

LEZIONE 12

19.03.2026

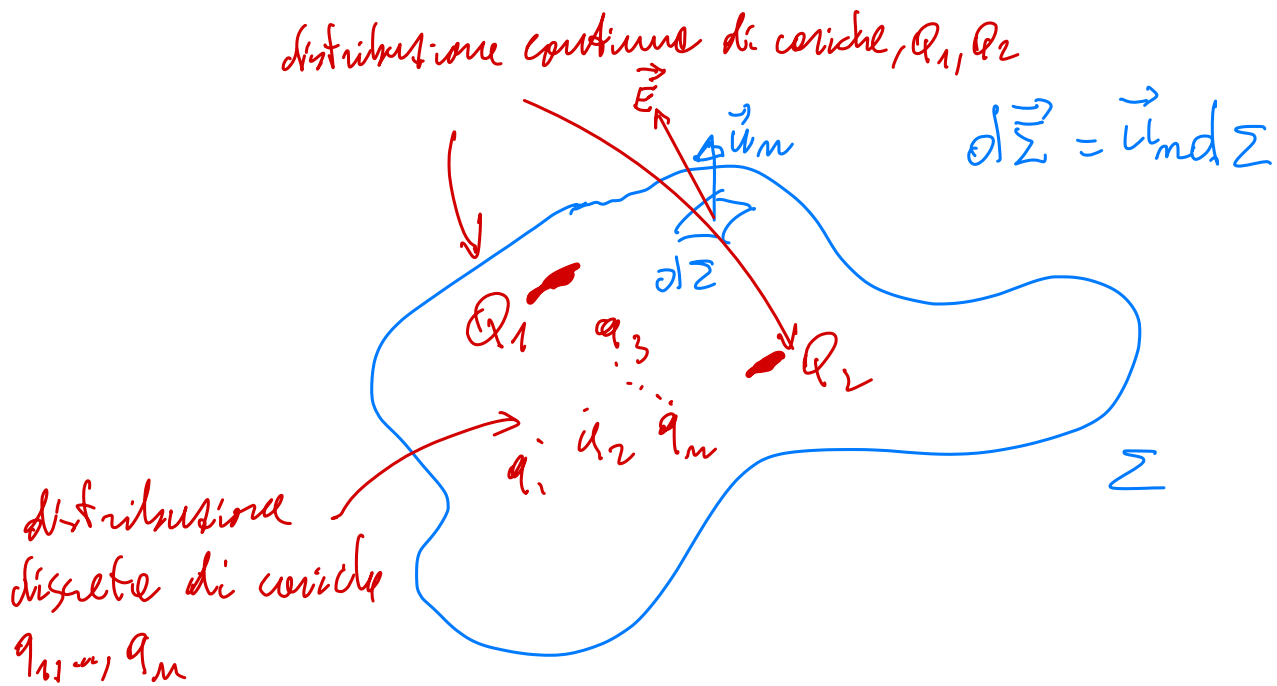
Legge di Gauss in forma integrale
e differenziale

Potenziale scalare e potenziale vettore.
Invarianza di gauge

Campo elettrostatico e potenziale nel
caso di distribuzione di carica
uniforme

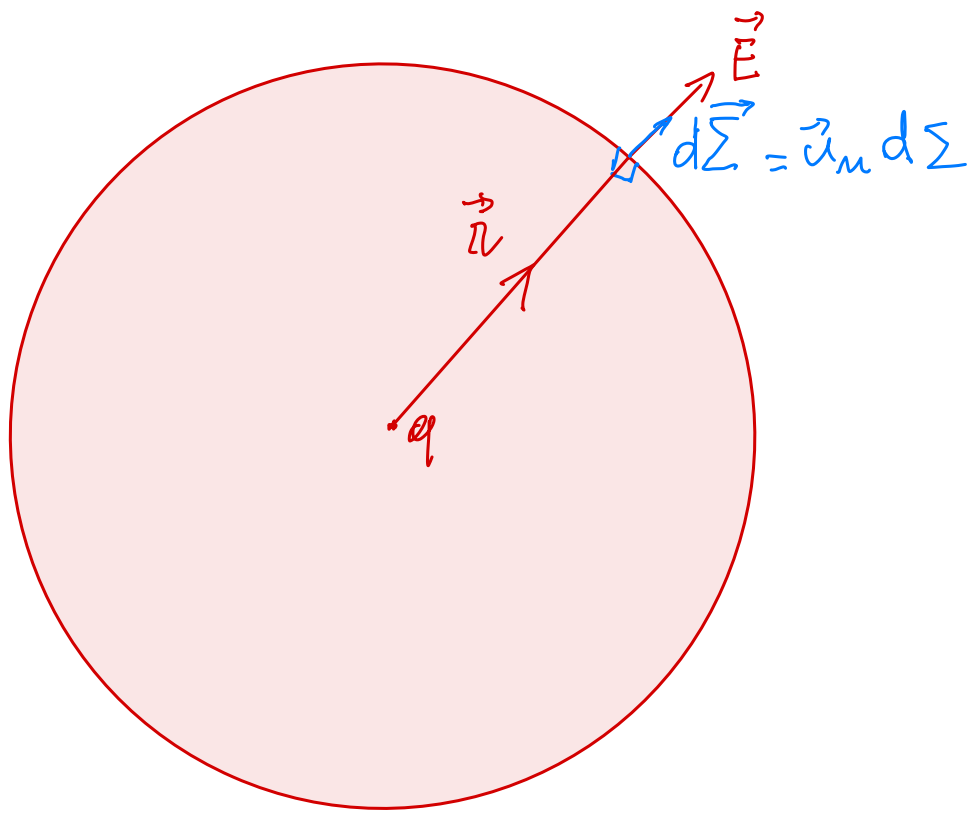
Esercizi

Si ricordi che $\vec{u}_n$ indica il vettore perpendicolare alla superficie infinitesimale $d\Sigma$, con verso esterno a Σ



Nel seguito ricaviamo la legge di Coulomb per il campo elettrico, assumendo la legge di Gauss.

Consideriamo una sfera di raggio r centrata in q



Poiché $\vec{E}$ e $d\vec{\Sigma}$ sono paralleli, si ha $\vec{E} \cdot \vec{n} = E$

$$\vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \vec{E} \cdot \vec{n} d\Sigma = E d\Sigma$$

quindi bisogna dimostrare che

$$\oint_{S_r} E d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

dove S_r è la sfera di raggio r . Poiché sulla superficie d'integrazione E , che dipende solo da r , non varia, si ha

$$\oint_{S_r} E d\Sigma = E \oint_{S_r} d\Sigma$$

D'altronde $\oint_{S_r} d\Sigma$ non è altro che l'area

di S_r , cioè $4\pi r^2$. Si ha quindi

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

da cui

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

In modo simile si può mostrare che

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

nel caso in cui la carica sia esterna a S_r .

Per la dimostrazione del teorema nel caso di superfici chiuse e distribuzioni di cariche arbitrarie, si rimanda al testo.

Deriviamo ora la versione differenziale della legge di Gauss. A tal fine scriviamo la carica in termini della sua densità volumetrica ρ . Per definizione di ρ , si ha che la carica racchiusa in un volume V è data da

$$q = \int_V \rho \, d\tau$$

dove $d\tau$ è l'elemento di volume infinitesimo.

In proposito si ricordi che

$$\rho = \frac{dq}{d\tau}$$

Per derivare la forma differenziale della legge di Gauss, abbiamo bisogno del seguente teorema (teorema della divergenza)

Dato un qualsiasi campo vettoriale $\vec{C}$ il suo flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa Σ , cioè

$$\Phi(\vec{C}) := \oint_{\Sigma} \vec{C} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

insieme vuoto
↓
 $\partial \Sigma = \emptyset$
↑
 Σ non ha
bordo

è pari all'integrale della sua divergenza nel volume V racchiuso da Σ , cioè $\partial V = \Sigma$,

$$\oint_{\Sigma} \vec{C} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{C} d\tau$$

Ciò implica che la legge di Gauss è equivalente a

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau \quad \textcircled{1} \quad \forall V$$

Poiché per costruzione questa relazione vale per qualsiasi V , segue che la $\textcircled{1}$ implica l'uguaglianza tra i due integrandi. Ciò si può capire considerando l'analogo unidimensionale; se

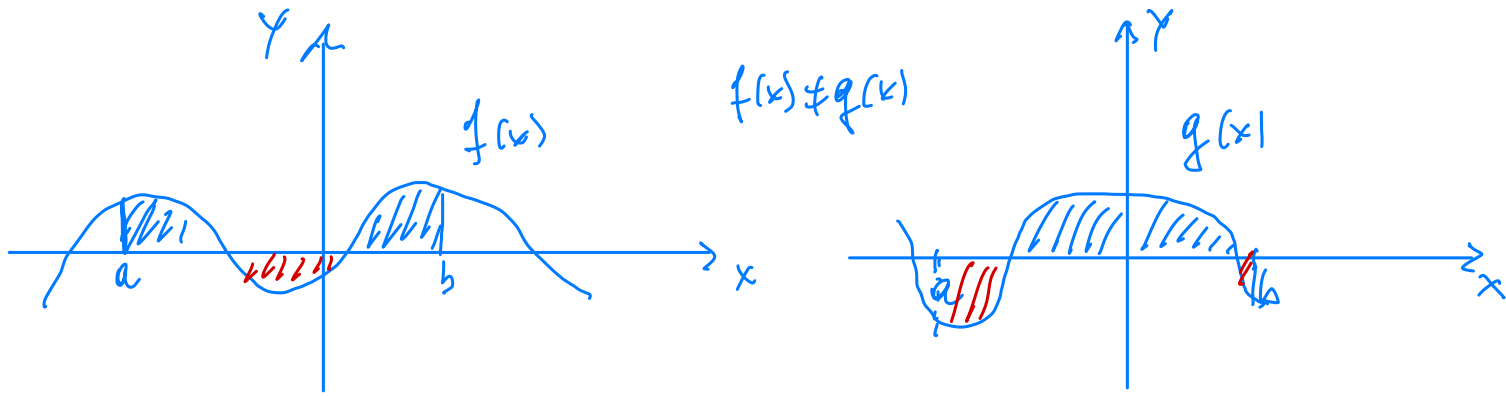
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \textcircled{2}$$

allora

$$f(x) = g(x)$$

Infatti i due integrali corrispondono all'area delle curve $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Mentre per a e b fissati si può avere che le due aree coincidano senza per questo che sia $f(x) = g(x)$, per esempio;

aree uguali ma $f \neq g$



nel caso di Eq. ②, essendo valido per qualsiasi a e b , deve essere $f(x) = g(x)$.

Quindi la ① implica l'uguaglianza dei due integrandi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x, y, z, t) = \frac{\rho(x, y, z, t)}{\epsilon_0} \quad \text{③}$$

Osservazione: poiché la divergenza del rotore è nulla, c'è

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{C}) = 0$$

si ha che l'eq. ③ rimane inalterata se al campo elettrico $\vec{E}$ si aggiunge il rotore di un campo vettoriale arbitrario $\vec{C}$. Percorrendo a ritroso la derivazione della ③, si ha

$$\int_{\Sigma} (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{C}) \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau$$

Questo significa che la legge di Gauss fornisce informazioni sul campo elettrico $\vec{E}$ a meno di un rotore di un campo vettoriale arbitrario.

Tale osservazione è alla base del fatto che la legge di Gauss è valida per qualsiasi campo elettrico, non solo quello elettrostatico, per cui $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$. In altre parole

la legge di Gauss non fornisce informazioni sul valore di $\vec{\nabla} \times \vec{E}$, se $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ allora $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$, ma questa eventuale proprietà di $\vec{E}$ non è ottenibile dalla legge di Gauss.

Ciò implica anche che di per sé la legge di Gauss non determina la legge di Coulomb, in quanto quest'ultima implica che il campo elettrico generato

da una carica è conservativo, quindi $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$.

Più avanti vedremo che l'espressione generale del campo elettrico è

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4)$$

dove $\vec{A}$ è un campo vettoriale che a sua volta è connesso con il campo magnetico $\vec{B}$, tramite la relazione $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Vedremo anche che $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ è proporzionale a $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (legge di Faraday).

Sostituendo l'espressione di $\vec{E}$ data dalla (4) in $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (che è la (3)), si ha

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V - \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5)$$

D'altronde, si noti che l'eq. (4) rimane invariata sotto la trasformazione

$$V \rightarrow V + \frac{\partial f}{\partial t} \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla} f$$

infatti, si ha

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow -\vec{\nabla} V - \cancel{\frac{\partial(\vec{\nabla} f)}{\partial t}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial(\vec{\nabla} f)}{\partial t}} \\ &= -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \end{aligned}$$

tale arbitrarietà di V ed $\vec{A}$ permette di richiedere $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, per cui la (5) diventa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e ricordando che $\Delta := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ è il laplaciano,

si ha che la legge di Gauss in forma differenziale, cioè $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, è equivalente a

$$\Delta V(x, y, z, t) = -\frac{\rho(x, y, z, t)}{\epsilon_0}$$

dette equazione di Poisson.

Si noti che nel caso di anello di coriche, si ha

$$\Delta V(x, y, z, t) = 0$$

dette equazione di Laplace. È interessante osservare che tale equazione ammette anche soluzioni non banali, cioè diverse da $V = \text{costante}$.

ESERCIZIO 1

Si consideri una distribuzione di carica

$$\rho = \begin{cases} \text{uniforme per } r \leq R \ (\rho > 0) \\ 0 & \text{per } r > R \end{cases}$$

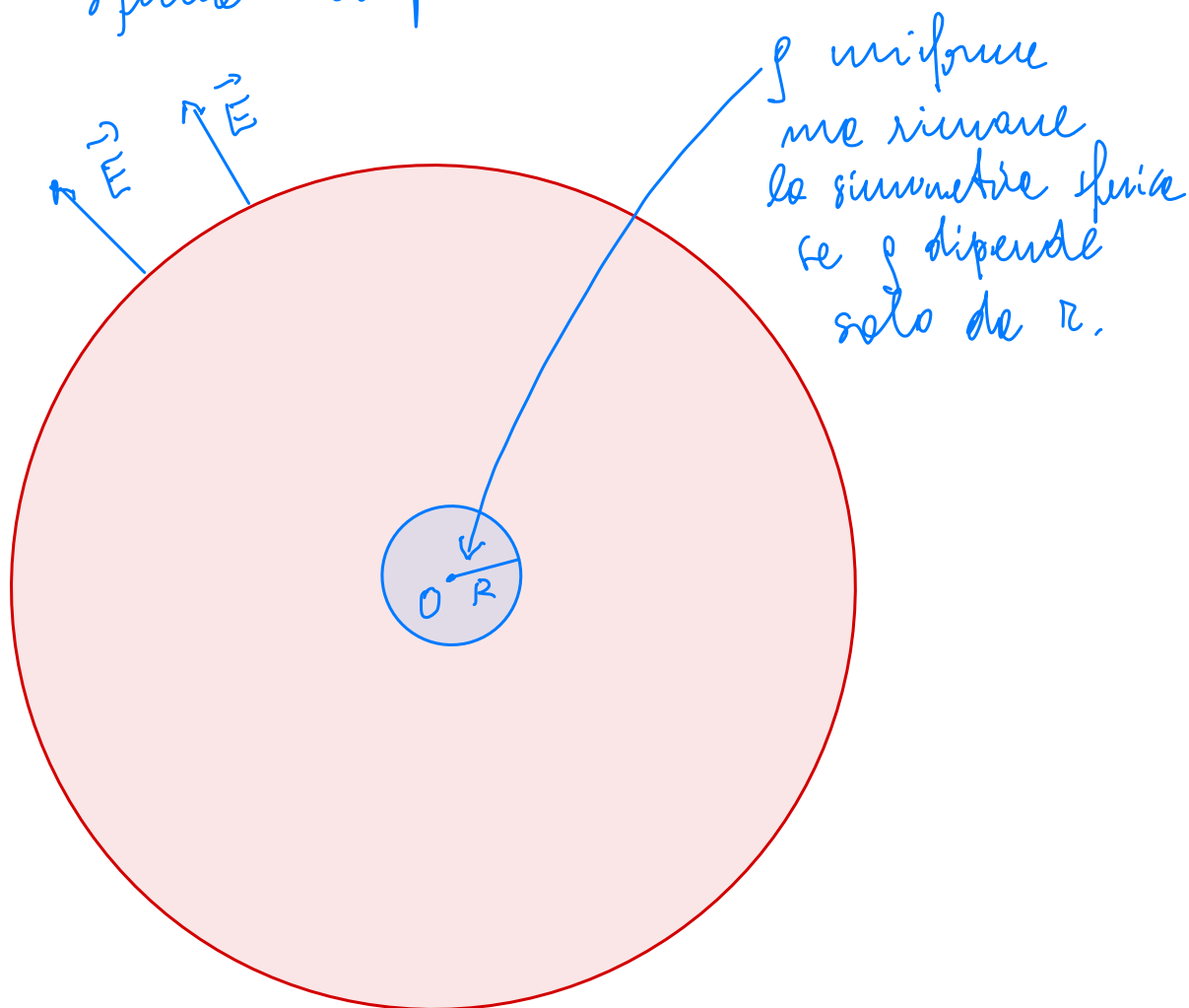
1. Determinare il campo elettrostatico in tutto lo spazio
2. Determinare il potenziale elettrostatico V in tutto lo spazio, con la condizione che

$$V(r=0) = 0$$

Iniziamo con il determinare $\vec{E}$ nel caso $r \leq R$.

Consideriamo quindi una superficie sferica S_r di raggio $r \leq R$.

Simmetria sferica del problema



Un osservatore ad una distanza r arbitraria da O misura un campo elettrico che ha la stessa intensità su tutta la superficie sferica di raggio r e direzione parallela ad $\vec{r}$ (se $p > 0$) e antiparallela ad $\vec{r}$ (se $p < 0$).

La simmetria sferica, oltre ad implicare

$$|\vec{E}(x, y, z)| = E(r) \quad (A)$$

implica anche

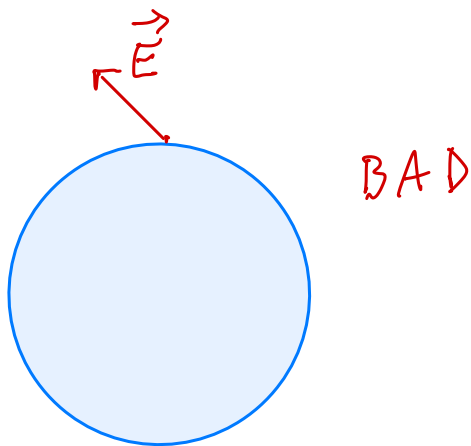
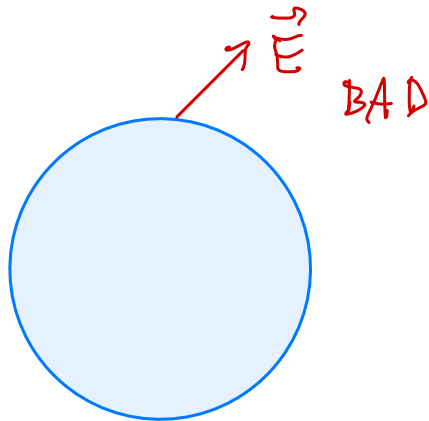
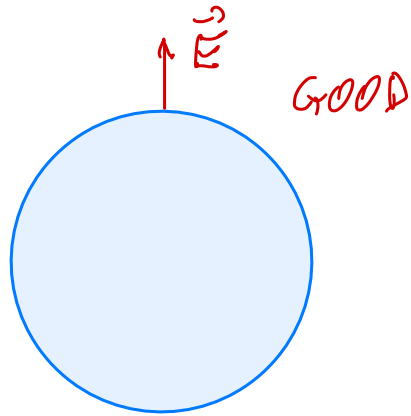
$$\vec{E} // \vec{r} \quad \text{o} \quad \vec{E} // -\vec{r}$$

Nel nostro caso $\rho > 0$, quindi $\vec{E}$ è "uscite", cioè

$$\vec{E} // \vec{r} \quad (B)$$

Il fatto che la simmetria sferica implichi (B) (o $\vec{E} // -\vec{r}$ nel caso $\rho < 0$) segue dal fatto che la distribuzione di carica a sinistra di $\vec{r}$ è la stessa che alla sua destra. Quindi, essendo $\vec{E}$ una quantità fisica completamente determinata da ρ , è chiaro che un'eventuale componente di $\vec{E}$ non parallela ad $\vec{r}$ non rispetterebbe la simmetria

dovute alla simmetria sferica di $\rho(r)$.



Eq. (A) + Eq. (B) :

$$\vec{E}(x, y, z) = E(r) \vec{u}_r$$

(C)

Si noti che la ① implica che in tal caso $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$,

cioè $\vec{E}$ è conservativo. Infatti, la ① può esser espressa
nelle forme

$$\vec{E}(x, y, z) = \left(\frac{d}{dr} \int_{r_0}^r E(r') dr' \right) \vec{u}_r$$

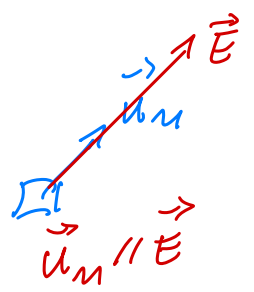
$$= - \frac{d}{dr} V(r) \vec{u}_r = - \vec{\nabla} V$$

dove

$$V = - \int_{r_0}^r E(r') dr'$$

Legge di Gauss:

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$\theta = 0$

D'altronde

$$\vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = E d\Sigma \cos\theta \downarrow = E d\Sigma$$

Si ha quindi

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \xrightarrow{\text{simmetria sferica } \vec{E} \parallel \vec{r}} \oint_{S_r} E d\Sigma = E \oint_{S_r} d\Sigma = 4\pi r^2 E$$

simmetria sferica $|\vec{E}| = E(r)$

Nel caso di distribuzioni arbitrarie non si ottiene
 $\oint_{\Sigma} \vec{E} = E f(x, y, z)$

e la legge di Gauss si riduce a

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_r} \rho d\tau$$

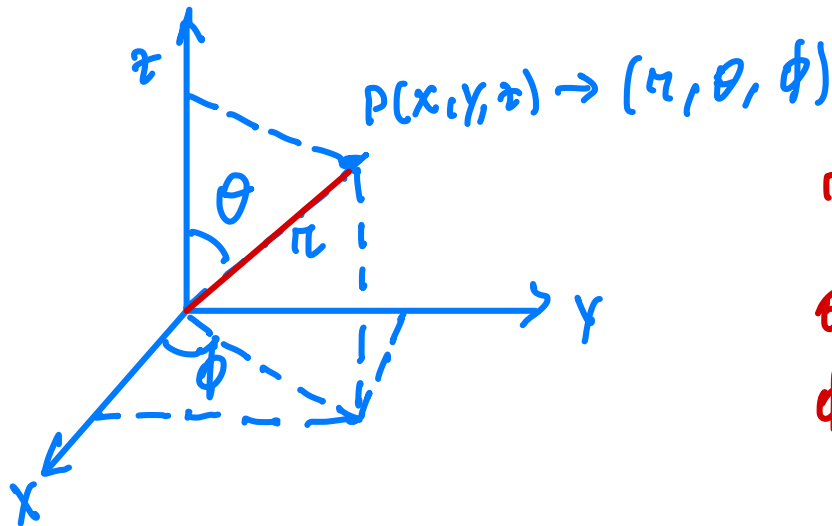
(6)

dove V_r è il volume sferico racchiuso da S_r .

Poiché $r \leq R$ si ha che ρ è diverso da 0 e uniforme. Quindi

$$\int_{V_r} \rho d\tau = \rho \int_{V_r} d\tau = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Coordinate sferiche



$$\rho \geq 0$$

$$\theta \in [0, \pi)$$

$$\phi \in [0, 2\pi)$$

$$x = \rho \sin \theta \cos \phi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \phi$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

$$z = \rho \cos \theta$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ vale solo nel I quadrante

II e III quadrante $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$

IV quadrante $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi$

In V_r la sfera piena. ^{di raggio r} Il fatto che $\int_{V_r} d\tau = \frac{4}{3}\pi r^3$ non è altro che
 l'affermazione che il volume di V_r è $\frac{4}{3}\pi r^3$.
 Questo risultato lo si può anche derivare considerando
 $d\tau$ in coordinate sferiche (sfruttando la simmetria sferica)

$$d\tau = dx dy dz = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$\theta \in [0, \pi), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad r \geq 0$$

$$\begin{aligned} d\cos\theta &= \frac{d\cos\theta}{d\theta} d\theta \\ \underline{d\cos\theta} &= -\sin\theta d\theta \end{aligned}$$

$$\int_{V_r} d\tau = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r r'^2 dr'$$

$$\sin\theta d\theta = -\underline{d\cos\theta},$$

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta = -\int_{1=-\cos\pi}^{1=\cos 0} d\cos\theta = -\cos\theta \Big|_1^{-1} = 2$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi, \quad \int_0^r r'^2 dr' = \frac{r^3}{3}$$

$$\int_{V_r} d\tau = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Integrale sulla superficie sferica
di raggio r :

$$\oint_{S_r} d\Sigma = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 = 4\pi r^2$$

e l'eq. (6) diventa

$$4\pi r^2 E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3}$$

da cui

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

e poiché $\vec{E}$ è parallelo ad $\vec{r}$, si ha

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

verso di $\vec{E}$: $\text{sgn}(\rho) \vec{r}$.
Anziché $\rho < 0$: $\vec{E} \parallel -\vec{r}$, $\rho > 0$: $\vec{E} \parallel \vec{r}$

Si noti che $\vec{E}$ cresce linearmente con la distanza. Come aspettato in quanto ρ è uniforme e quindi la carica è proporzionale ad r^3 , mentre il campo elettrico generato da una carica va come r^{-2} : $r^3 \cdot r^{-2} = r^1$.

Nel caso $r > R$ si ha $\rho = 0$. Ne segue che
mentre si ha

$$\oint_{S_r} (\vec{E}) = 4\pi r^2 E$$

anche per $r > R$, ed comunque la carica elettrica
totale in V_r ha lo stesso valore per tutti gli $r > R$.
In altri termini

$$q(r > R) = \int_{V_{r > R}} \rho \, d\tau \stackrel{\rho=0 \text{ al di fuori di } V_R}{=} \int_{V_R} \rho \, d\tau = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Ne segue che per $r > R$ si ha

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

(7)

Si noti quindi che il campo elettrico per $r > R$ è lo stesso di quello generato da una carica

$$q = \frac{4}{3}\pi \rho R^3$$

centrata nell'origine. Infatti la (7) è equivalente a

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Per determinare il potenziale scalare, con la richiesta $V(r=0)=0$, si ricordi che

$$V(r) - V(0) = - \int_0^r \vec{E}(r') \cdot d\vec{r}'$$

Consideriamo prima il caso $r \leq R$. Si ha

$$V(r) - V(0) = - \int_0^r \frac{\rho}{3\epsilon_0} r' dr' = - \frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2$$

$\begin{matrix} \nearrow \\ 0 \end{matrix}$
condizione

Quindi

$$V(r \leq R) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2$$

Nel caso $r > R$ si ha

$$\begin{aligned} V(r) - V(R) &= -\int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_R^r \frac{1}{r'^2} dr' \\ &= \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left. \frac{1}{r'} \right|_R^r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \end{aligned}$$

da cui

$$V(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + V(R)$$

D'altronde, poiché $V(r \leq R) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2$, si ha $V(R) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R^2$ per cui

$$V(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3r} - \frac{1}{2R} \right)$$

Si noti che l'aver scelto $V(r=0)=0$ implica

$$V(r=\infty) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

ESERCIZIO 2

Stesse domande dell'esercizio 1 ma con densità di carica

$$\rho = \begin{cases} A r^n & \text{per } r \leq R \quad (\rho > 0) \\ 0 & \text{per } r > R \end{cases}$$

$n \geq 0$, A costante positiva.

Iniziamo con l'osservare che le dimensioni X di A sono determinate da

$$[\rho] = X [r^n]$$

$$\Rightarrow X = L^{-n} Q L^{-3} = Q L^{-n-3}$$

Quindi l'unità di misura di A è C/m^{n+3} .

La simmetria sferica del problema implica che

$\vec{E}$ è parallelo ad $\vec{r}$, dove $\vec{r}$ è il raggio
vettore uscente dal centro della sfera di

raggio R . Anche in questo caso abbiamo

$$\vec{E}(x, y, z) \cdot d\vec{\Sigma} \stackrel{\text{simmetria sferica}}{=} E(r) \hat{n} \cdot d\vec{\Sigma} \stackrel{d\vec{\Sigma} \parallel \hat{n}}{=} E(r) d\Sigma$$

E non dip. da θ e ϕ

$$\int_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{S_r} E d\Sigma \stackrel{\downarrow}{=} E \int_{S_r} d\Sigma = E(r) \text{ area sfera} = E(r) 4\pi r^2$$

r tra interno ed esterno alla sfera

Ciò che cambia è l'espressione della carica
totale racchiusa da S_r

$$q(r \leq R) = \int_{V_{r \leq R}} \rho d\tau \stackrel{r \leq R}{=} 4\pi A \int_0^r r'^n r'^2 dr'$$

$$= \frac{4\pi A}{n+3} r^{n+3} \quad (8)$$

e dalla legge di Gauss segue

$$E = \frac{A}{(n+3)\epsilon_0} r^{n+1} \quad \text{per } r \leq R$$

poiché $\vec{E}$ è parallelo a $\vec{r}$, si ha

$r \leq R$:

$$\vec{E} = \frac{A}{(n+3)\epsilon_0} r^{n+1} \vec{u}_r$$

(9)

Si noti che per $n=0$ si ha $\rho=A$ per $r \leq R$,
e il risultato riproduce quello ricavato nel
precedente esercizio.

Nel caso $r \geq R$, si ha

$$\vec{E} = \frac{q(R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

(10)

dove $q(R)$ è dato dalla (8) con $r=R$

$$q(R) = \frac{4\pi A}{n+3} R^{n+3}$$

Calcoliamo ora il potenziale elettrostatico in tutto
lo spazio con la condizione $V(r=0)=0$.

Consideriamo prima il caso $r \leq R$

$$V(r) - V(0) = - \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{r}' = - \frac{A}{(n+3)\epsilon_0} \int_0^r r'^{n+1} dr'$$

$\parallel$
 0

$\uparrow$
Eq. (9)

$$= - \frac{A}{(n+3)(n+2)\epsilon_0} r^{n+2}$$

$$V(r) = - \frac{A}{(n+2)(n+3)\epsilon_0} r^{n+2}$$

$$(11) \quad r \leq R$$

$r > R$:

$$V(r) - V(R) = - \int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{r}' = - \frac{q(R)}{4\pi\epsilon_0} \int_R^r \frac{dr'}{r'^2} = \frac{q(R)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

$\uparrow$
(10)

cioè

$$V(r > R) = \frac{q(R)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + V(R) \quad (12)$$

D'altronde, usando le (11), si ha

$$V(R) = - \frac{A R^{n+2}}{(n+2)(n+3)\epsilon_0}$$

e la (12) diventa

$$V(r \geq R) = \frac{A R^{n+3}}{(n+3)\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{n+3}{n+2} \frac{1}{R} \right)$$

che riproduce, per $n=0$, il risultato derivato nel precedente esercizio.