

LEZIONE 14

25.03.2026

ESERCIZI ANNI PRECEDENTI

DISTRIBUZIONE SUPERFICIALE DI CARICA

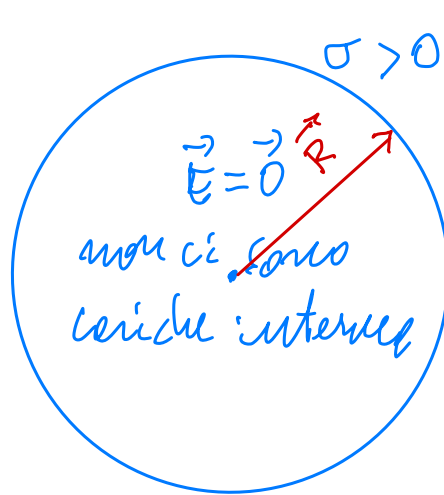
UNIFORME SU SFERA

$$\sigma = \frac{dq}{dA}$$

superficie

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

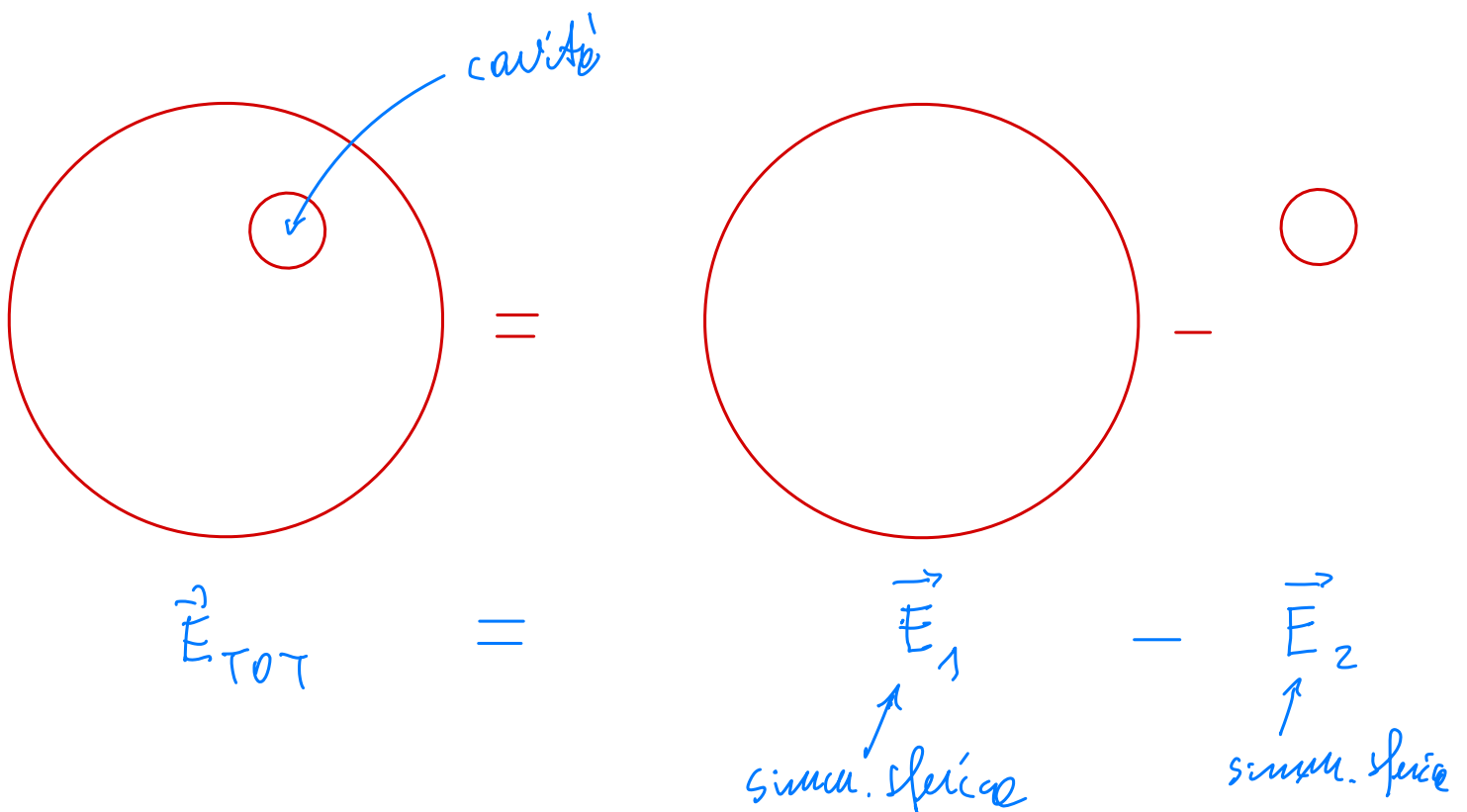
lineare



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

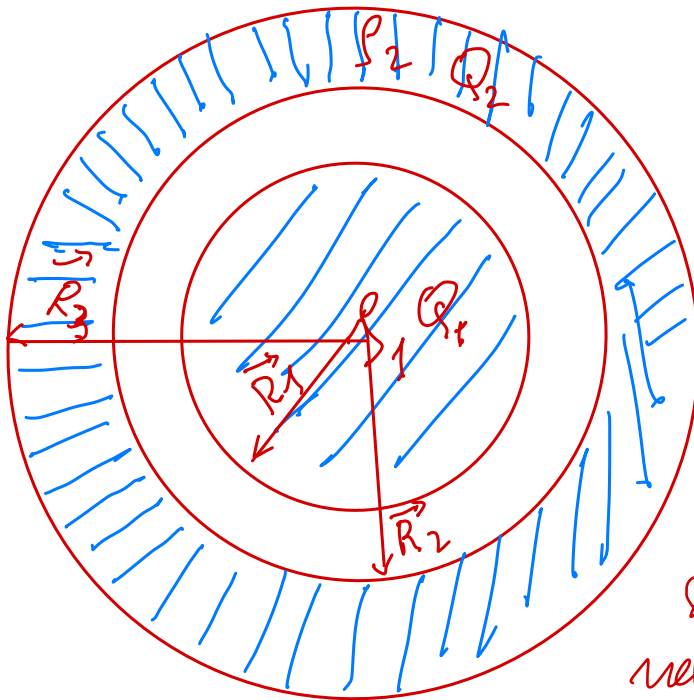
$$q = 4\pi R^2 \sigma$$

Distribuzione non a simmetria sferica
ricorrendo a problemi con simmetria sferica.



ESERCIZIO

SFERA CON CALOTTA ESTERNA



ρ_1 e ρ_2
uniformi

Determinare

- $\vec{E}$ in tutto lo spazio
- V in R_2 con la condizione $V(\infty) = 0$
- la relazione tra ρ_1 e ρ_2 tale per cui $\vec{E}(r > R_3) = \vec{0}$

Si ricorda che, nel caso di simmetrie sferiche, il campo elettrico a distanza r dal centro è pari a quello di una carica $q(r)$ centrata nell'origine: $\vec{E} = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ dove $q(r)$ è la carica racchiusa dalla sfera di raggio r .

Si noti che $Q_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1$ mentre la carica contenuta nella calotta sferica Q_2 è data da $\rho_2 V_{\text{calotta}}$. Il volume della calotta carica è pari al volume della sfera di raggio R_3 meno il volume della sfera di raggio R_2 , quindi

$$Q_2 = \frac{4}{3}\pi (R_3^3 - R_2^3) \rho_2$$

Di seguito utilizziamo il fatto che il campo elettrico interno ad una distribuzione di carica uniforme ρ è $\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$. Quindi

$$\vec{E}(r \leq R_1) = \frac{\rho_1}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

$$\vec{E}(R_1 \leq r \leq R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Si vede le figure nelle pagine seguenti

campo elettrico dovuto alle sfere interne

$$\vec{E}(R_2 \leq r \leq R_3) = \left[\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\rho_2}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_2^3}{r^2} \right) \right] \vec{u}_r$$

si vede le figure successive

campo elettrico dovuto alla calotta carica

dove abbiamo utilizzato il fatto che il campo elettrico, in un punto P

distante r dal centro, di una calotta con distribuzione di carica uniforme ρ , è pari a quello generato da una sfera di raggio r , calcolato in P, meno quello dovuto ad una sfera carica di raggio R , con R il raggio interno della calotta. È interessante osservare che l'espressione di $\vec{E}(R_2 \leq r \leq R_3)$ è equivalente a

$$\vec{E}(R_2 \leq r \leq R_3) = \left(\frac{Q_1 - Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\rho_2}{3\epsilon_0} r \right) \vec{u}_r$$

dove

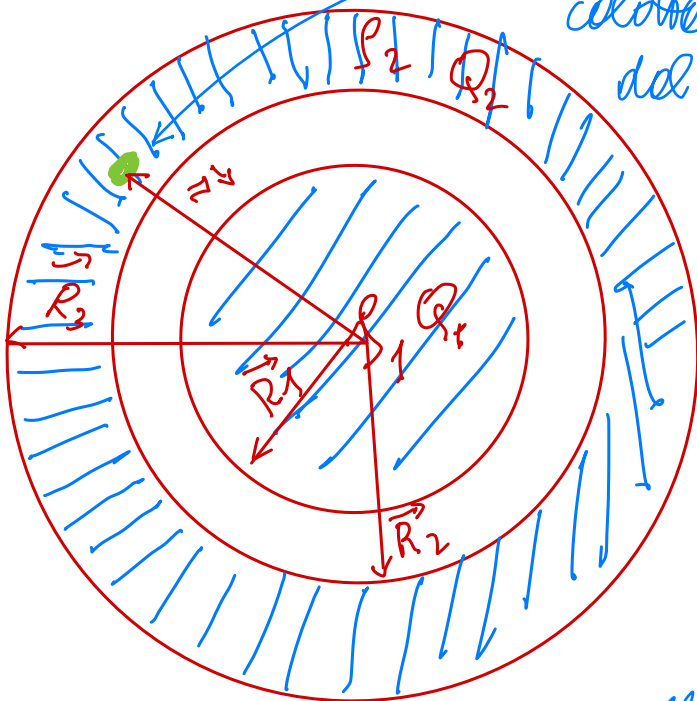
$$Q_0 \equiv \frac{4\pi R_2^3}{3} \rho_2$$

è la carica contenuta in una sfera di raggio R_2 e densità ρ_2 .

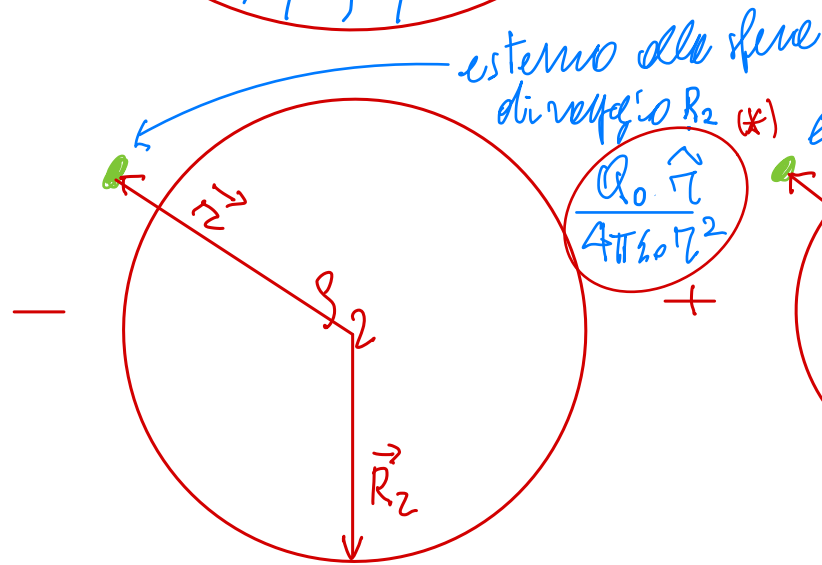
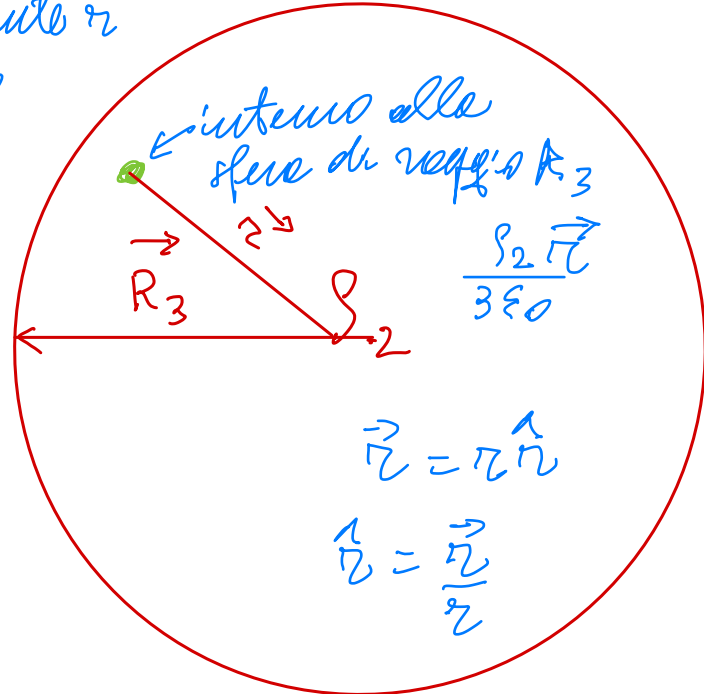
Tale risultato non è altro che la seguente relazione

tra le distribuzioni di carica

calcolo di $\vec{E}$ nel punto $\bullet$ interno alle
cariche distanti r
dal centro



=



esterno a sfere raggio R_1 :

$$\frac{Q_1 \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\vec{E}}{r} \frac{1}{r^2} = \frac{\vec{E}}{r^3}$$

Per quanto riguarda il campo elettrico in $r \geq R_3$, si ha

$$\vec{E}(r \geq R_3) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Si noti che poiché $Q_0 = S_2 V = \frac{4}{3}\pi R_2^3 \rho_2$, si ha $\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_2 R_2^3}{3\epsilon_0 r^2}$

Poiché la condizione sul potenziale è data a $r = \infty$, consideriamo prima la regione $r \geq R_3$. Si ha

$$\begin{aligned} V(\infty) - V(r \geq R_3) &= - \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}' = - \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} \\ &= \left. \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r'} \right|_r^\infty = - \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

Quindi

$$V(r \geq R_3) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(15)

$$V(R_2 \leq r \leq R_3):$$

$$V(R_3) - V(r) = - \int_r^{R_3} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_r^{R_3} \vec{E}(R_2 \leq r \leq R_3) \cdot d\vec{r}$$

$$- \int_r^{R_3} \left(\frac{Q_1 - Q_0}{4\pi\epsilon_0 r'^2} + \frac{\rho_2}{3\epsilon_0} r' \right) dr' = \left(\frac{Q_1 - Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\rho_2 r^2}{6\epsilon_0} \right) \Big|_r^{R_3}$$

$$\text{Quindi } V(r) = \frac{Q_1 - Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_3} \right) + \frac{\rho_2}{6\epsilon_0} (R_3^2 - r^2) + V(R_3).$$

D'altronde $V(R_3)$ è noto dalla (15), per cui si ha

$$V(r) = \frac{Q_1 - Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_3} \right) + \frac{\rho_2}{6\epsilon_0} (R_3^2 - r^2) + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$= \frac{Q_1 - Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\rho_2}{6\epsilon_0} (R_3^2 - r^2) + \frac{Q_0 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

da cui

$$V(R_2) = \frac{Q_1 - Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{\rho_2}{6\epsilon_0} (R_3^2 - R_2^2) + \frac{Q_0 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$\parallel \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

le richiedo che $\vec{E}(r > R_3) = \vec{0}$ fine $Q_1 + Q_2 = 0$,

cioè

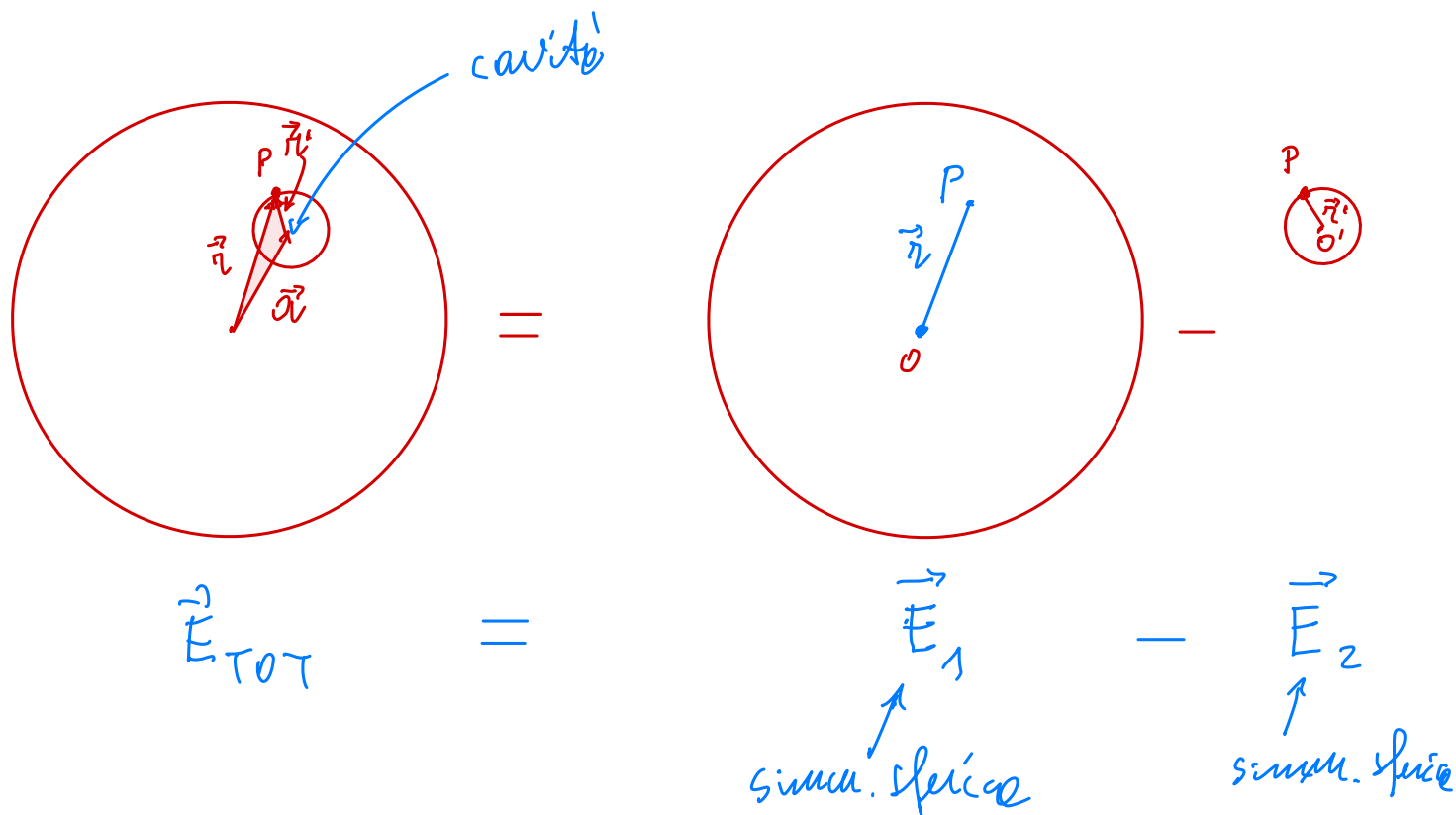
$$\frac{4}{3}\pi [R_1^3 \rho_1 + (R_3^3 - R_2^3) \rho_2] = 0$$

$$\rho_2 = \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_3^3} \rho_1$$

ESERCIZIO

Distribuzione di carica ρ uniforme.

Calcolare $\vec{E}$ nel punto P sul bordo della cavità e all'interno della cavità.



$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}, \quad \vec{E}_2(\vec{r}') = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}'$$

Si osserva che

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}'$$

$$\vec{E}_{TOT} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a}$$

che è indipendente sia dal raggio della cavità che da

quello delle sfere più grande.

Dimostriamo che $\vec{E}_{TOT}$ all'interno della cavità è lo

stesso che nel punto P. A tal fine consideriamo

un problema analogo al precedente ma con

una cavità di raggio $r'' < r'$. In un punto P'

bordo di questa cavità più piccola, il campo $\vec{E}_{TOT}$

ha lo stesso valore di quello calcolato precedentemente,

cioè $\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a}$. Supponiamo ora di togliere una calotta

sferica di spessore $r' - r''$, in modo tale che la

cavità sia la stessa di quella di raggio r' . Prima

di tutto si noti che poiché la carica interna al

punto P' è invariata, il II membro della legge

di Gauss rimane invariato. Lo stesso dicasi per il

primo membro $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$, in quanto la carica

tolta ha una distribuzione a simmetria sferica

rispetto al centro della cavità. Quindi $\vec{E}_{TOT}$ ha lo

stesso valore in tutti i punti della cavità sia interni che sul bordo.