

LEZIONE 10

17.03.2026

Potenziale elettrostatico di un disco carico.

Potenziale elettrostatico tra due piani indefiniti.

Superfici equipotenziali

Il rotore del campo elettrostatico

Il dipolo elettrico

ESEMPIO 2.7 Potenziale elettrostatico di un disco carico

Un disco sottile di raggio R ha una carica q distribuita uniformemente su tutta la sua superficie, come nell'esempio 1.7. Calcolare il potenziale elettrostatico sull'asse del disco.

Soluzione La densità superficiale di carica è $\sigma = q/\pi R^2$, per cui ciascun elemento infinitesimo di superficie di area $d\Sigma$ possiede una carica $dq = \sigma d\Sigma$. Consideriamo, come in figura 2.22, un anello, concentrico al disco, di raggio r e area $d\Sigma = 2\pi r dr$ sul quale c'è una carica $dq = \sigma d\Sigma = 2\pi\sigma r dr$; il potenziale elettrostatico prodotto da questo anello sull'asse si calcola come nell'esempio 2.6:

$$dV(x) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

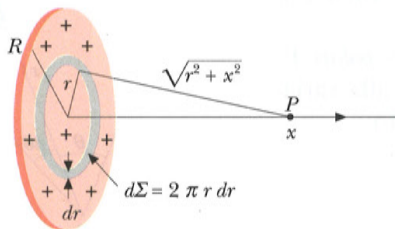


Figura 2.22

Si integra su tutto il disco e si ottiene:

$$V(x) = \int_x dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2+x^2} - x)$$

In particolare per $x=0$ il potenziale elettrostatico è massimo e vale $V = \sigma R/2\epsilon_0$. Lasciamo come esercizio, problema 2.19, la verifica che a grandi distanze ($x \gg R$) il potenziale elettrostatico

del disco è

$$V(x \gg R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x},$$

come se la carica q fosse posta nel centro del disco. Dalla (2.33):

$$E_x(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right),$$

che è la (1.16). Le formule di V e E_x così scritte valgono per $x > 0$; il potenziale elettrostatico per $x < 0$ è identico e quindi basta sostituire x con $|x|$; per il campo elettrostatico, che è discontinuo nell'attraversamento del disco, vale appunto la (1.16). In figura 2.23 sono riportati $V(x)$ e $E(x)$.

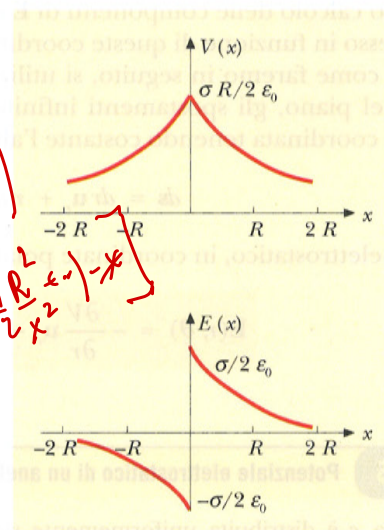


Figura 2.23

ESEMPIO 2.8 Potenziale elettrostatico tra due piani indefiniti carichi

Calcolare l'andamento del potenziale elettrostatico tra due piani indefiniti paralleli uniformemente carichi con densità superficiale l'una $+\sigma$ e l'altra $-\sigma$, figura 2.24a, come nell'esempio 1.8.

Soluzione Sappiamo che il campo elettrostatico all'interno è dato da (1.20); esso è uniforme e siamo nel caso discusso nel paragrafo 2.3, per cui applichiamo (2.28):

$$V(x) = V_1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x - x_1),$$

dove V_1 è il potenziale elettrostatico del piano positivo. Rispetto a V_1 quindi

$$V_1 - V(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x - x_1) \quad (2.39)$$

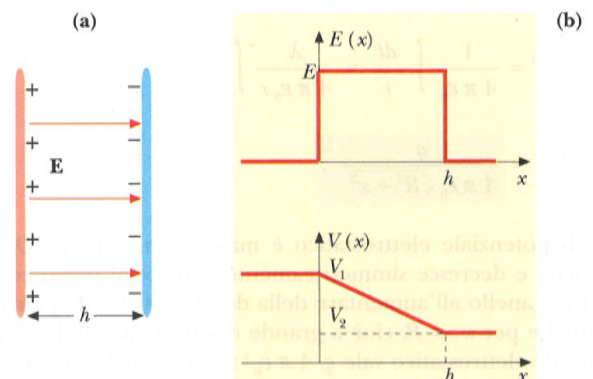


Figura 2.24

e in particolare, posto $h = x_2 - x_1$,

$$V_1 - V_2 = \Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h . \quad (2.40)$$

All'esterno $E = 0$ e il potenziale elettrostatico è costante; siccome è continuo nell'attraversare il piano, per $x < x_1$ $V = V_1$, per $x > x_2$ $V = V_2$. In figura 2.24b sono riportati $E(x)$ e $V(x)$.

NOTA

IL GRADIENTE

Data una funzione scalare $S(x, y, z)$, nel passaggio da un punto $P(x, y, z)$ ad un punto $P(x + dx, y + dy, z + dz)$ la variazione della funzione S è espressa dal *teorema del differenziale totale*:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz .$$

Il vettore $d\mathbf{r} = \mathbf{PP}'$ si scrive $dx\mathbf{u}_x + dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z$ e ha quindi le componenti dx, dy, dz . Dalle proprietà del prodotto scalare tra due vettori segue che, essendo dS uno scalare, le derivate $\partial S/\partial x, \partial S/\partial y, \partial S/\partial z$ devono essere le componenti di un vettore, detto *gradiente di S* , tale che

$$dS = \text{grad } S \cdot d\mathbf{r} .$$

Normalmente si ricorre all'*operatore vettoriale del*, definito da (2.35), e si scrive

$$\text{grad } S = \nabla S = \frac{\partial S}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial S}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial S}{\partial z} \mathbf{u}_z .$$

Per un generico spostamento $d\mathbf{r}$ in una data direzione

$$dS = \nabla S \cos \theta dr \quad \longrightarrow \quad \frac{dS}{dr} = \nabla S \cos \theta ,$$

essendo θ l'angolo formato tra ∇S e $d\mathbf{r}$.

Da queste relazioni si deduce:

- se la direzione considerata è parallela e concorde a ∇S , la variazione di S è la massima possibile ($\cos \theta = 1$);
- se la direzione considerata è ortogonale a ∇S , $\cos \theta = 0$ e $dS = 0$.

Riassumendo, il vettore ∇S ha le seguenti proprietà:

- le sue componenti cartesiane sono le derivate parziali della funzione S ;
- la sua direzione è ortogonale alla superficie su cui S è costante (lungo queste $dS = 0$, si applica il punto b);
- il suo verso indica il verso di massima variazione di S .

Gradiente di una funzione

Operatore del

2.5 SUPERFICIE EQUIPOTENZIALI

La struttura del campo elettrostatico prodotto da un sistema di cariche può essere visivamente rappresentato oltre che dalle linee di forza, definite nel paragrafo 1.6, anche dall'andamento del potenziale elettrostatico. A tale proposito si definisce:

superficie equipotenziale una superficie dello spazio tridimensionale nei cui punti il potenziale elettrostatico ha lo stesso valore

$$V(x, y, z) = \text{costante} .$$

Superficie equipotenziali

Al variare del valore costante si ha una famiglia di superfici equipotenziali con le seguenti caratteristiche:

- per un punto passa una ed una sola superficie equipotenziale;
- le linee di forza sono in ogni punto ortogonali alle superfici equipotenziali.

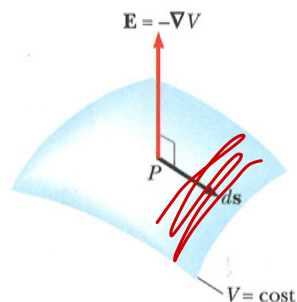


Figura 2.25

Il campo elettrostatico in un punto P è perpendicolare alla superficie equipotenziale.

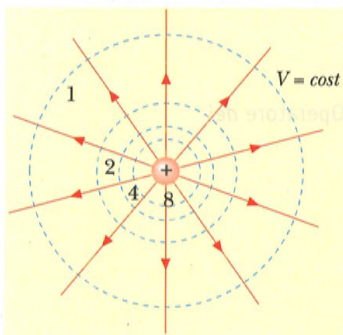


Figura 2.26

Linee di forza (rosse) e tracce delle superfici equipotenziali (tratteggiate azzurre) di una carica puntiforme.

La prima proprietà dipende dal fatto che il potenziale elettrostatico è una funzione univoca, mentre la seconda è conseguenza del fatto che il campo elettrostatico $\mathbf{E}$ non può avere una componente tangente ad una superficie equipotenziale. Il verso del campo elettrostatico, secondo la (2.34), indica il verso in cui le superfici equipotenziali diminuiscono in valore.

Queste proprietà generali si riscontrano facilmente negli esempi che abbiamo trattato. Iniziamo dalla carica puntiforme: le superfici equipotenziali hanno l'equazione

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{costante} \Rightarrow r = \text{costante}$$

e sono quindi superficie sferiche concentriche con centro nella carica, figura 2.26; le linee di forza sono semirette uscenti dalla carica, ortogonali alle superficie sferiche. Se q è positiva il campo è uscente e il potenziale è decrescente con la distanza, se q è negativa il campo è entrante e il potenziale è crescente con la distanza. I numeri riportati in figura 2.26 individuano quattro superficie tali che il potenziale su una di esse è doppio di quello sulla superficie immediatamente precedente, muovendosi nel verso del potenziale crescente. Si vede che le superficie si infittiscono avvicinandosi alla carica (andamento $1/r$).

Nel caso di un filo indefinito il campo ha direzione ortogonale al filo e le superficie equipotenziali sono superficie cilindriche aventi il filo come asse; nel caso di un piano indefinito il campo è ortogonale al piano e le superficie equipotenziali sono piani paralleli al piano e la stessa geometria si ha all'interno di due piani carichi con carica opposta. Si verifica sempre che il verso del campo indica il verso di decrescita del potenziale. Altri esempi, due cariche di segno opposto e due cariche con lo stesso segno, sono mostrati in figura 2.27a e b.

Da queste e dalle precedenti si osserva la proprietà seguente: se si conviene di disegnare le superficie equipotenziali con un certo passo ΔV (cioè $V = V_1$, $V = V_1 + \Delta V$, $V = V_1 + 2\Delta V$, ecc.) è chiaro che la distanza Δn tra di esse è minore dove il campo è maggiore: localmente, a parità di ΔV , maggiore è il campo minore è Δn . Le superficie equipotenziali cioè si infittiscono nelle zone in cui il campo è mag-

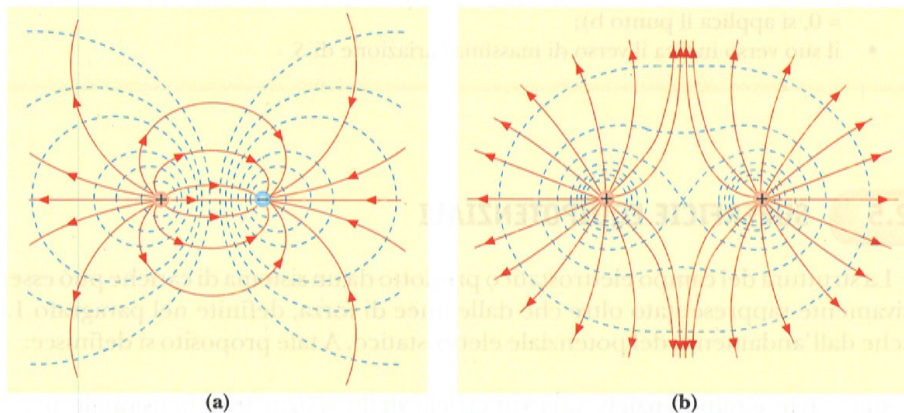


Figura 2.27

Linee di forza (rosse) e tracce delle superfici equipotenziali (tratteggiate azzurre) di un sistema di due cariche uguali di segno opposto (a) e dello stesso segno (b).

giore; in un campo uniforme esse sono equispaziate (nell'esempio 2.8, figura 2.24, sono piani paralleli ai piani carichi).

2.6 IL ROTORE DEL CAMPO ELETTROSTATICO

Esiste una formulazione locale della (2.20) che si ricava ricorrendo ad un teorema del calcolo vettoriale, noto come *teorema di Stokes*. Esso afferma che la circolazione di un campo vettoriale, $\mathbf{E}$ nel nostro caso, lungo una linea chiusa C è eguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie Σ avente per contorno C :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma, \quad \text{dove } d\mathbf{s} = \mathbf{u}_n d\Sigma \quad (2.41)$$

Teorema di Stokes

con i simboli definiti in figura 2.28. Le componenti cartesiane del rotore

$$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}$$

sono calcolate nell'esempio 2.9. Il concetto di flusso di un vettore attraverso una superficie verrà compiutamente esposto nel paragrafo 3.1. Anticipiamo qui, con riferimento alla figura 2.28, che a livello infinitesimo si chiama *flusso di un vettore*, nel nostro caso $\nabla \times \mathbf{E}$, attraverso la superficie $d\Sigma$ la qualità scalare

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = |\nabla \times \mathbf{E}| \cos \theta d\Sigma, \quad (2.42)$$

dove $\mathbf{u}_n$ è il versore normale alla superficie $d\Sigma$, orientato rispetto al verso di percorrenza del contorno C secondo la *regola della vite*, e θ è l'angolo formato dal vettore $\nabla \times \mathbf{E}$ con $\mathbf{u}_n$. Il flusso $\Phi(\mathbf{E})$ attraverso una superficie Σ si ottiene da (2.42) per integrazione.

Ritornando alla (2.41) applicata al campo elettrostatico, sappiamo che il primo membro è sempre nullo in quanto il campo elettrostatico $\mathbf{E}$ è conservativo. Allora il secondo membro può essere nullo, per qualsiasi superficie Σ che si appoggi a un qualunque percorso chiuso C , solo se il rotore di $\mathbf{E}$ è nullo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (2.43)$$

Questa è la formulazione locale di (2.20): il campo elettrostatico, conservativo, è *irrotazionale*, ha cioè *rotore sempre nullo*.

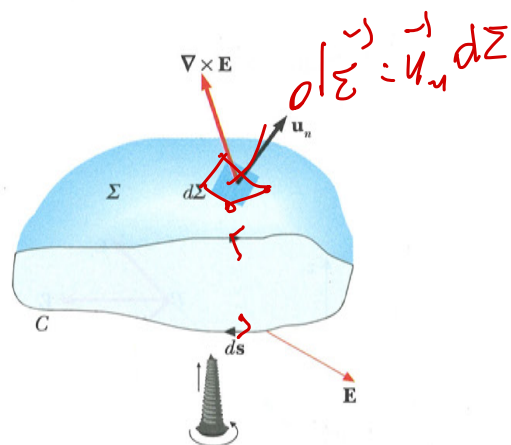


Figura 2.28

Flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata.

ESEMPIO 2.9 Componenti cartesiane del $\nabla \times \mathbf{E}$

Scrivere le componenti cartesiane di $\nabla \times \mathbf{E}$ e dimostrare che questa operazione dà risultato nullo.

Soluzione Ricorriamo alla scrittura in coordinate cartesiane del prodotto vettoriale tra due vettori (vedi appendice C del primo volume).

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z. \quad (2.44)$$

Questa è la definizione di rotore di un vettore in coordinate cartesiane. Sostituendo la (2.33) nella (2.44) otteniamo

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{u}_z.$$

I termini tra parentesi sono tutti nulli per la proprietà delle derivate seconde miste di essere indipendenti dall'ordine di derivazione. Pertanto il rotore del campo elettrostatico è nullo.

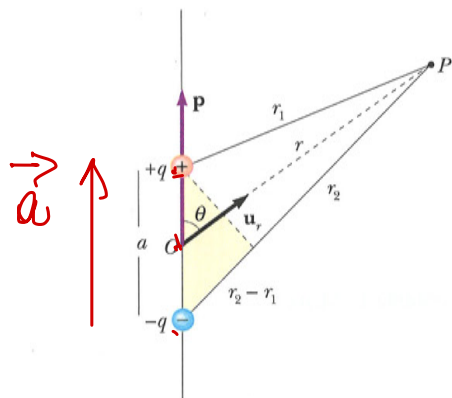


Figura 2.29
Dipolo elettrico.

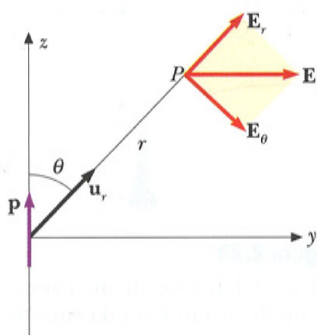


Figura 2.30
Determinazione del campo elettrostatico di un dipolo elettrico.

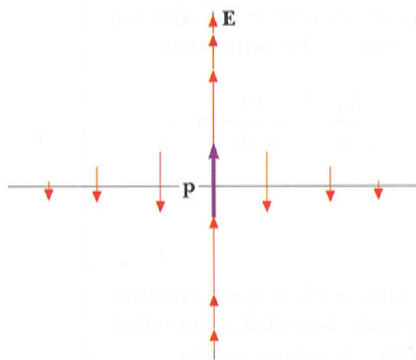


Figura 2.31
Campo elettrostatico in alcuni punti particolari.

2.7 IL DIPOLO ELETTRICO

Due cariche puntiformi $-q$ e $+q$ distanti a costituiscono un **dipolo elettrico**, figura 2.29; si chiama **momento del dipolo elettrico** il vettore

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a} \quad (2.45)$$

con $\mathbf{a}$ orientato dalla carica negativa alla carica positiva.

Il potenziale elettrostatico generato dal dipolo elettrico si calcola utilizzando la relazione (2.19), cioè sommando i potenziali elettrostatici delle due cariche:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Se il punto P è lontano dal dipolo, cioè se $r \gg a$, si può porre

$$r_2 - r_1 = a \cos \theta, \quad r_1 r_2 = r^2$$

e quindi $V(P) = qa \cos \theta / 4\pi\epsilon_0 r^2$ ovvero

$$V(P) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.46)$$

essendo $\mathbf{u}_r$ il versore della direzione OP .

Esaminiamo la struttura della formula (2.46). L'unica grandezza caratteristica del dipolo è il momento $\mathbf{p}$ e non q e a separatamente: ciò indica che da misure di potenziale possiamo ricavare informazioni su $\mathbf{p}$, ma non sulla costituzione del sistema. Ad esempio due cariche $+2q$ e $-2q$ distanti $a/2$ hanno momento di dipolo $2qa/2 = qa = p$ e generano un potenziale eguale a (2.46).

Per il calcolo del campo elettrostatico utilizziamo (2.38):

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (2.47)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

il campo elettrostatico sta pertanto nel piano $\mathbf{p}, \mathbf{u}_r$. Vettorialmente

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{u}_r + E_\theta \mathbf{u}_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{u}_r + \sin \theta \mathbf{u}_\theta). \quad (2.48)$$

Nei punti dell'asse del dipolo il campo elettrostatico, figura 2.31, è parallelo e concorde a $\mathbf{p}$ e vale

$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{sull'asse del dipolo};$$

ciò si ricava ad esempio dal fatto che per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ $E_\theta = 0$ e $\mathbf{E} = E_r \mathbf{u}_r$. Nel piano mediano, figura 2.31, cioè nel piano passante per il centro del dipolo e ortogonale a $\mathbf{p}$, il campo elettrostatico è parallelo e discorde a $\mathbf{p}$ e vale

$$\mathbf{E} = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{nel piano mediano},$$

in quanto per $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ $E_r = 0$, $\mathbf{E} = E_\theta \mathbf{u}_\theta$. In tutte le altre situazioni geometriche il campo elettrostatico non è mai parallelo a $\mathbf{p}$.

Le linee di forza sono rappresentate in figura 2.32 in un qualsiasi piano passante per l'asse del dipolo; la rappresentazione nello spazio si ottiene ruotando la figura intorno all'asse del dipolo.

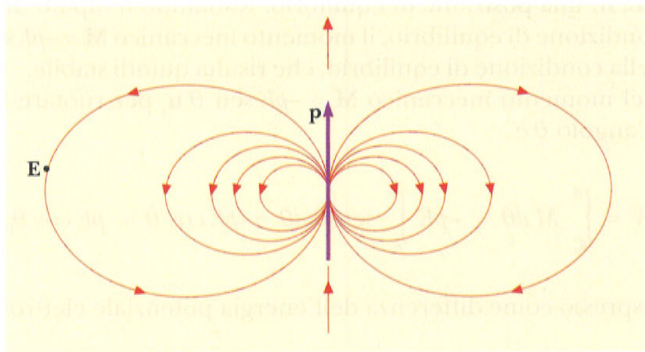


Figura 2.32

Linee di forza di un dipolo elettrico.

La definizione di momento di dipolo (2.45), data per due cariche $-q$ e $+q$ poste a distanza a , può essere generalizzata per sistemi di cariche *neutri*; un esempio è quello di n cariche elementari e positive e n cariche elementari $-e$ negative, contenute in una regione ristretta, come avviene nel caso di atomi e molecole, che hanno dimensioni dell'ordine di $d \approx 10^{-10}$ m. Si può schematizzare il sistema come due cariche $q = ne$ e $-q = -ne$, concentrate nei rispettivi centri di massa: se questi non coincidono e distano a , il momento di dipolo elettrico del sistema è $\mathbf{p} = q\mathbf{a} = ne\mathbf{a}$.

Le (2.46) e (2.48) rappresentano ancora rispettivamente il *potenziale elettrostatico* e il *campo elettrostatico nell'approssimazione di dipolo*, dal momento che come abbiamo già osservato essi dipendono da p e non dalla effettiva distribuzione delle cariche sul sistema.

L'approssimazione di dipolo ($r \gg a$) in base alla quale abbiamo ricavato potenziale e campo elettrostatico di dipolo è spesso utilizzata in fisica. Su scala macroscopica essa si applica per esempio a un'antenna che, come vedremo nel capitolo 10, emette onde elettromagnetiche, anche se non si tratta di un sistema statico, ma *oscillante* in quanto le cariche sono mantenute in movimento lungo l'antenna con moto periodico.

Molto importanti sono i dipoli atomici e molecolari: come vedremo nel capitolo 4, un atomo sottoposto a un campo elettrico esterno si deforma e acquista un momento di dipolo (si *polarizza*), come schematicamente mostrato nella figura 2.33, in cui $q_z = Ze$ è il baricentro delle cariche positive e $-q_z = -Ze$ è il baricentro delle cariche negative; esistono inoltre molecole che hanno una struttura elettrica assimilabile a un dipolo (*molecole polari*) anche in assenza di campi esterni.

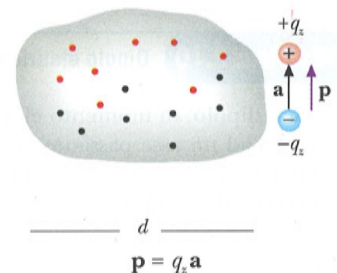


Figura 2.33

Rappresentazione schematica del momento di dipolo elettrico di un atomo (molecola).

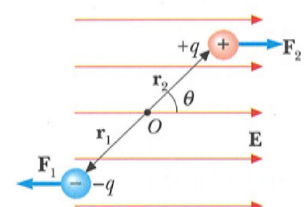


Figura 2.34

Forze su un dipolo in un campo elettrico esterno.

2.8 LA FORZA SU UN DIPOLO ELETTRICO

Consideriamo un dipolo, di momento $\mathbf{p}$, posto in una regione in cui agisce un campo elettrostatico $\mathbf{E}$, uniforme, figura 2.34. Le forze $\mathbf{F}_1 = -q\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}_2 = +q\mathbf{E}$ costituiscono una coppia, quindi hanno risultante nulla e momento meccanico diverso

le cariche del dipolo devono essere comuni tra loro nell'articolo