del condensatore cilindrico che in quello piano abbiamo considerato il campo elettrostatico ovunque uniforme. Ciò non è esatto perché ai bordi delle armature il campo elettrico ha delle distorsioni. Si tratta comunque

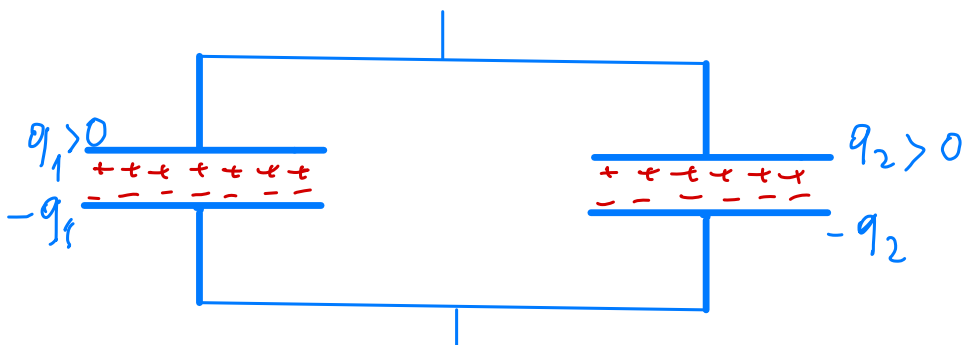
di un'ottima approssimazione quando la distanza tra le armature è molto piccola rispetto alle dimensioni lineari delle armature.

CONDENSATORI IN PARALLELO

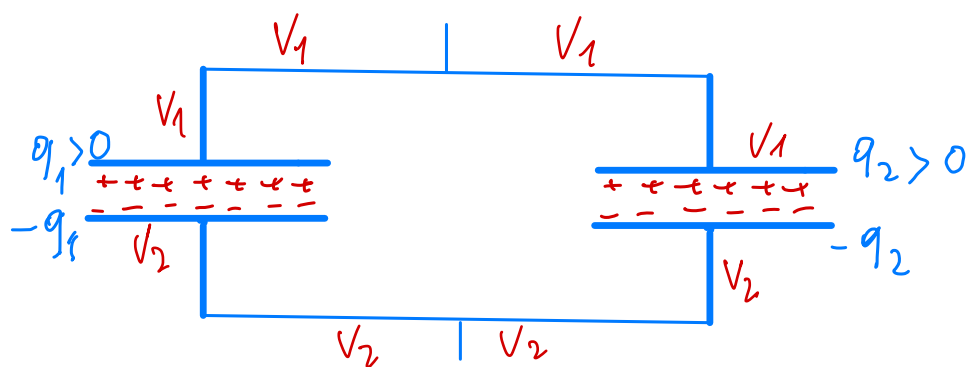
Nel seguito useremo il seguente simbolo per il condensatore



Consideriamo due condensatori collegati in parallelo



Si noti che ciascuna delle due parti costituisce un unico conduttore, quindi tutto il suo volume è allo stesso potenziale



Quindi

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V \quad V \equiv V_2 - V_1$$

(come detto, useremo spesso V invece di ΔV). La carica totale nelle due armature superiori è

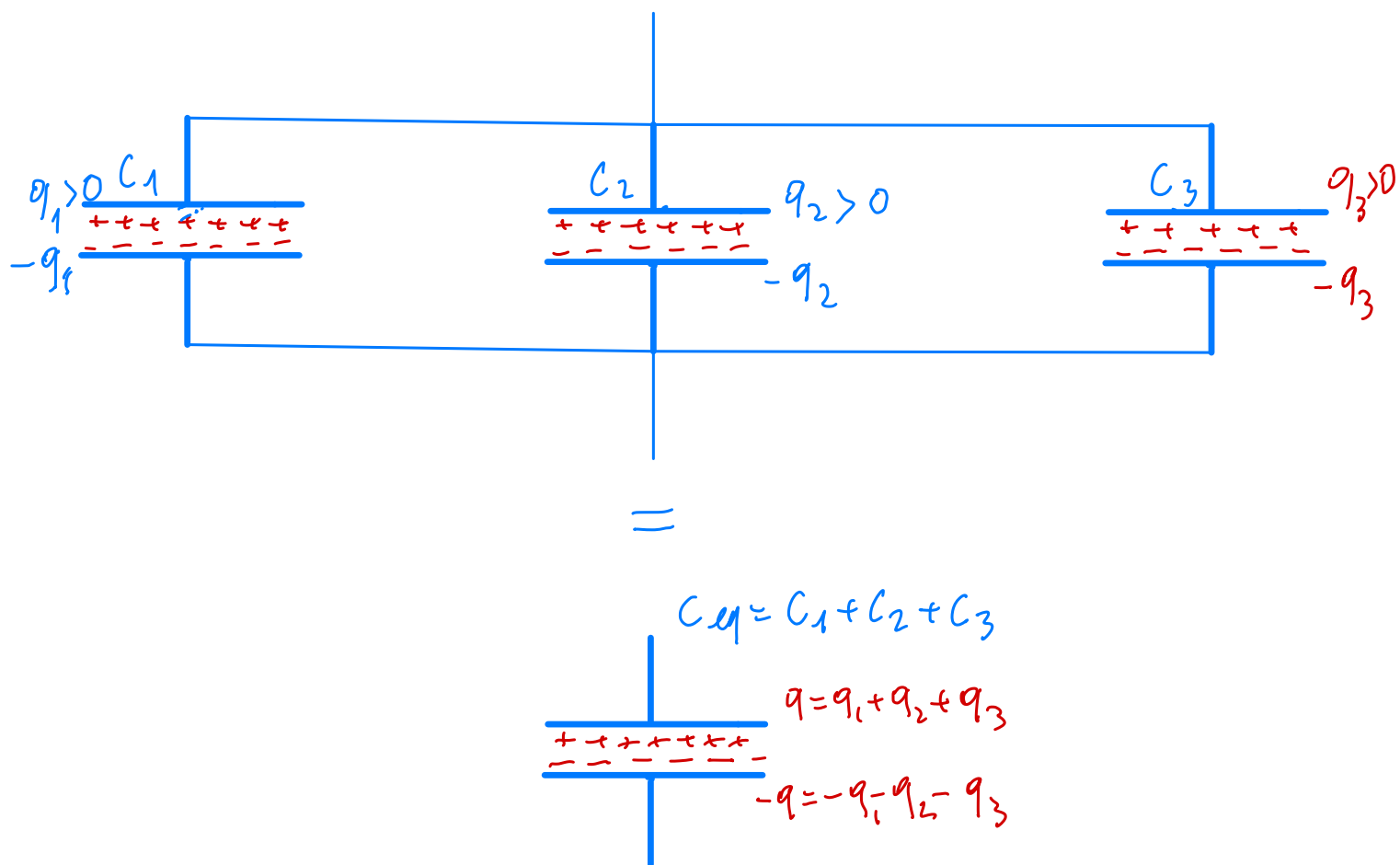
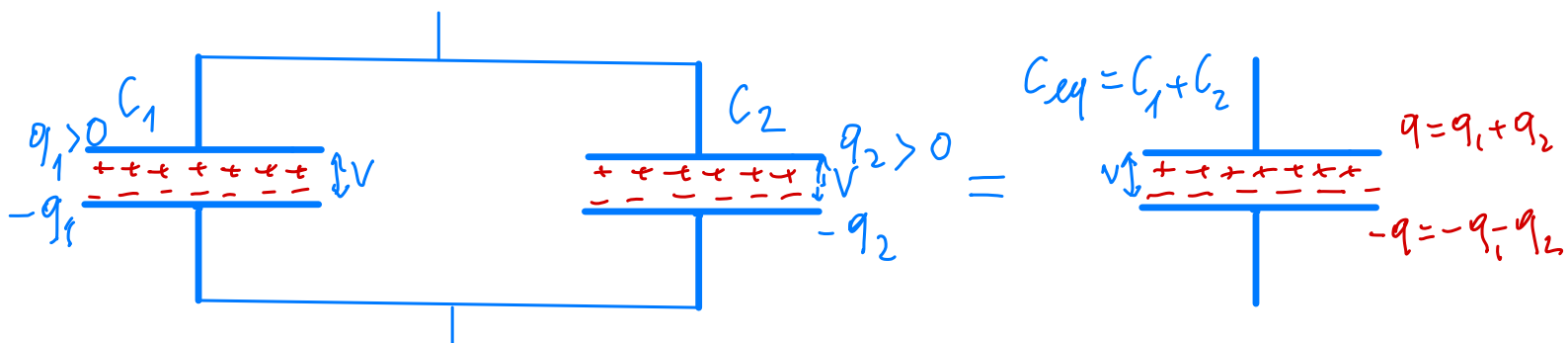
$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) V$$

in quelle inferiori la carica totale è $-q = -q_1 - q_2$.

Si noti ora che il sistema costituito da due condensatori in parallelo è equivalente ad un unico condensatore di capacità

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2$$

Quindi



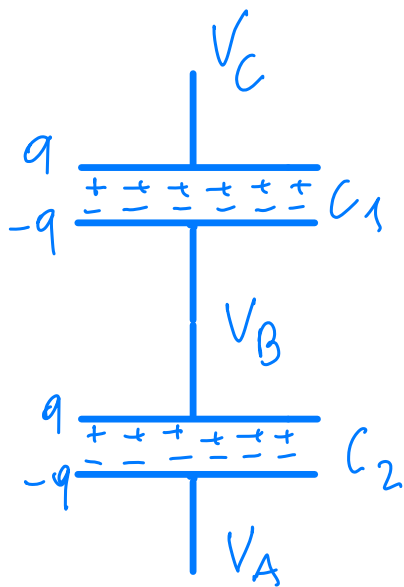
n - condensatori in parallelo

$$C_{eq} = C_1 + \dots + C_n$$

con carica totale

$$q = q_1 + \dots + q_n$$

CONDENSATORI IN SERIE



$$V_C - V_B = \frac{q}{C_1}$$

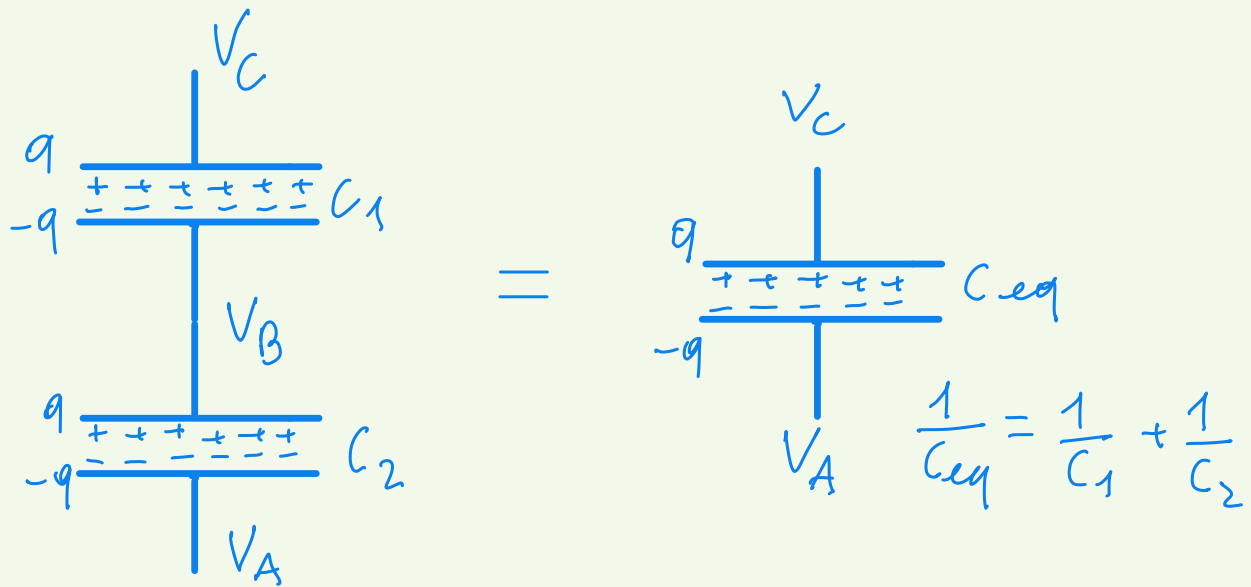
$$V_B - V_A = \frac{q}{C_2}$$

$$V := V_C - V_A = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{C_{eq}}$$

||
 $V_C - V_B + (V_B - V_A)$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow$$

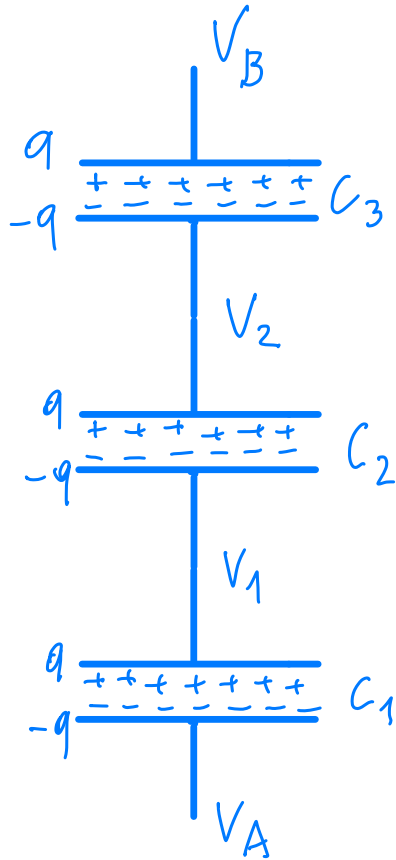
$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$



n condensatori in serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

ESERCIZIO: PARTITORE CAPACITIVO



$$V := V_B - V_A = 100V$$

$$C_{eq} = 100 \text{ pF}$$

Calcolare C_1, C_2, C_3 tali che

$$V_1 - V_A = 50V$$

$$V_2 - V_A = 70V$$

$$q = C_{eq} V = 100 \cdot 10^{-12} \cdot 10^2 \text{ C} = 10^{-8} \text{ C}$$

$$C_1 = \frac{q}{V_1 - V_A} = \frac{10^{-8}}{50} \text{ F} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 200 \text{ pF}$$

$$C_2 = \frac{q}{V_2 - V_1} = \frac{10^{-8}}{20} \text{ F} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 500 \text{ pF}$$

$$C_3 = \frac{q}{V_B - V_2} = \frac{10^{-8}}{30} \text{ F} = 3.33 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 333 \text{ pF}$$

Il nome "partitore capacitivo" è dovuto al fatto che permette di ripartire la d.d.p. ai capi dei condensatori. Per n condensatori in serie, poiché la carica è sempre la stessa in ogni capacità si ha

$$C_1 \Delta V_1 = C_2 \Delta V_2 = \dots = C_n \Delta V_n$$

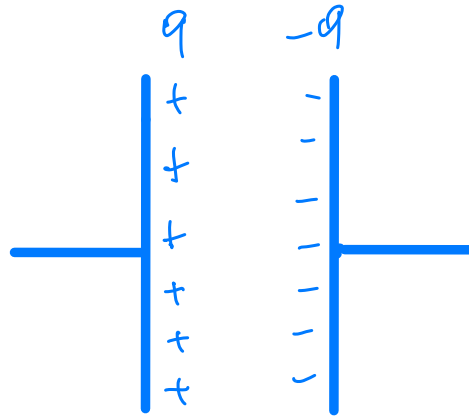
dove ΔV_k è la d.d.p. ai capi del condensatore con capacità C_k . Si ha quindi

$$\frac{\Delta V_j}{\Delta V_k} = \frac{C_k}{C_j} \quad \forall j, k \in [1, \dots, n]$$

cioè, la d.d.p. si ripartisce in modo inversamente proporzionale alle capacità.

ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO

Processo di carica di un condensatore avviene separando le cariche. In un conduttore le cariche positive sono addensate su di una armatura, separandole dalle negative. Nell'altra armatura avviene lo stesso fenomeno ma con i segni invertiti.



Tale separazione, da $(0,0)$ a $(q,-q)$, con una d.d.p. tra le armature che da 0 va a $V = q/C$. Poiché il campo elettrostatico è conservativo, tale lavoro dipende solamente dallo stato iniziale

e quello finale.

Risulta quindi possibile calcolare tale lavoro come se la configurazione finale fosse ottenuta con un trasferimento "in volo" di cariche da un'armatura all'altra.



Supponiamo che ad un certo istante del processo di trasferimento di cariche sia già stata trasferita la carica

$$q' = C V'$$

Per spostare l'ulteriore carica dq' attraverso la d.d.p. V' è necessario compiere un lavoro esterno

$$dW_{est} = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

Segue che il lavoro totale dipende solamente della carica spostata

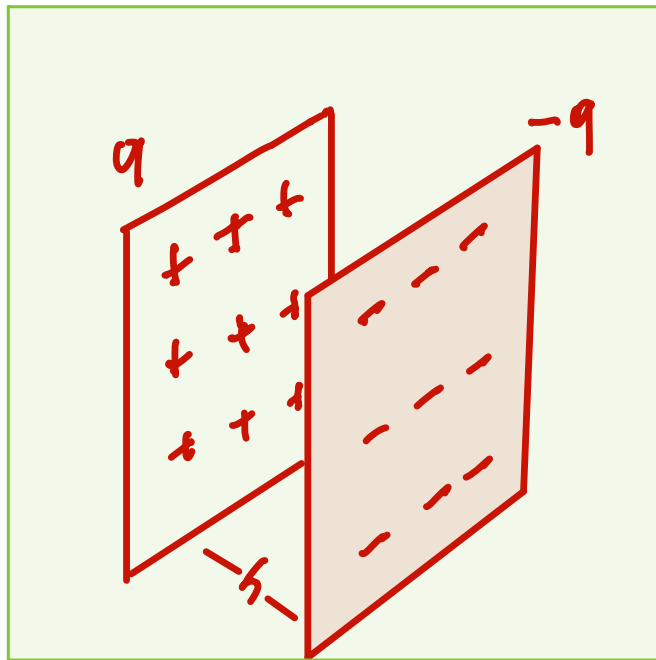
$$W_{est} = \int_0^{W_{est}} dW'_{est} = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$$

Va sottolineato che tale lavoro è esterno, cioè non è compiuto dal campo elettrostatico in quanto questo si oppone ad un accumulo dello stesso segno. Quindi il campo elettrostatico compie un lavoro negativo, $W = -W_{est}$, è il sistema che ha immagazzinato energia sotto forma di energia potenziale. Si ha quindi

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V$$

La stessa espressione vale per un conduttore carico
isolato; come visto lo si può interpretare come un
condensatore con un'armatura all'infinito.

È possibile associare l'energia potenziale al campo elettrico
stesso: consideriamo un condensatore piano



Tra le armature c'è un campo elettrico uniforme,
legato alla d.d.p. tramite la relazione

$$V = Eh$$

Si ha quindi

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} E^2 h^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma h = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tau$$

dove $\tau := \Sigma h$ è il volume del condensatore.

ipotizzando che l'energia elettrostatica sia distribuita uniformemente nello spazio dove c'è il campo elettrostatico, possiamo definire la **DENSITÀ D'ENERGIA ELETTROSTATICA** la seguente quantità

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Tale espressione risulta generalizzabile al caso di un arbitrario campo elettrostatico. In particolare, si ha

$$dU_e = u_e d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

da cui segue

$$U_e = \int_0^{U_e} dU'_e = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

che corrisponde al lavoro necessario per costruire la configurazione di cariche, provenienti dall'infinito, che genera il campo elettrico.