LEZIONE 15

26.03.2026

Esercizi: campo elettrostatico generato da un cilindro e da un piano infinito

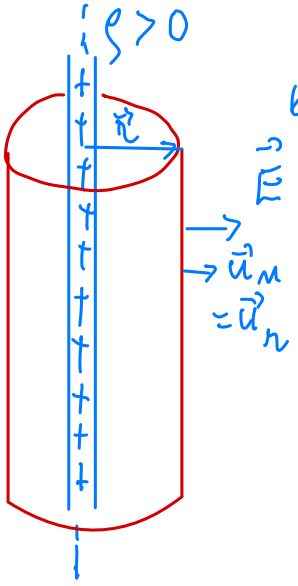
Conduttori in equilibrio. Teorema di Coulomb

Conduttore cavo. Schermo elettrostatico (gabbia di Faraday)

Esercizio: sfere conduttrici a contatto

ESERCIZIO

Calcolare il campo elettrico e il potenziale generati da una distribuzione di carica in un cilindro di raggio R di lunghezza molto maggiore di R.



← la direzione di $\vec{E}$ è fissata dall'invarianza del sistema per rotazioni attorno all'asse del cilindro

$d\vec{\Sigma} = \vec{u}_n \, d\Sigma$

Consideriamo una superficie cilindrica di raggio $r > R$ e altezza h. I due dischi non contribuiscono a $\Phi_\Sigma(\vec{E})$, quindi

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) := \oint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = E \cdot \text{area superficie laterale} = 2\pi r h E$$

$$q_{int} = \int_V \rho \, d\tau = \rho \pi R^2 h \quad \rightarrow \quad 2\pi r h E = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0 2\pi r h}$$

Possiamo considerare R così piccolo rispetto ad r per cui il cilindretto è rappresentabile come un filo carico. In tal caso si ha una

distribuzione di carica lineare $\lambda = \frac{q_{int}}{h} = \frac{\rho \pi R^2 h}{h} = \rho \pi R^2$. La legge di Gauss $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$, cioè $2\pi r h E = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$, implica

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

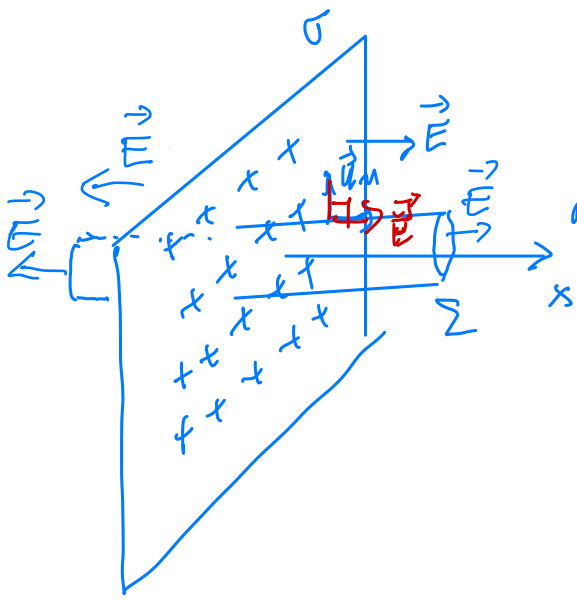
$$V(r) - V(R) = -\int_R^r \vec{E}\cdot d\vec{r}' = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r'\Big|_R^r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r} + V(R)$$

$\vec{E}$ e V possono esser interpretati come quelli generati da un filo infinitamente lungo.

ESERCIZIO

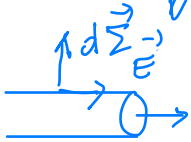
$\vec{E}$ e V nel caso di un piano infinito con densità di carica superficiale uniforme $\sigma > 0$ (problema già risolto ma ora lo risolviamo usando la legge di Gauss).



$\vec{E}$ è ortogonale al piano, quindi $\vec{E} \parallel \vec{u}_x$

$\vec{E}$ e V sono già stati calcolati considerando un disco uniformemente carico per poi far tendere all'infinito il suo raggio

Il flusso $\Phi_\Sigma(\vec{E})$ è nullo sulla superficie laterale del cilindro (il manicotto), quindi $\Phi_\Sigma(E) = 2E$ area del disco



D'altronde

$$q_{int} = \sigma \text{ area del disco}$$

quindi

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \qquad x > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \qquad x < 0$$

Per $x > 0$

$$V(x) - V(0) = -\int_0^x \vec{E} \cdot d\vec{x} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x$$

CONDUTTORI IN EQUILIBRIO

Conduttori: è possibile un moto di cariche al loro interno.

Esempi

- Soluzioni elettrolitiche ← non solido
- Gas ionizzati ← non solido
- Metalli ← Siamo interessati ai conduttori solidi

Nei metalli per ogni atomo vi sono elettroni sostanzialmente liberi di muoversi nel conduttore.

Metalli: hanno elettroni non legati e si muovono "liberamente" ⇒ Applicando un opportuno campo elettrico gli elettroni si muovono in modo ordinato: corrente elettrica

le corrente elettrica verrà introdotta più avanti.

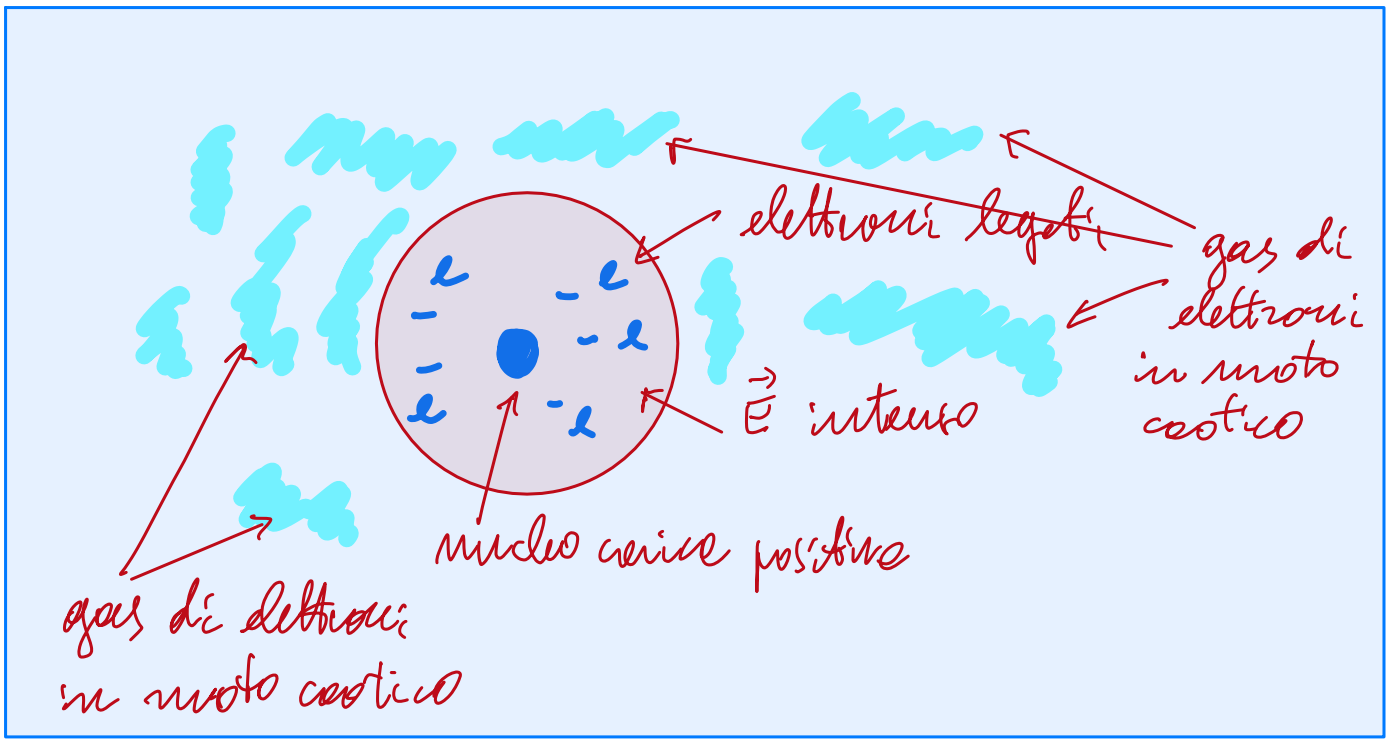
Per il momento siamo interessati ai fenomeni elettrostatici nei metalli, quindi di seguito non consideriamo correnti elettriche. Assume di corrente implica

$$\vec{E} = \vec{0}$$

altrimenti, essendoci elettroni liberi, si avrebbe una corrente.

N.B. la condizione che internamente si abbia $\vec{E} = \vec{0}$ è da intendere come "condizione media macroscopica": vicino ai nuclei ci sono campi elettrici intensi che tengono legati gli elettroni non liberi. Inoltre gli elettroni liberi si muovono in modo caotico dovuto all'agitazione termica.

Media macroscopica di $\vec{E} = \vec{0}$

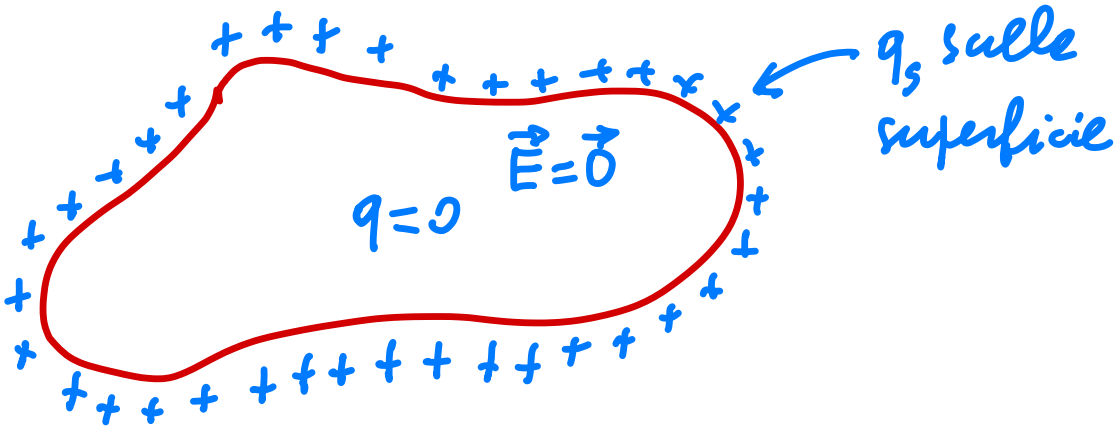


gas di elettroni: non c'è un movimento ordinato di elettroni. Non c'è corrente.

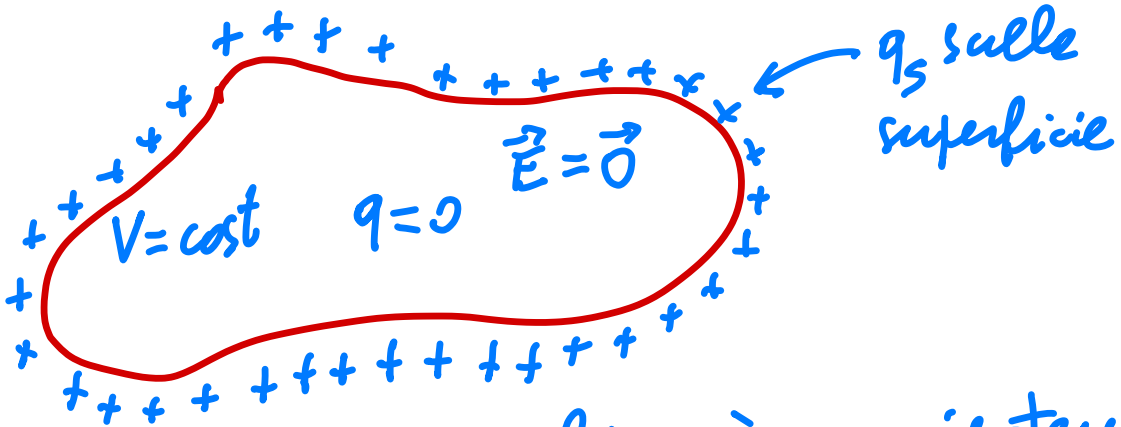
CONSEGUENZE DI $\vec{E}=\vec{0}$

Di seguito mostreremo

1. L'eccesso di carica elettrica di un conduttore può esserci solo in superficie



2. Il potenziale elettrostatico di un conduttore è costante in tutto il conduttore

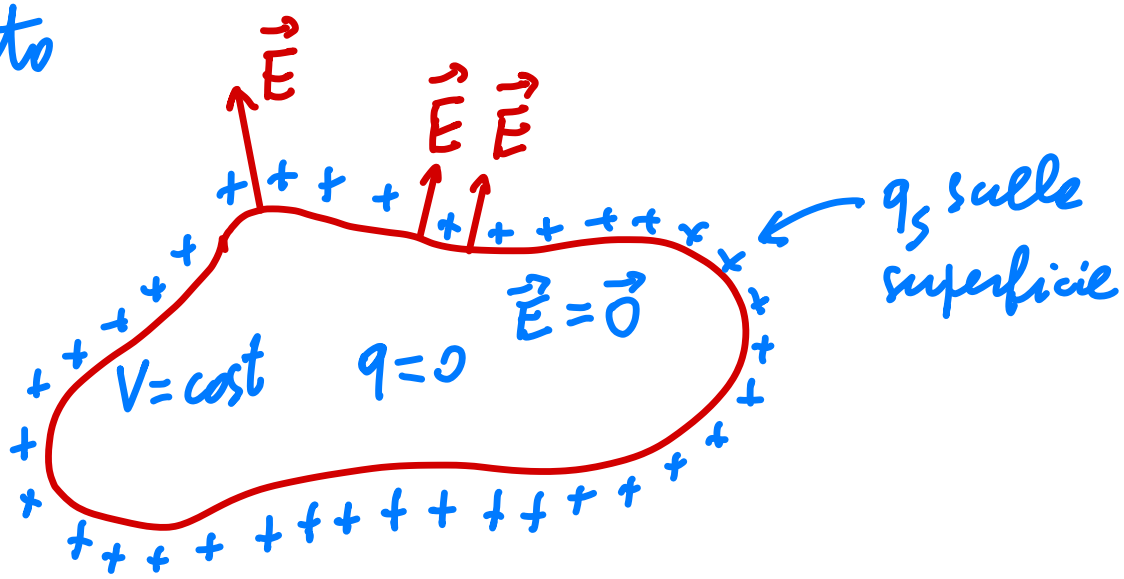


In particolare la superficie è equipotenziale.

3. $\vec{E}$ sulla superficie è perpendicolare alla superficie stessa e il cui modulo è

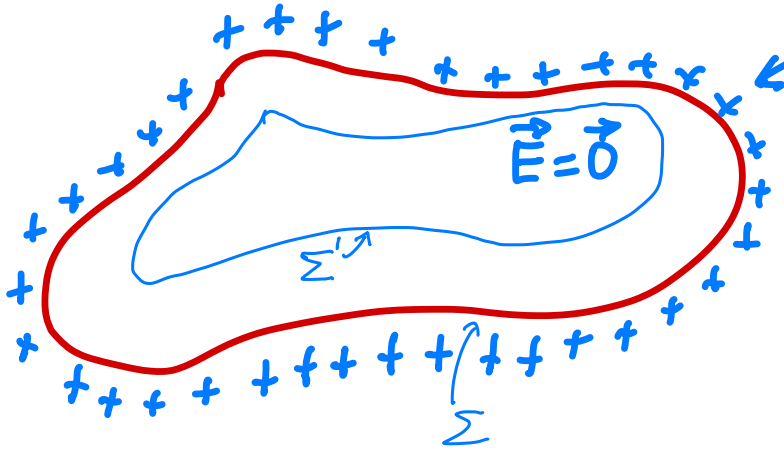
$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

con σ la densità di carica valutata nel punto



Dimostrazione di 1., 2. e 3.

1. $q_{int}=0$. Se $\vec{E}=\vec{0}$ internamente, allora il flusso attraverso qualsiasi superficie interna è nullo



q_s sulla superficie

Σ': superficie rispetto alla quale si calcola il flusso

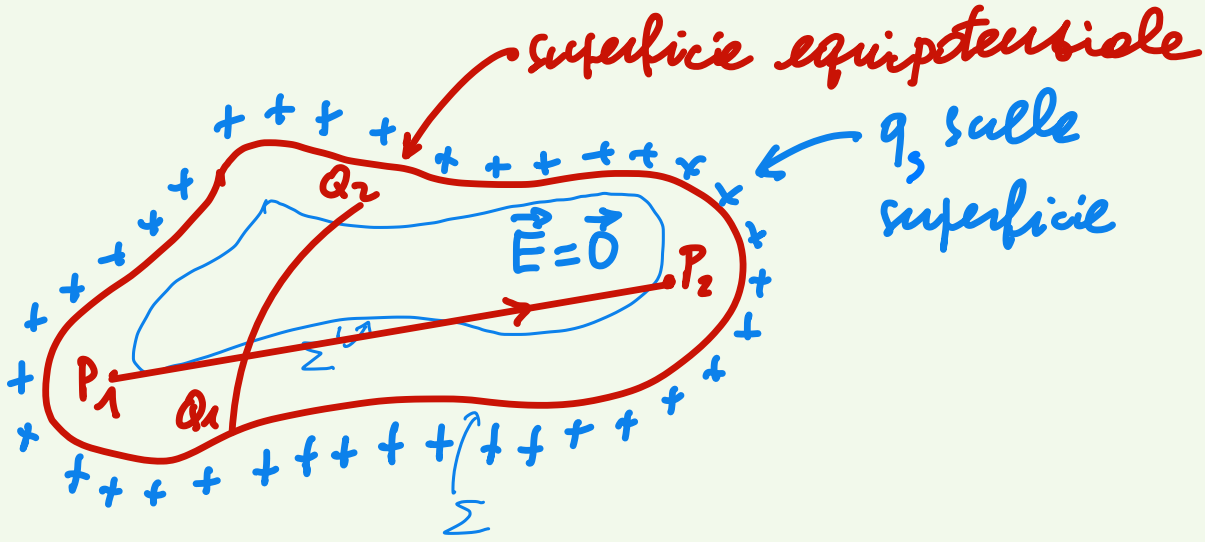
$\phi_{\Sigma'}(\vec{E}) := \oint_{\Sigma'} \vec{E}\cdot d\vec{\Sigma} = 0$ e la legge di Gauss implica che la carica interna è nulla:

$$q_{int} = 0$$

Ne segue che se c'è eccesso di carica, questa si dispone sulla superficie Σ del conduttore.

2. **V è costante nel conduttore**. Infatti per punti interni a Σ

$$V(P_2) - V(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\vec{E} = \vec{0}) \longrightarrow V(P_2) = V(P_1)$$



Ciò vale anche se uno dei due punti, o entrambi, sono sulla superficie

$$V(Q_2) - V(Q_1) = -\int_{Q_1}^{Q_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\vec{E} = \vec{0}) \longrightarrow V(Q_2) = V(Q_1)$$

Da cui segue che il potenziale elettrostatico sulla superficie è lo stesso di quello al suo interno. In particolare:

LA SUPERFICIE DI UN CONDUTTORE E' EQUIPOTENZIALE

3. $\vec{E}$ è perpendicolare alla superficie e

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad 1)$$

Abbiamo visto che $\vec{\nabla} V$ è perpendicolare alle superfici equipotenziali. Poiché Σ è equipotenziale e $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, si ha che $\vec{E}$ è perpendicolare a Σ.

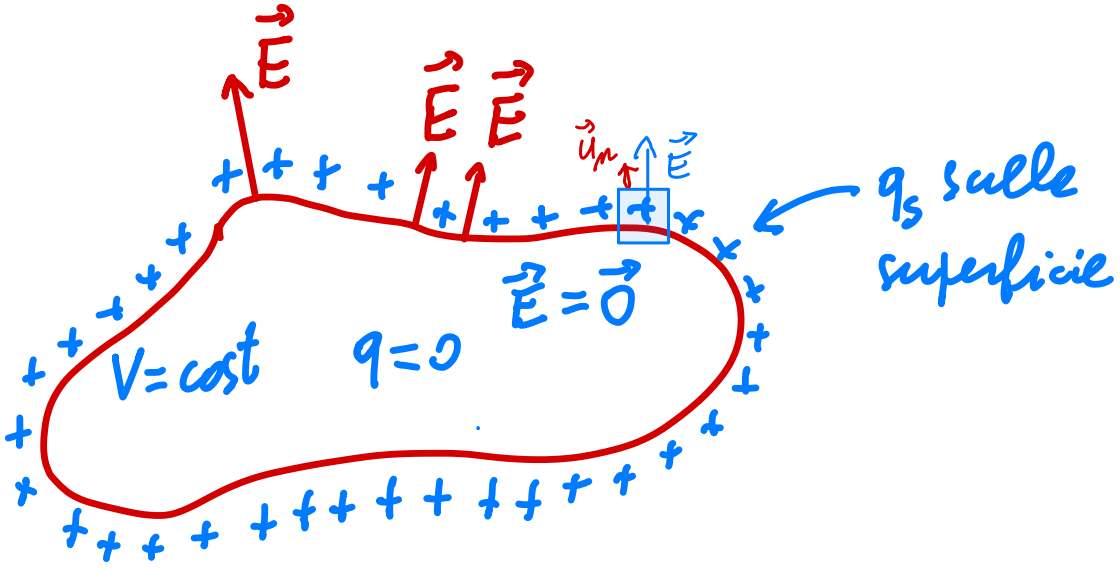
Per dimostrare la 1) applichiamo la legge di Gauss ad un cilindretto infinitesimo, tenendo conto del fatto che il flusso di $\vec{E}$ è solo uscente ($\vec{E}_{interno} = \vec{0}$). Quindi

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \underset{\vec{\Sigma} \to \vec{0}}{\approx} E \, d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \, d\Sigma, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \text{ che è la 1)}$$

Ovviamente, la sua forma vettoriale è

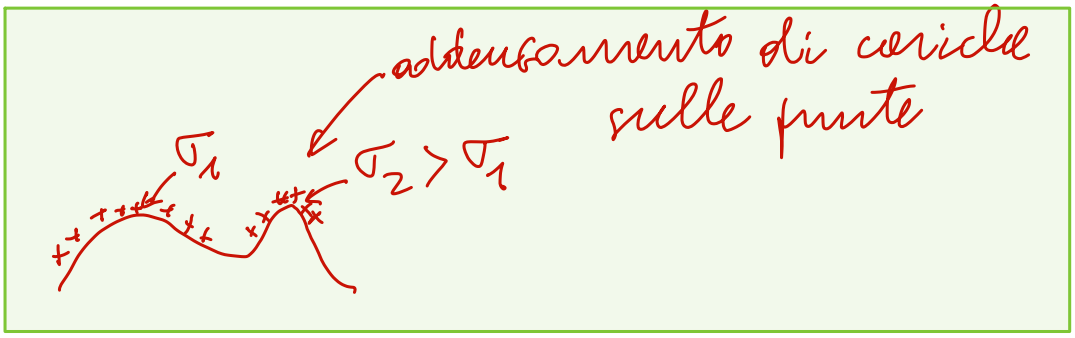
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_n \qquad 2)$$

relazione nota come "Teorema di Coulomb".

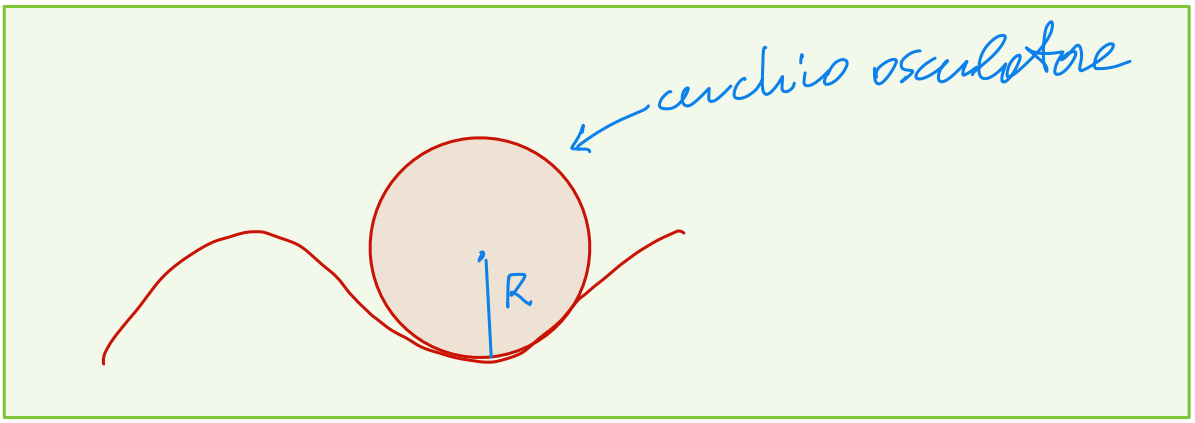


L'eq. 1), e quindi anche la 2), implicano che E è maggiore dove σ è maggiore. D'altronde, come vedremo

σ è maggiore dove il raggio di curvatura è minore



Il raggio di curvatura è il raggio del cerchio osculatore in un punto



curvatura: $K = \frac{1}{R}$

$$K_1 = \frac{1}{R_1} < K_2 = \frac{1}{R_2} \text{ se } R_2 < R_1$$

Il campo elettrico è molto più intenso vicino alle punte: scintille tra elettrodi appuntiti

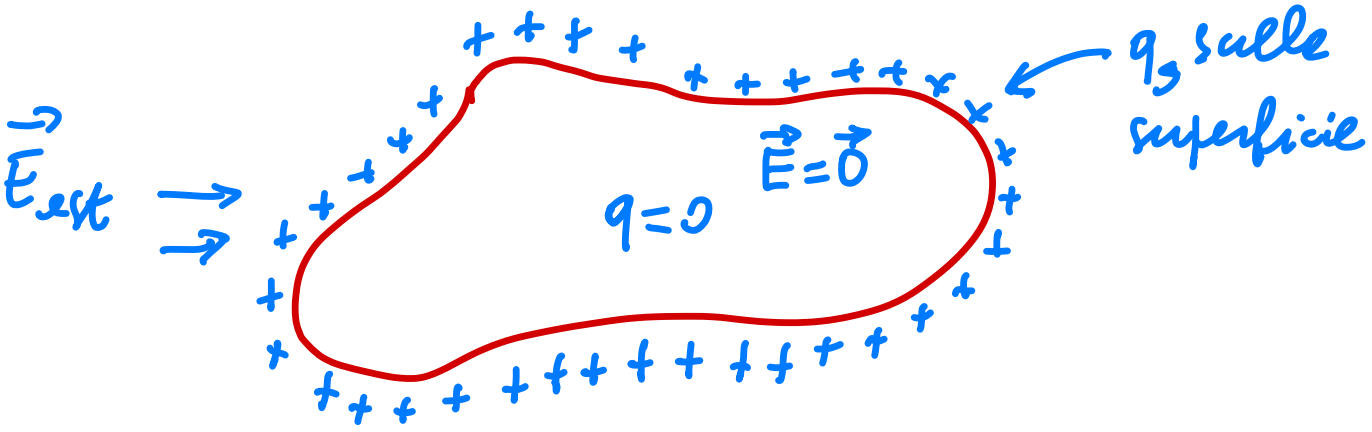


Parafulmini



INDUZIONE ELETTROSTATICA

CONDUTTORE IN UN CAMPO ELETTRICO ESTERNO

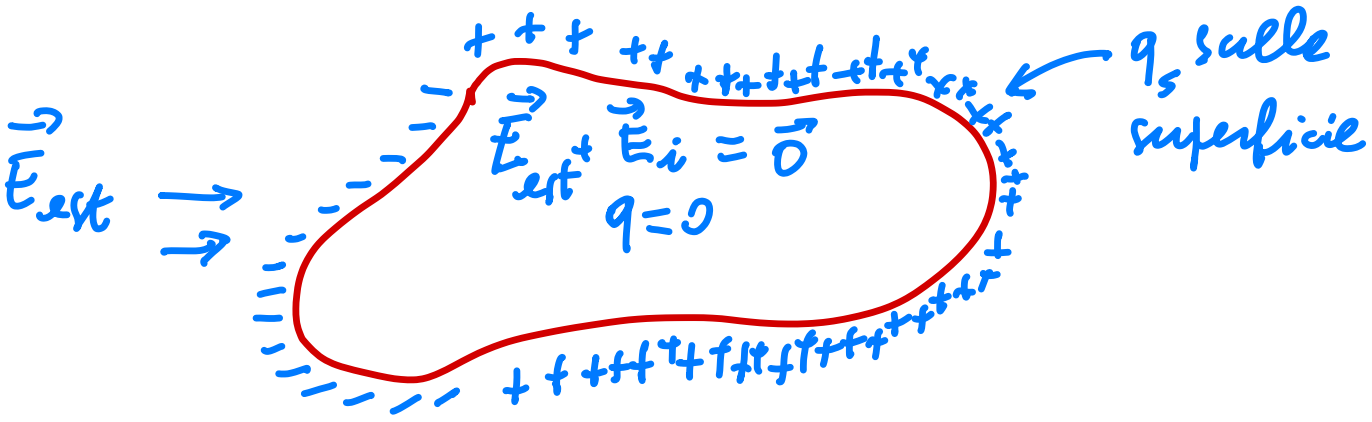


Un campo elettrico esterno provoca un movimento di elettroni che si accumulano nella superficie e un addensamento di cariche positive. Ciò crea un campo elettrico indotto all'interno, $\vec{E}_i$, che annulla quello esterno,

per cui il campo elettrico interno totale rimane nullo

$$\vec{E}_{est} + \vec{E}_i = \vec{0}$$

condizione all'equilibrio

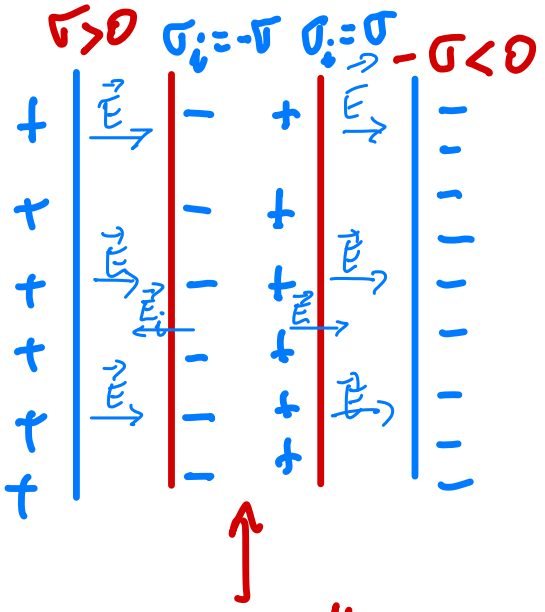


Non c'è alcuna variazione di carica totale

$$q_- + q_+ = q_s \quad \text{è invariata}$$

Il fenomeno descritto è l'<u>induzione elettrostatica</u>.

ESEMPI DI INDUZIONE ELETTROSTATICA



σ_i = densità superficiale indotta

Piani uniformemente carichi

che creano un campo

elettrostatico $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

conduttore

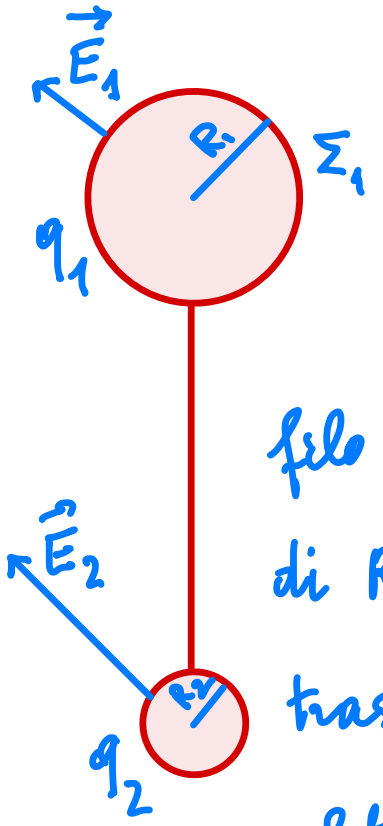
neutro $\vec{E}_{interno} = \vec{E} + \vec{E}_i = \vec{0}$

$\vec{E}_i + \vec{E} = \vec{0}$, densità di carica indotta

sulle facce del conduttore $\sigma_i = -\sigma$ e $\sigma_i = \sigma$

faccia sinistra — faccia destra

SFERE CONDUTTRICI A CONTATTO



$R_1 > R_2$

filo conduttore molto più lungo di R_1. In questo modo possiamo trascurare l'effetto dell'induzione elettrostatica che provoca l'addensamento di cariche.

Dati: $R_1, R_2, q = q_1 + q_2$

Domande q_1? E_1/E_2?

Poiché si ha un unico conduttore, questo ha ovunque lo stesso potenziale:

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = V_1 = V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

quindi

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

e, usando $q_2 = q - q_1$, si ha

$$q_1 = \frac{R_1}{R_2}(q - q_1) \longrightarrow q_1\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{R_1}{R_2} q$$

$$q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q \qquad q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q \qquad 3)$$

Utilizzando

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2}, \qquad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$$

la 3) implica

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

ed essendo $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (teorema di Coulomb), si ha

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$$