

LEZIONE 9

12.03.2026

Esercizi: Accelerazione di un elettrone.
Separatore elettrostatico. Oscilloscopio.
Modello classico atomo di idrogeno (Bohr).

Approfondimento del campo elettrostatico
come gradiente del potenziale elettrostatico

Il valore preciso si ha in corrispondenza al valore di e dato nella tabella 1.1, ma differisce da quello riportato in (2.31) di circa lo 0.1%.

I multipli e i sottomultipli comunemente usati per il volt e per l'elettronvolt sono:

$\mu\text{V} = 10^{-6} \text{ V}$	$\mu\text{eV} = 10^{-6} \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-25} \text{ J}$
$\text{mV} = 10^{-3} \text{ V}$	$\text{meV} = 10^{-3} \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-22} \text{ J}$
$\text{kV} = 10^3 \text{ V}$	$\text{keV} = 10^3 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-16} \text{ J}$
$\text{MV} = 10^6 \text{ V}$	$\text{MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$
$\text{GV} = 10^9 \text{ V}$	$\text{GeV} = 10^9 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ J}$
$\text{TV} = 10^{12} \text{ V}$	$\text{TeV} = 10^{12} \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-7} \text{ J}$

Il massimo valore di energia attualmente raggiunto da elettroni accelerati è dell'ordine di 100 GeV, mentre per i protoni è dell'ordine di 1 TeV. Queste energie non sono raggiunte con mezzi elettrostatici (è impossibile realizzare differenze di potenziale di 10^{11} V o di 10^{12} V), ma con altri sistemi elettrici.

$$W = -\Delta U_e = -q\Delta V_e$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$= -\int_A^B E ds = -E \int_A^B ds$$

$\vec{E} \parallel d\vec{s}$ E uniforme
 $= -E(B-A)$

ESEMPIO 2.3 Accelerazione di un elettrone

Un elettrone è abbandonato in quiete in un campo elettrostatico uniforme, di modulo $E = 2 \cdot 10^6 \text{ V/m}$, che lo accelera per una distanza $h = 0.5 \text{ cm}$, figura 2.16. Calcolare l'energia cinetica acquistata dall'elettrone.

velocità $v = 5.93 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, pari a circa il 20% della velocità della luce. La corretta formula relativistica dà $v = 5.85 \cdot 10^7 \text{ m/s}$.

Soluzione La d.d.p. sulla distanza h è data da

$$Eh = 2 \cdot 10^6 \cdot 0.5 \cdot 10^{-2} = 10^4 \text{ V}$$

e quindi l'energia cinetica acquistata dall'elettrone è, secondo (2.29),

$$E_k = eEh = 10^4 \text{ eV} = 10 \text{ keV} = 1.6 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

A questa energia corrisponderebbe, con la formula classica, la

$$2.29 = \frac{1}{2} m(v_B^2 - v_A^2) = q_0 E(z_B - z_A)$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

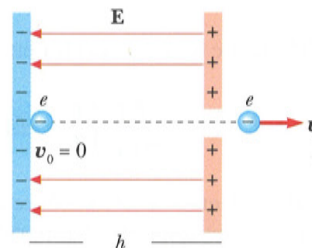


Figura 2.16

N.B. le linee di forza di $\vec{E}$ vanno da $+$ a $-$

$$\text{conservazione dell'energia: } \frac{1}{2} m v_A^2 + q V_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + q V_B$$

ESEMPIO 2.4 Separatore elettrostatico. Oscilloscopio

Un elettrone viene immesso con velocità iniziale v_0 in una regione limitata in cui agisce un campo elettrostatico uniforme perpendicolare a v_0 , come in figura 2.17. Uscito dalla regione l'elettrone colpisce uno schermo S nel punto C (figura 2.17). Calcolare l'angolo di deflessione α , l'energia cinetica e la velocità finali dell'elettrone e la distanza d del punto C dall'asse x .

Soluzione L'elettrone è soggetto a una accelerazione $a = eE/m$ diretta lungo l'asse y quando attraversa la regione in cui c'è campo elettrostatico. Il moto lungo x è rettilineo uniforme con velocità v_0 , il moto lungo y è uniformemente accelerato:

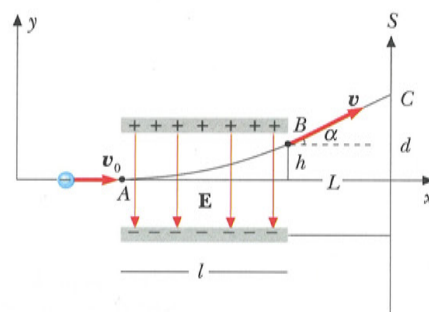


Figura 2.17

$$x = v_0 t \quad y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 \rightarrow t = \frac{x}{v_0}$$

La traiettoria è un arco di parabola di equazione

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{x^2}{v_0^2}$$

Si tratta dello stesso tipo di moto descritto da un corpo di massa m sotto l'azione della forza peso mg (paragrafo 2.4 del primo volume).

L'angolo di deflessione si calcola da

$$\tan \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{eEl}{m v_0^2},$$

e la distanza h vale

$$h = y(l) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v_0^2}$$

L'energia cinetica nel punto B si ottiene applicando (2.29):

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + eEh = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{e^2 E^2 l^2}{2 m v_0^2}$$

e quindi $v^2 = v_0^2 + \frac{e^2 E^2 l^2}{m^2 v_0^2} = v_0^2 + 2ah$. *dove $a = \ddot{y} = eE/m$*

Fuori dal campo l'elettrone descrive una traiettoria rettilinea e quindi

$$d = h + L \tan \alpha = \frac{eEl}{m v_0^2} \left(\frac{l}{2} + L \right). \quad (2.32)$$

Noti i parametri geometrici l e L , il valore del campo e la velocità iniziale, si può determinare il rapporto e/m per gli elettroni misurando d . Ritorreremo più avanti su questa misura fondamentale eseguita da Thomson nel 1897. Per avere un'idea quantitativa dell'entità di d , assumiamo il valore conosciuto $e/m = 1.76 \cdot 10^{11}$ C/kg, una velocità iniziale $v_0 = 3 \cdot 10^7$

m/s, un campo $E = 10^4$ V/m e $l = L = 10$ cm: si ottiene $h = 0.98$ cm, $d = 2.93$ cm.

La (2.32) permette anche, se è noto tutto eccetto il campo, di determinarne il valore misurando d ; siccome il valore del campo è legato alla d.d.p. tra i piani carichi distanti h_0 dalla $\Delta V = E h_0$, la misura di d fornisce in pratica il valore della d.d.p. applicata e anche il segno, dal segno della deflessione.

Vediamo alcune applicazioni del dispositivo descritto. Se lungo l'asse x entrano particelle con la stessa carica e massa diversa esse colpiscono lo schermo in punti diversi; con un opportuno diaframma possono essere lasciate proseguire oltre lo schermo solo quelle con massa compresa entro un intervallo determinato dalla larghezza del diaframma. Il sistema si chiama **separatore elettrostatico**.

Uno strumento di larghissimo uso in cui sono adottate due coppie di placchette di deflessione come quelle descritte è l'**oscilloscopio**, il cui elemento principale, il *tubo a raggi catodici*, è mostrato in figura 2.18. Si può capirne il funzionamento fin d'ora, anche se viene utilizzato soprattutto per misura di d.d.p. variabili nel tempo.

Dentro un involucro di vetro in cui è fatto il vuoto si trovano una sorgente che emette lungo l'asse x un fascio collimato di elettroni, una coppia di placchette di deflessione verticale, una coppia di placchette di deflessione orizzontale e lo schermo S costituito da materiale fluorescente depositato all'interno della parete terminale; l'emissione di luce dallo schermo nel punto in cui è colpito dal fascio di elettroni permette di visualizzare la posizione del fascio (un tubo a raggi catodici è l'elemento essenziale anche nei televisori e nei terminali dei calcolatori, anche se per questi ultimi sono adesso adoperati sistemi diversi; il nome raggi catodici è quello dato agli elettroni al tempo della loro scoperta).

Gli elettroni sono sottoposti a due deflessioni a 90° tra loro; la deflessione orizzontale è causata da una d.d.p., applicata alle placchette verticali, che viene fatta variare linearmente nel tempo, per cui sullo schermo provoca uno spostamento di equazione $z = v_0 t$; la deflessione verticale è causata da una d.d.p. $V(t)$, applicata alle placchette orizzontali, che provoca sullo schermo uno spostamento di equazione $y = y(t)$, con $y(t)$ proporzionale a $V(t)$ come abbiamo visto in precedenza. Il fascio colpisce lo schermo nel punto di coordinate (z, y) che

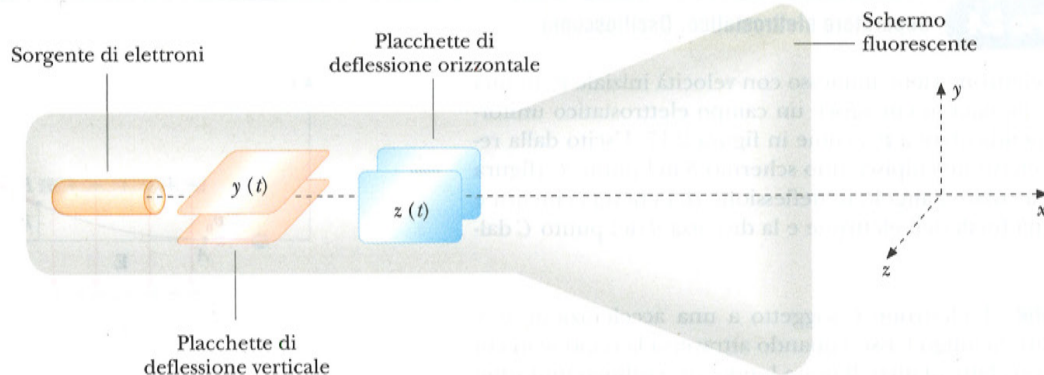


Figura 2.18

nel tempo descrive la curva di equazione $y = y(z/v_0)$; questa ha, in funzione di z , lo stesso grafico di y , e quindi di V , in funzione di t . Sullo schermo si vede una traccia continua luminosa corrispondente al grafico e non una successione di punti luminosi lungo il grafico in quanto l'emissione luminosa dura un certo tempo.

Per esempio, se la d.d.p. applicata alle placchette di deflessione verticale è sinusoidale con periodo $T = 2\pi/\omega$, allora

$$y(t) = y_0 \sin \omega t \Rightarrow y(z) = y_0 \sin \frac{\omega z}{v_0} = y_0 \sin k z,$$

che è ancora una sinusoide di periodo

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} v_0 = T v_0.$$

Tarando lo schermo lungo z in unità di λ/v_0 si può leggere direttamente T .

L'uso prevalente dell'oscilloscopio in laboratorio consiste nella visualizzazione di qualsiasi $V(t)$ e nella sua misura in ampiezza e nel tempo.

Da un punto di vista dinamico quella che abbiamo descritto è un'applicazione della composizione di moti su assi ortogonali; ad esempio l'oscilloscopio fornisce il modo più comodo per studiare la composizione di oscillazioni armoniche su assi ortogonali (paragrafo 10.5 del primo volume): basta trasformarle in oscillazioni elettriche e applicarle alle placchette z e y .

Un'alternativa recente al tubo a raggi catodici è costituita da dispositivi a cristalli liquidi, molto più compatti.

ESEMPIO 2.5 Modello classico dell'atomo di idrogeno

Nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno l'elettrone compie un'orbita circolare di raggio $r = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m attorno al protone, figura 2.19. Calcolare l'energia di legame dell'atomo di idrogeno.

Soluzione Il potenziale elettrostatico del protone, puntiforme rispetto alle dimensioni atomiche, ha alla distanza r il valore, dato da (2.15),

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = 27.2 \text{ V}$$

e quindi l'energia potenziale elettrostatica dell'elettrone nel campo del protone è

$$U_e = -eV = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -27.2 \text{ eV} = -4.35 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

Sull'elettrone agisce la forza data dalla legge di Coulomb e, per la legge di Newton,

$$ma = m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}:$$

la forza coulombiana è cioè la forza centripeta che mantiene l'elettrone sull'orbita circolare. L'energia cinetica dell'elettrone è

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(risulta $v = 2.19 \cdot 10^6$ m/s) e la sua energia totale è pari a

$$\begin{aligned} U &= E_k + U_e = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= -13.6 \text{ eV} = -21.8 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \end{aligned}$$

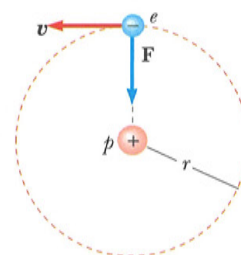


Figura 2.19

L'energia totale è negativa in quanto l'energia potenziale in modulo è superiore all'energia cinetica; il sistema è quindi legato con energia di legame pari a -13.6 eV.

Se si vuole separare l'elettrone dal protone portandolo a distanza infinita, la minima spesa di energia si ha quando l'elettrone arriva all'infinito con velocità nulla. La sua energia finale è nulla e quindi lo è anche quella iniziale; pertanto all'inizio deve essere

$$U + U' = 0 \Rightarrow -13.6 \text{ eV} + U' = 0 \Rightarrow U' = 13.6 \text{ eV}.$$

Questa è la cosiddetta energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno. Ricordiamo che si chiama *ionizzazione* il processo di separazione di elettroni da un atomo a seguito del quale si formano uno ione positivo (l'atomo privo di uno o più elettroni) ed elettroni liberi; altri atomi possono catturare questi elettroni diventando ioni negativi (paragrafo 1.2).

Si osservi che l'energia di legame non è l'energia potenziale elettrostatica: ciò sarebbe vero se entrambe le cariche fossero in quiete ($E_k = 0$); abbiamo però notato che questo sistema non è elettricamente stabile, mentre l'atomo è stabile. In effetti la stabilità sotto l'azione di una forza attrattiva si ottiene solo perché l'elettrone ruota.

$$\text{Eq(2.7): } V(\vec{r} + d\vec{r}) - V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + d\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \approx - \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

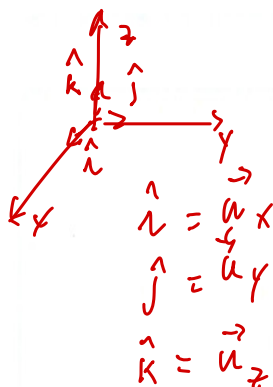
$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

$$\vec{u}_x = (1, 0, 0)$$

$$\vec{u}_y = (0, 1, 0)$$

$$\vec{u}_z = (0, 0, 1)$$



Campo $\vec{E}$ come gradiente di V

$$\begin{aligned} & V(x+dx, y, z) - V(x, y, z) \\ &= - \int_{(x,y,z)}^{(x+dx,y,z)} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &\approx - \vec{E} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

L'operatore ∇ in coordinate cartesiane

Gradiente di una funzione scalare

2.4 IL CAMPO COME GRADIENTE DEL POTENZIALE

Nei paragrafi precedenti abbiamo dimostrato che se si conosce il campo elettrostatico in ogni punto di una curva che unisce due punti A e B possiamo calcolare la differenza di potenziale tra i due punti tramite la (2.7) e che il risultato non dipende dalla curva prescelta.

Vogliamo ora dimostrare che accanto a questa relazione *integrale* esiste una relazione *locale* che permette dalla conoscenza del potenziale elettrostatico in ogni punto di una certa regione di calcolare il campo elettrostatico in ogni punto della stessa regione.

Per uno spostamento $d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$ che unisce due punti di coordinate $A(x, y, z)$ e $B(x+dx, y+dy, z+dz)$ la variazione del potenziale è

$$dV = V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x, y, z) = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

in accordo con (2.7) e con l'espressione del prodotto scalare tramite le componenti. D'altra parte per il teorema del differenziale totale

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

e dal confronto tra le due espressioni di dV ricaviamo che devono sussistere le eguaglianze

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.33)$$

Abbiamo così trovato le relazioni che a partire da una funzione scalare definiscono le componenti del vettore gradiente della funzione (si veda il riquadro alla fine di questo paragrafo); la (2.33) può quindi essere scritta sinteticamente

$$\vec{E} = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right) = -\text{grad } V \quad (2.34)$$

il campo elettrostatico è uguale in ogni punto al gradiente del potenziale elettrostatico calcolato in quel punto cambiato di segno.

L'equazione (2.34) è la *relazione locale* che tramite il calcolo delle derivate parziali del potenziale permette di determinare le componenti del campo elettrico in ogni punto della regione in cui sono definiti campo e potenziale.

La rappresentazione dell'operatore ∇ può avvenire in modo diverso utilizzando l'**operatore vettoriale** ∇ definito da

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z. \quad (2.35)$$

Formalmente ∇ si comporta come un vettore, che acquista significato quando opera su una funzione scalare o viene moltiplicato per un altro vettore. In particolare l'applicazione dell'operatore ∇ a una funzione scalare come il potenziale consiste nel riempire il posto vuoto nell'operazione di derivata con la funzione stessa, cioè

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = \text{grad } V \quad (2.36)$$

Differenziale totale di una funzione

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Distinzione tra derivate parziali e totale

$$\frac{dg(x, y(x))}{dx} = \frac{\partial g(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y(x))}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

Esempio: $g(x,y) = x+y$ con $y=x^2$. Esprimendo $g(x, y(x))$ in termini della sola x ; $g(x, y(x)) = x+x^2$, si ha

$$\frac{dg(x, y(x))}{dx} = \frac{d}{dx} (x+x^2) = 1+2x \quad \left(\text{si noti che } \frac{d}{dx} (x+x^2) = \frac{\partial}{\partial x} (x+x^2) \right)$$

che comunque è equivalente ad usare la (1)

$$\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}}_1 + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}}_1 \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{2x} = 1+2x$$

Nel caso di una funzione di un'unica variabile, $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}$

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx = \frac{df(x)}{dx} dx$$

Se x, y, z sono indipendenti, allora

Un campo vettoriale generico è descritto da tre funzioni: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dx}$

$$\vec{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z) \hat{x} + A_y(x,y,z) \hat{y} + A_z(x,y,z) \hat{z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{d}{dy}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dz}$$

Un campo vettoriale conservativo dipende solamente da una funzione

$$\vec{E}(x,y,z) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad V \equiv V(x,y,z)$$

l'operatore *del* applicato a una funzione scalare acquista il significato di gradiente della funzione. Vedremo più avanti l'applicazione a vettori. Nel seguito useremo il simbolo ∇V per indicare il gradiente del potenziale.

Secondo (2.34) e (2.36) la (2.7) può essere riscritta a livello infinitesimo e a livello finito come

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \nabla V \cdot d\mathbf{s} \quad , \quad V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \nabla V \cdot d\mathbf{s} \quad ;$$

si ha quindi il *teorema del gradiente*:

$$V_B - V_A = \int_A^B \nabla V \cdot d\mathbf{s} \quad . \quad (2.37)$$

Teorema del gradiente

Le (2.33) suggeriscono un metodo alternativo per il calcolo del campo elettrostatico $\mathbf{E}$. Questo consiste nel calcolo del potenziale, applicando (2.19) o (2.21), e nel successivo calcolo delle componenti di $\mathbf{E}$ come derivate parziali rispetto a x , y , z se V è espresso in funzione di queste coordinate del punto P .

Quando, come faremo in seguito, si utilizza un sistema di *coordinate polari*, figura 2.20, nel piano, gli spostamenti infinitesimi che corrispondono alla variazione di una coordinata tenendo costante l'altra sono dr e $r d\theta$ e pertanto:

$$d\mathbf{s} = dr \mathbf{u}_r + r d\theta \mathbf{u}_\theta \quad .$$

Il campo elettrostatico, in coordinate polari piane, risulta

$$\mathbf{E}(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta \quad . \quad (2.38)$$

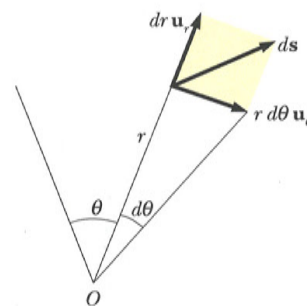


Figura 2.20

Spostamento elementare in un piano in coordinate polari.

ESEMPIO 2.6 Potenziale elettrostatico di un anello carico

Una carica q è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio R , come nell'esempio 1.6. Calcolare il potenziale elettrostatico sull'asse dell'anello.

Soluzione Analogamente a quanto fatto nell'esempio 1.6 si definisce una densità lineare di carica $\lambda = q/2\pi R$, per cui ciascun elemento dl dell'anello di figura 2.21 ha carica infinitesima $dq = \lambda dl$ e dista $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ da un punto P dell'asse dell'anello, a sua volta distante x dal centro O . Utilizziamo la (2.21):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int dl = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} \quad .$$

Handwritten notes: $V = \int dV = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$

Il potenziale elettrostatico è massimo nel centro O dell'anello e decresce simmetricamente rispetto al piano contenente l'anello all'aumentare della distanza di P dal centro. Si noti che per $x \gg R$, cioè a grande distanza dall'anello, il potenziale elettrostatico vale $q/4\pi\epsilon_0 |x|$, come se la carica fosse nel centro.

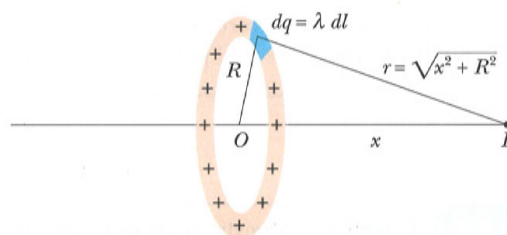


Figura 2.21

Dalla conoscenza del potenziale elettrostatico sull'asse x si può calcolare, tramite la (2.33) la componente del campo elettrostatico E_x :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \quad , \quad (*)$$

che coincide con la (1.15). Dal calcolo del potenziale $V(x, y, z)$ in ogni punto, peraltro non analiticamente semplice, si potrebbe dedurre che sull'asse x :

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad .$$

Handwritten note: (*) In linea di principio è nemmeno conoscere V su $\mathbb{R}^3$ calcolando le derivate e solo dopo porre $y=z=0$. Nel presente caso le due procedure danno lo stesso risultato