

LEZIONE 13

24.03.2026

GRADIENTE IN COORDINATE POLARI
E SFERICHE

GRADIENTE IN DUE DIMENSIONI IN COORDINATE POLARI

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} (-1) \frac{y}{x^2}$$

$$= -\frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = + \frac{1}{2r} 2x = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$= \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} = \vec{u}_x \left(\frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \vec{u}_y \left(\frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (*)$$

Si spieghi che

$$\vec{u}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$$

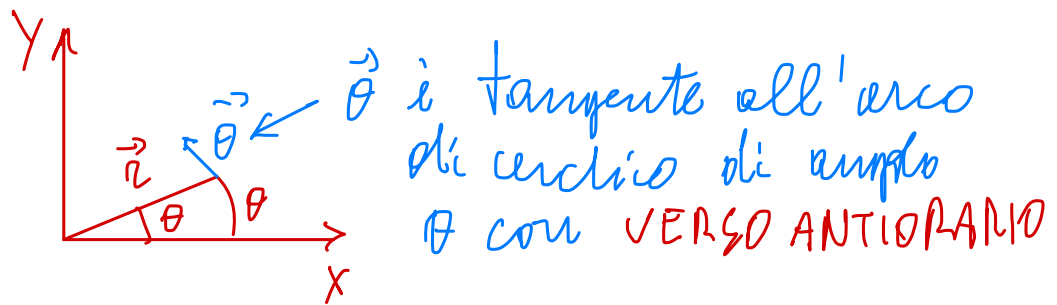
Infatti $\vec{u}_\theta = \frac{\vec{r}}{r}$ e $\vec{r} = (x, y)$, quindi

$$\begin{aligned}\vec{u}_\theta &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\ &= (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y\end{aligned}$$

Si ricordi che

$$\vec{u}_x = (1, 0) \quad \vec{u}_y = (0, 1)$$

$$\text{e } d\vec{r} = (dx, dy) = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$$



Quindi

$$\vec{u}_\theta = \frac{\vec{\theta}}{\theta}$$

Si ricordi che in letterature vi sono diverse, ma equivalenti, simbologie:

$$\vec{u}_r = \hat{r}, \quad \vec{u}_\theta = \hat{\theta}, \quad \vec{u}_x = \hat{x} = \hat{i}, \quad \vec{u}_y = \hat{y} = \hat{j}, \quad \vec{u}_z = \hat{z} = \hat{k}$$

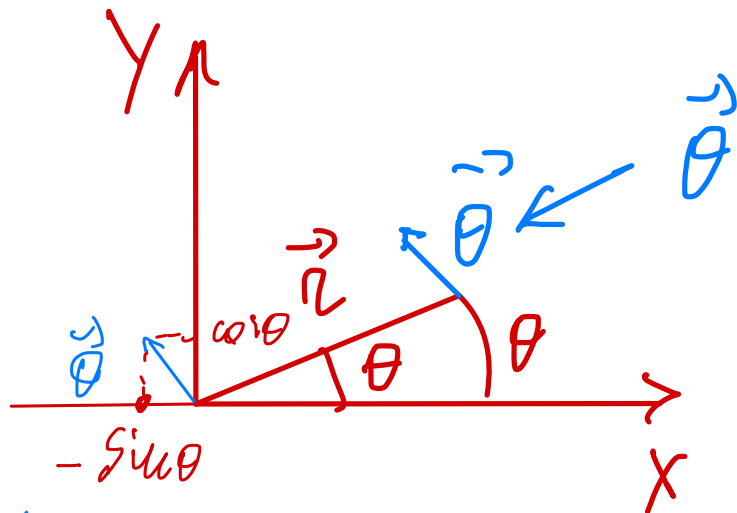
Il fatto che l'angolo $\vec{\theta}$ abbia la direzione tangente all'arco di cerchio di angolo θ è determinato dalla richiesta che il nuovo sistema di riferimento sia anch'esso ortogonale. Cioè, come $\vec{u}_x = (1, 0)$ e $\vec{u}_y = (0, 1)$ soddisfanno la relazione di ortogonalità

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = [1, 0] \cdot [0, 1] = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

si ha anche $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = 0$. Essendo $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{u}_\theta = \frac{\vec{\theta}}{\theta}$

cioè implica anche $\vec{r} \cdot \vec{\theta} = 0$.

"Trasporto parallelo" di $\vec{\theta}$ nell'origine



che mostra

$$\vec{u}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

per cui

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) = 0$$

Sostituendo in (*) $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_\theta$ con

$(\cos\theta, \sin\theta)$ e $(-\sin\theta, \cos\theta)$ si ottiene

il gradiente espresso in coordinate polari

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

L'estensione al caso tridimensionale è del tutto analogo e si ha

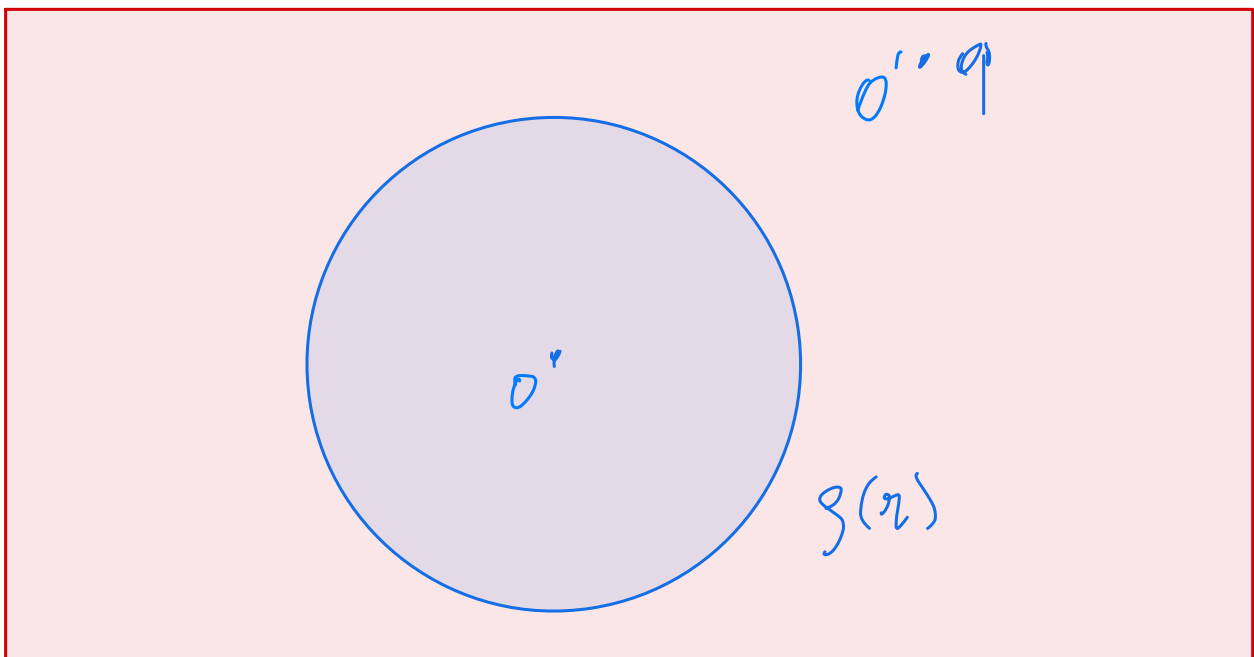
$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{u}_\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Le precedenti espressioni sono utili per calcolare il gradiente di uno scalare. Nel caso delle divergenza e del rotore di un vettore, è necessario un'ulteriore analisi. Per utili approfondimenti si veda l'articolo in Wikipedia

Del in cylindrical and spherical coordinates

Principio di sovrapposizione e risoluzione
di alcuni problemi con rottura delle
simmetrie sferiche.

Rotture delle simmetrie sferiche:

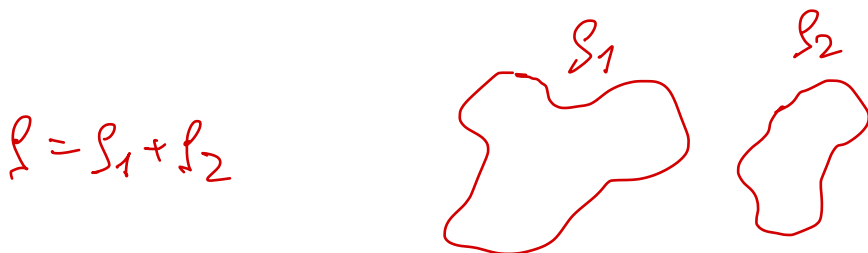


La presenza della carica q rompe la simmetria
sferica. D'effonde

$$\vec{E}_{TOT} = \vec{E}_S + \vec{E}_q$$

$\vec{E}_g =$ campo generato da $g =$ barile (sim. sferica rispetto O)
 $\vec{E}_q =$ campo generato da $q =$ barile (sim. sferica rispetto O')

Il fatto che la somma vettoriale di $\vec{E}_g + \vec{E}_q$ sia il campo elettrico totale segue dal fatto che le equazioni di Maxwell sono lineari in $\vec{E}, \vec{B}, \rho$ e nelle densità di corrente $\vec{j}$. In altri termini $\vec{E}, \vec{B}, \rho$ e $\vec{j}$ appaiono alle potenze 1. Un esempio utile per illustrare il principio di sovrapposizione, cioè l'effetto delle linearità, esprimiamo le densità di carica in due parti arbitrarie



Consideriamo la legge di Gauss in forma differenziale (lo stesso argomento si applica alla versione integrale)

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau, \quad \forall \Sigma \mid \partial \Sigma = \phi, \quad \partial V = \Sigma.$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Essendo $\rho = \rho_1 + \rho_2$ si ha

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_1}{\epsilon_0} + \frac{\rho_2}{\epsilon_0}$$

Dimostriamo con $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ i campi elettrici tali che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = \frac{\rho_1}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2 = \frac{\rho_2}{\epsilon_0}$$

Ovviamente, si ha

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

da cui

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Quindi, più generalmente si ha

se $\rho = \sum_{k=1}^n \rho_k$, allora

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

dove $\vec{E} = \sum_{k=1}^n \vec{E}_k$, con $\vec{E}_k$, $k \in [1, n]$ soluzione dell'eq.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_u = \frac{\rho_u}{\epsilon_0}$$

Supponiamo ora che la legge di Gauss sia quadratica in ρ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho^2}{\epsilon_0}$$

In tal caso avremmo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = \frac{\rho_1^2}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2 = \frac{\rho_2^2}{\epsilon_0}$$

D'altronde, essendo $\rho = \rho_1 + \rho_2$, avremmo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho^2}{\epsilon_0} = \frac{(\rho_1 + \rho_2)^2}{\epsilon_0}$$

mentre

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \frac{\rho_1^2}{\epsilon_0} + \frac{\rho_2^2}{\epsilon_0}$$

Da cui seguirebbe che il principio di sovrapposizione non sarebbe soddisfatto in quanto

$$\vec{E} \neq \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Si noti che nel caso di una distribuzione discreta di cariche, si ha

$$\vec{E}_{TOT}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k^2} \vec{u}_{r_k} \quad (14)$$

dove $\vec{r}_k$ è il vettore congiungente la carica q_k e il punto (x,y,z) , con verso uscente (entrante) da (x,y,z) se $q_k < 0$ ($q_k > 0$).

Come mostrato da (14) si generalizza al caso di distribuzioni continue.