

LEZIONE 11

18.03.2026

Scherre proprietà gradiente, divergenza
e rotore

legge di Gauss in forma integrale

in quanto per $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ $E_r = 0$, $\mathbf{E} = E_\theta \mathbf{u}_\theta$. In tutte le altre situazioni geometriche il campo elettrostatico non è mai parallelo a $\mathbf{p}$.

Le linee di forza sono rappresentate in figura 2.32 in un qualsiasi piano passante per l'asse del dipolo; la rappresentazione nello spazio si ottiene ruotando la figura intorno all'asse del dipolo.

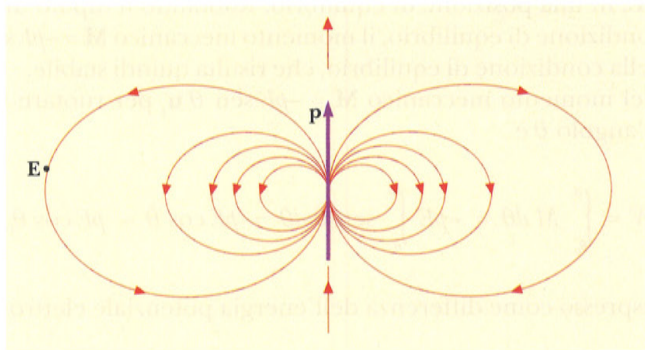


Figura 2.32

Linee di forza di un dipolo elettrico.

La definizione di momento di dipolo (2.45), data per due cariche $-q$ e $+q$ poste a distanza a , può essere generalizzata per sistemi di cariche *neutri*; un esempio è quello di n cariche elementari e positive e n cariche elementari $-e$ negative, contenute in una regione ristretta, come avviene nel caso di atomi e molecole, che hanno dimensioni dell'ordine di $d \approx 10^{-10}$ m. Si può schematizzare il sistema come due cariche $q = ne$ e $-q = -ne$, concentrate nei rispettivi centri di massa: se questi non coincidono e distano a , il momento di dipolo elettrico del sistema è $\mathbf{p} = q\mathbf{a} = ne\mathbf{a}$.

Le (2.46) e (2.48) rappresentano ancora rispettivamente il *potenziale elettrostatico* e il *campo elettrostatico nell'approssimazione di dipolo*, dal momento che come abbiamo già osservato essi dipendono da p e non dalla effettiva distribuzione delle cariche sul sistema.

L'approssimazione di dipolo ($r \gg a$) in base alla quale abbiamo ricavato potenziale e campo elettrostatico di dipolo è spesso utilizzata in fisica. Su scala macroscopica essa si applica per esempio a un'antenna che, come vedremo nel capitolo 10, emette onde elettromagnetiche, anche se non si tratta di un sistema statico, ma *oscillante* in quanto le cariche sono mantenute in movimento lungo l'antenna con moto periodico.

Molto importanti sono i dipoli atomici e molecolari: come vedremo nel capitolo 4, un atomo sottoposto a un campo elettrico esterno si deforma e acquista un momento di dipolo (si *polarizza*), come schematicamente mostrato nella figura 2.33, in cui $q_z = Ze$ è il baricentro delle cariche positive e $-q_z = -Ze$ è il baricentro delle cariche negative; esistono inoltre molecole che hanno una struttura elettrica assimilabile a un dipolo (*molecole polari*) anche in assenza di campi esterni.

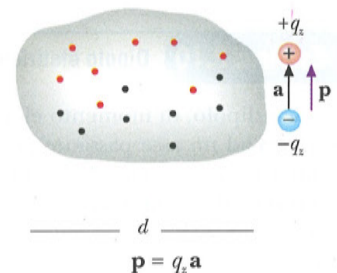


Figura 2.33

Rappresentazione schematica del momento di dipolo elettrico di un atomo (molecola).

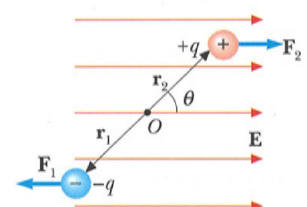


Figura 2.34

Forze su un dipolo in un campo elettrico esterno.

2.8 LA FORZA SU UN DIPOLO ELETTRICO

Consideriamo un dipolo, di momento $\mathbf{p}$, posto in una regione in cui agisce un campo elettrostatico $\mathbf{E}$, uniforme, figura 2.34. Le forze $\mathbf{F}_1 = -q\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}_2 = +q\mathbf{E}$ costituiscono una coppia, quindi hanno risultante nulla e momento meccanico diverso

le cariche del dipolo devono essere comuni tra loro nell'articolo

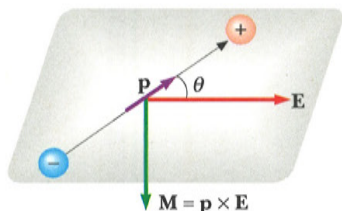


Figura 2.35

Momento meccanico $\mathbf{M}$ su un dipolo di momento $\mathbf{p}$ in campo elettrostatico esterno.

da zero. Tale momento, calcolato per esempio rispetto al centro del dipolo (ma sappiamo che il momento di una coppia non dipende dal polo), è:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_2 = q\mathbf{a} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} . \quad (2.49)$$

Esso, figura 2.35, tende a far ruotare $\mathbf{p}$, fino a portarlo parallelo e concorde al campo elettrostatico $\mathbf{E}$, in una posizione di equilibrio. Ruotando il dipolo di un angolo θ rispetto alla condizione di equilibrio, il momento meccanico $\mathbf{M} = -pE \sin \theta \mathbf{u}_z$ tende a riportarlo nella condizione di equilibrio, che risulta quindi stabile.

Il lavoro del momento meccanico $\mathbf{M} = -pE \sin \theta \mathbf{u}_z$ per ruotare il dipolo dall'angolo θ_0 all'angolo θ è

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta = -pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = pE \cos \theta - pE \cos \theta_0$$

e può essere espresso come differenza dell'energia potenziale elettrostatica del dipolo:

$$W = pE \cos \theta - pE \cos \theta_0 = -[U_e(\theta) - U_e(\theta_0)] . \quad (2.50)$$

Dalla (2.50), a meno di una costante arbitraria, si ha quindi per l'energia potenziale elettrostatica di un dipolo l'espressione

$$U_e(\theta) = -pE \cos \theta$$

ovvero, con notazione vettoriale,

$$U_e(\theta) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} . \quad (2.51)$$

Energia potenziale di un dipolo in campo elettrostatico

ESEMPIO 2.10 Dipolo elettrico che oscilla in campo elettrostatico

Un dipolo, di momento elettrico $\mathbf{p}$ e momento d'inerzia I rispetto ad un asse passante per il centro e ortogonale a $\mathbf{p}$, è immerso in un campo $\mathbf{E}$ uniforme. Descrivere il moto del dipolo quando viene spostato di un piccolo angolo dalla posizione di equilibrio.

Soluzione Ricordiamo dalla dinamica dei corpi rigidi che l'equazione del moto di rotazione è

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} ;$$

proiettando sull'asse di rotazione, dato da $\mathbf{M}$ nella figura 2.35

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -pE \sin \theta .$$

Nell'ipotesi che l'angolo sia piccolo così da poter confondere il seno con l'angolo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{I} \theta = 0 ,$$

che è l'equazione di un **moto armonico** con pulsazione e periodo dati da

$$\omega = \sqrt{\frac{pE}{I}} , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{pE}} .$$

La posizione angolare e la velocità angolare sono

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) , \quad \Omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega \theta_0 \cos(\omega t + \phi) .$$

La dinamica è quella del pendolo di torsione: in entrambi i casi agisce un momento di tipo elastico $M = -k\theta$.

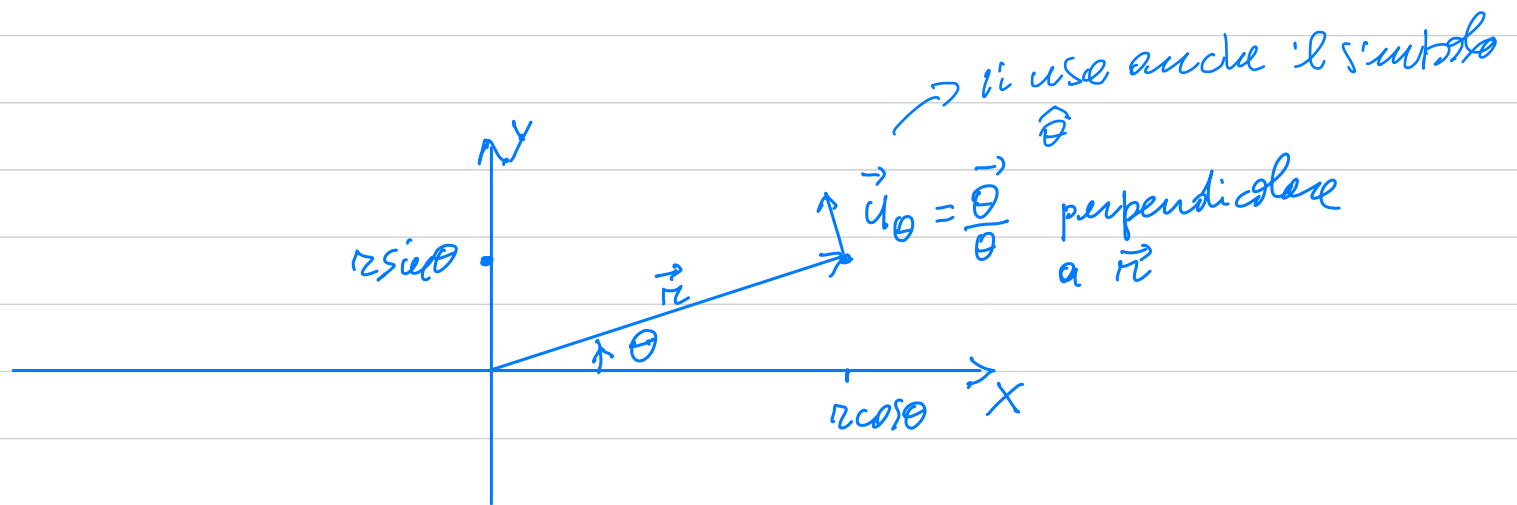
Se l'angolo è grande il moto non è più armonico, pur restando periodico, e applicando la conservazione dell'energia si può esprimere la velocità in funzione dell'angolo:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} I \Omega_2^2 - \frac{1}{2} I \Omega_1^2 = -\Delta U_e = pE \cos \theta_2 - pE \cos \theta_1$$

$$\Rightarrow \Omega_2^2 = \Omega_1^2 + \frac{2pE}{I} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) =$$

$$\Omega_1^2 + 2\omega^2 (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) .$$

Coordinate polari



$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$r \geq 0$$

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

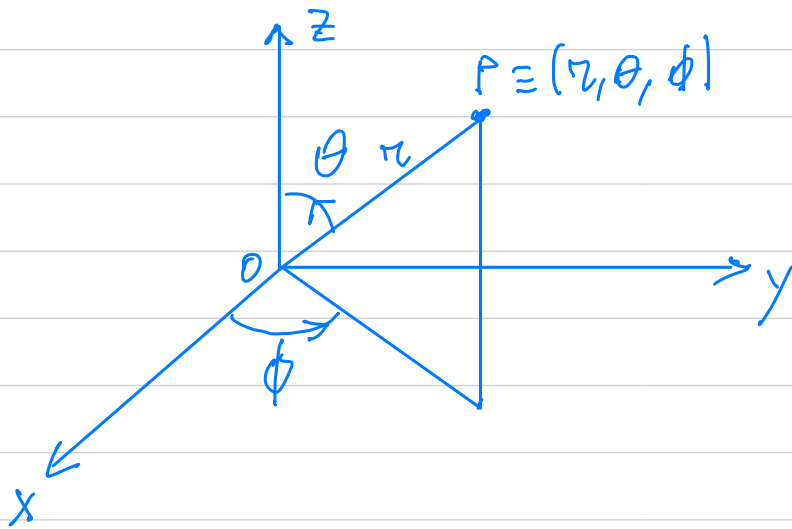
$\vec{\nabla}$ in coordinate polari

$$\vec{\nabla} = \hat{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Coordinate sferiche

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta$$

$$r \geq 0, \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi).$$



$\vec{\nabla}$ in coordinate sferiche

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{u}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

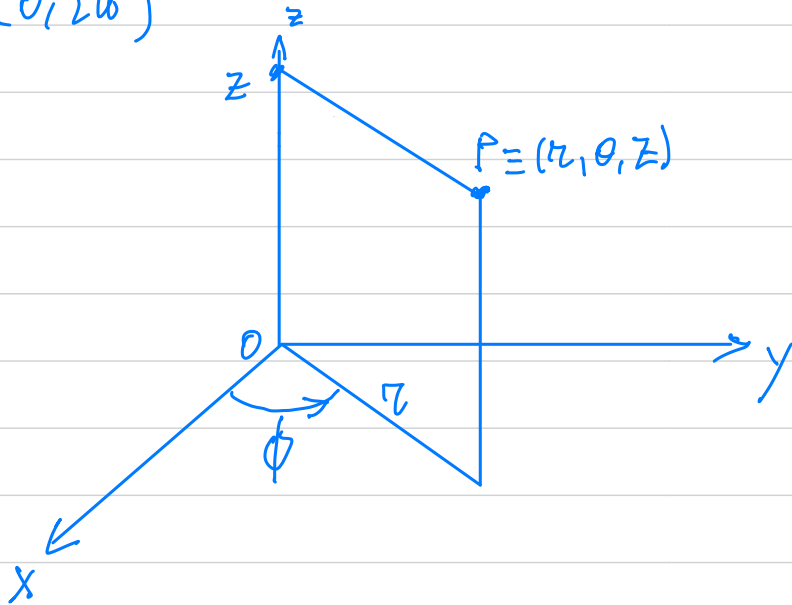
Coordinate cilindriche

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$

$$r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi)$$



$\vec{\nabla}$ in coordinate cilindriche

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Spesso considereremo problemi che possiedono un'invarianza sotto rotazioni rispetto a un centro. Così, per esempio, se una distribuzione di cariche ha simmetria sferica, allora

$$V(x, y, z) \text{ dipende solo da } r: V(r)$$

In tal caso conviene utilizzare le coordinate sferiche.

In effetti

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V(x, y, z) = -\vec{\nabla} V(r) =$$

$$= -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \vec{u}_r - \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial V(r)}{\partial \theta} \vec{u}_\theta} - \cancel{\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V(r)}{\partial \phi} \vec{u}_\phi}$$

$\parallel$ $\parallel$
 0 0

le derivate rispetto a θ e ϕ sono nulle perché $V(r)$ dipende solo da r

Si ha quindi la notevole semplificazione

$$\vec{E} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \vec{u}_r$$

SCHEMA PROPRIETÀ DI $\vec{\nabla}$

Abbiamo visto che il rotore di un gradiente è nullo

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = \vec{0}$$

Un vettore $\vec{E}$ è detto irrotazionale se $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$. In tal caso $\vec{E}$ è gradiente di un campo scalare. Per esempio, se $\vec{E}$ è il campo elettrostatico, allora $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$.

La divergenza di un vettore è il campo scalare:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} := \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Se $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, allora $\vec{B}$ è detto campo vettoriale solenoidale.

Come vedremo, questa è la proprietà del campo magnetico $\vec{B}$: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ non ci sono cariche magnetiche

la divergenza di un rotore è nulla

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad \leftarrow \text{esercizio: verificare}$$

se un campo vettoriale è solenoïdale, cioè $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
allora $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

LAPLACIANO

Agisce sia su campi scalari che vettoriali

campo scalare

$$\Delta G := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \text{campo scalare}$$

campo vettoriale

$$\Delta \vec{A} := (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = \text{campo vettoriale}$$

Esercizio

A) Determinare per quale valore di a e b il campo di forze

$$\vec{F}(x, y, z) = C (yz + a xy, \overset{\downarrow F_x}{xz + x^2}, \overset{\downarrow F_y}{by}, \overset{\downarrow F_z}{x})$$

è conservativo.

B) Determinare le dimensioni della costante C .

A) Abbiamo 3 equazioni:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = bx - x = 0 \rightarrow b = 1$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = y - by = 0 \rightarrow b = 1$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = z + 2x - z - ax \rightarrow a = 2$$

$$a = 2$$

$$b = 1$$

LEGGE DI GAUSS

La legge di Gauss è connesa con il fatto che l'area di una superficie sferica di raggio r è proporzionale a r^2 , mentre il campo elettrico generato da una carica elettrica è proporzionale a r^{-2} , per cui il flusso del campo elettrico generato da una carica è indipendente da r .

legge di Gauss:

il flusso del campo elettrico (non solo quello elettrostatico), dovuto ad una distribuzione di cariche, attraverso una superficie chiusa Σ è uguale alla carica totale racchiusa da Σ , Q_{int} , divisa per ϵ_0

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$