

LEZIONE 7

10.03.2026

Linee di forza del campo elettrostatico

Lavoro della forza elettrica

Tensione

Differenza di potenziale

Sempre per ragioni di semplicità analitica ci siamo limitati a distribuzioni di carica lineari e superficiali e non abbiamo fatto esempi di calcoli di campi generati da distribuzioni volumetriche di carica: infatti, anche in condizioni di simmetria, le integrazioni sono piuttosto complicate. Comunque sia, in tali casi per l'elemento di carica si scrive $dq = \rho d\tau$, dove $d\tau$ è il volume infinitesimo che contiene la carica dq e ρ è la **densità volumetrica di carica**, che si misura in C/m^3 . Vedremo nel paragrafo 3.3 un metodo per risolvere più semplicemente sia qualche problema di questo tipo che alcuni degli esempi già visti.

Densità volumetrica di carica

1.6 LINEE DI FORZA DEL CAMPO ELETTROSTATICO

L'introduzione del concetto di campo elettrostatico mette in evidenza che la presenza di un sistema di cariche, dal caso più semplice della singola carica puntiforme al caso più generale di una distribuzione spaziale, modifica lo spazio circostante nel senso che una carica di prova posta in un qualsiasi punto risente della forza (1.13), attribuita all'interazione con il campo elettrostatico.

Partendo da una generica posizione e muovendosi per tratti infinitesimi successivi, ciascuno parallelo e concorde al campo elettrostatico in quel dato punto, si ottiene una linea che è detta **linea di forza** o **linea del campo elettrostatico**: pertanto in ogni suo punto tale linea per definizione è tangente al campo e il suo verso di percorrenza indica il verso del campo. Se si traccia un certo numero di linee di forza si ha una rappresentazione grafica complessiva del campo in tutto lo spazio, come vedremo negli esempi che seguono.

Linea di forza

Nel caso di una carica puntiforme, il cui campo è dato da (1.11), le linee di forza hanno direzione radiale con origine sulla carica e sono uscenti da questa se è positiva, entranti se è negativa. Si vede dalla figura 1.23 che le linee si infittiscono man mano che ci si avvicina alla sorgente del campo e ciò indica che l'intensità del campo è crescente.

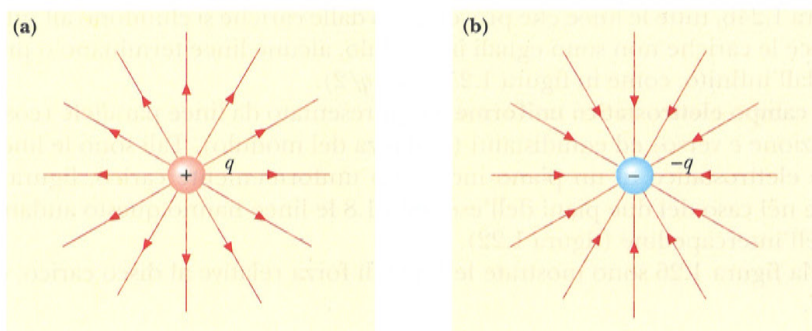


Figura 1.23

Linee di forza di una carica puntiforme positiva (a) e negativa (b).

Come esempi successivi consideriamo le linee di forza di un sistema di due cariche puntiformi eguali in valore, ma di segno opposto, figura 1.24a (sistema detto *dipolo elettrico* che studieremo nel paragrafo 2.7), e di due cariche puntiformi eguali in valore e segno, figura 1.24b. Già a questo punto sono evidenti tutte le proprietà delle linee di forza:

- una linea di forza in ogni suo punto è tangente e concorde al campo elettrostatico in quel punto;

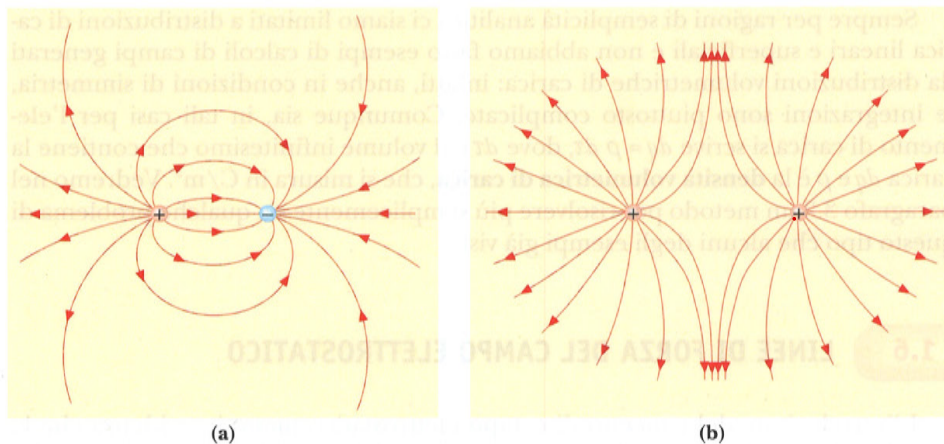


Figura 1.24

Linee di forza di due cariche puntiformi di valore uguale di segno opposto (a) e dello stesso segno (b).

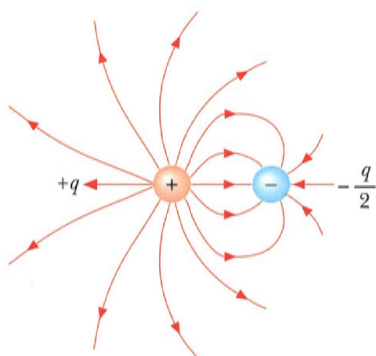


Figura 1.25

Linee di forza di un sistema di due cariche non uguali in modulo.

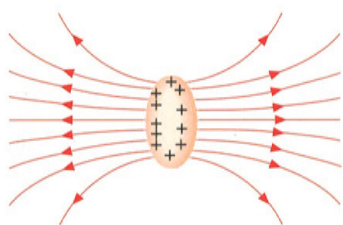


Figura 1.26

Linee di forza di un disco uniformemente carico.

- le linee di forza si addensano dove l'intensità del campo elettrostatico è maggiore;
- le linee di forza non si incrociano mai, in quanto in ogni punto il campo elettrostatico è definito univocamente e non può avere due direzioni distinte;
- le linee di forza hanno origine dalle cariche positive e terminano sulle cariche negative; qualora ci siano solo cariche di uno stesso segno le linee di forza si chiudono all'infinito.

Nel caso di cariche di segno opposto, ma eguali in modulo, figura 1.24a, tutte le linee che partono dalle cariche positive si chiudono su quelle negative, alcune passando eventualmente per l'infinito; se le cariche sono dello stesso segno, come in figura 1.24b, tutte le linee che provengono dalle cariche si chiudono all'infinito; se invece le cariche non sono eguali in modulo, alcune linee terminano o provengono dall'infinito, come in figura 1.25 (+q, -q/2).

Un **campo elettrostatico uniforme** è rappresentato da linee parallele (costanza di direzione e verso) ed equidistanti (costanza del modulo). Tali sono le linee del campo elettrostatico di un piano indefinito uniformemente carico, figura 1.21, mentre nel caso dei due piani dell'esempio 1.8 le linee hanno questo andamento solo nell'intercapedine (figura 1.22).

Nella figura 1.26 sono mostrate le linee di forza relative al disco carico, esempio 1.7.

1.7

MOTO DI UNA CARICA IN UN CAMPO ELETTROSTATICO

Supponiamo di immettere una carica q di piccole dimensioni, *puntiforme*, in una zona di spazio in cui esiste un campo elettrostatico generato da un sistema di cariche ferme, che non vengono perturbate in alcun modo dalla presenza della carica. Questa, di massa m , è sottoposta alla forza (1.13) e la legge della dinamica di Newton, in condizioni non relativistiche, si scrive

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\vec{E} \quad (1.21)$$

Integrando la (1.21) si determinano posizione e velocità della carica, note posizione e velocità iniziali.

Se $\mathbf{E}$ è uniforme (costante in modulo e in direzione) l'accelerazione $\mathbf{a}$ è una costante del moto. Se la carica q è positiva l'accelerazione sarà nel verso di $\mathbf{E}$, se la carica q è negativa sarà nel verso opposto.

ESEMPIO 1.9 Moto di una carica in campo elettrostatico uniforme

Una carica puntiforme q di massa m è lasciata libera in quiete nella posizione $x = 0$ in una regione in cui esiste un campo elettrostatico uniforme $\mathbf{E}$ parallelo e concorde all'asse x , figura 1.27. Descrivere il moto della carica.

Soluzione In un campo uniforme l'accelerazione è costante; se la velocità iniziale è diretta lungo l'asse x il moto della carica è rettilineo uniformemente accelerato con equazioni per lo spazio e la velocità date da

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 ,$$

$$v(t) = v_0 + a t ,$$

$$v^2(x) = v_0^2 + 2 a (x - x_0) ;$$

come si è detto, $a = qE/m$ è concorde al campo elettrostatico $\mathbf{E}$ se la carica è positiva, discorde se è negativa. In particolare per $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$

$$x(t) = \frac{qE}{2m} t^2 , \quad v(t) = \frac{qE}{m} t , \quad v^2(x) = \frac{2qE}{m} x .$$

Se invece la velocità iniziale forma un certo angolo con l'asse x , il moto ha una componente uniformemente accelerata lungo l'asse x e una componente uniforme ortogonalmente all'asse x per cui la traiettoria è una parabola, come vedremo esplicitamente nell'esempio 2.4.

La variazione di energia cinetica della particella è in ogni caso:

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \frac{1}{2} m v^2(x) - \frac{1}{2} m v_0^2 = m a (x - x_0) \\ &= q E (x - x_0) = F(x - x_0) , \end{aligned}$$

pari al lavoro della forza (costante), come deve essere; si osservi che ΔE_k non dipende dalla massa della carica (ma la velocità sì).

Nel caso proposto la carica positiva parte dalla posizione $x = 0$ e arriva nella posizione x dopo un tempo $t = \sqrt{2 m x / q E}$ con velocità $v = \sqrt{2 q E x / m}$ ed energia cinetica $q E x$. Se mettiamo una particella di eguale massa ed eguale carica, ma ne-

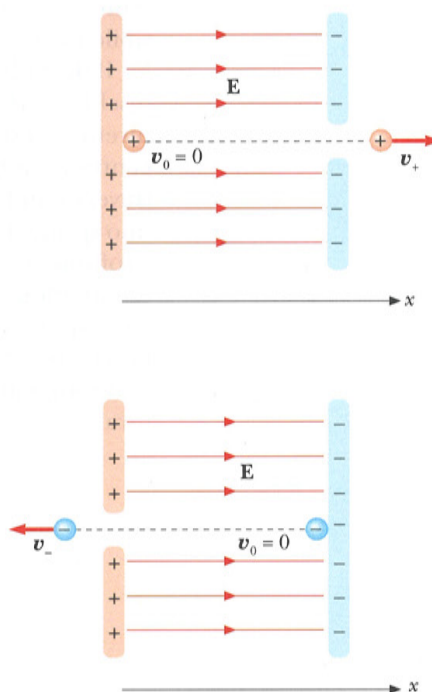


Figura 1.27

gativa, con velocità nulla nella posizione x , essa arriva nell'origine nello stesso tempo e con la stessa velocità in modulo; anche l'energia cinetica è la stessa e in effetti il lavoro della forza elettrica è lo stesso nei due casi (se q avesse avuto velocità iniziale v_0 , $-q$ avrebbe dovuto avere $-v_0$).

Si tratta del caso particolare di un fatto generale, che è contenuto in (1.21): un campo accelerante per una data carica q è decelerante per una carica $-q$ con le stesse condizioni iniziali, ma è accelerante per una carica $-q$ che si muova in verso opposto, figura 1.27. Una volta che è stata determinata la traiettoria di una particella con carica positiva in un certo campo elettrostatico, quella stessa traiettoria può essere percorsa in verso opposto e con la stessa velocità da una particella con la stessa massa e carica opposta, purché si scelgano opportunamente le condizioni iniziali.

L'esempio appena visto dimostra l'utilizzazione dei campi elettrostatici per accelerare particelle cariche; storicamente questo è stato il primo metodo funzionante. Torneremo sull'argomento nei capitoli successivi.

Lavoro elettrico. Potenziale elettrostatico

capitolo 2

2.1 LAVORO DELLA FORZA ELETTRICA. TENSIONE, POTENZIALE

La formula (1.13), che esprime la forza subita da una carica q_0 in un campo elettrostatico, è valida quando le cariche che generano il campo sono fisse e costanti e la carica q_0 è a sua volta fissa oppure si muove senza però perturbare la distribuzione delle cariche sorgenti. Il termine *elettrostatico* è utilizzato proprio per evidenziare questa situazione di immutabilità.

Più in generale, quando su una carica q_0 agisce una forza $\mathbf{F}$ di qualsiasi natura, non necessariamente elettrostatica, ma ad esempio dovuta a processi chimici o ad azioni meccaniche, o ad altre cause ancora, possiamo definire sempre un campo elettrico $\mathbf{E}$, che si indica anche col nome di **campo elettromotore**, come rapporto tra la forza $\mathbf{F}$ che agisce sulla carica e il valore della carica stessa:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \Rightarrow \mathbf{F} = q_0 \mathbf{E} . \quad (2.1)$$

Alla (2.1) si dà carattere generale, per cui:

la forza che agisce su una carica elettrica, che come tale prende il nome di forza elettrica, si esprime sempre come prodotto della carica per un certo campo elettrico.

Richiamando un concetto introdotto nel paragrafo 4.1 del volume I, il lavoro della forza $\mathbf{F}$ per uno spostamento elementare $d\mathbf{s}$ della carica q_0 , figura 2.1, è dato da:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q_0 E \cos\theta \, ds = q_0 E_s \, ds , \quad (2.2)$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz = F \cos\theta \, ds \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

dove θ è l'angolo tra il campo elettrico $\mathbf{E}$ e lo spostamento $d\mathbf{s}$ e E_s la componente di $\mathbf{E}$ lungo $d\mathbf{s}$.

Per uno spostamento finito dalla posizione A alla posizione B lungo un percorso C_1 il lavoro si ottiene suddividendo il percorso in una serie infinita di segmenti infinitesimi $d\mathbf{s}_i$, figura 2.2a, calcolando per ognuno di essi il lavoro $dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = q_0 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s}_i$, e sommando tutti i contributi $W = \sum_i dW_i$. Dal momento che il numero di termini è infinito, tale somma diventa

$$W_1 = \int_{A \rightarrow B} dW_1 = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.3)$$

dove $d\mathbf{s}$ è un vettore elementare *tangente* alla curva, figura 2.2b, e l'ultimo integrale è l'*integrale di linea* del campo $\mathbf{E}$ lungo C_1 (si veda l'appendice A del primo volume). Questo integrale, ovvero il rapporto W_1/q_0 tra il lavoro compiuto dalla forza $\mathbf{F}$ nello

Campo elettromotore

$$d\vec{s} = (dx, dy, dz)$$

$$= \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$$

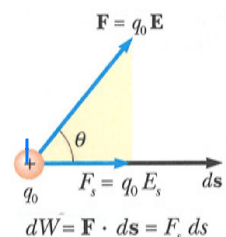
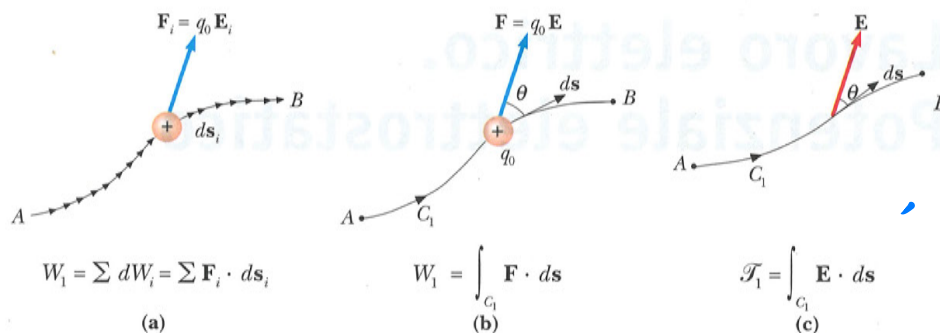


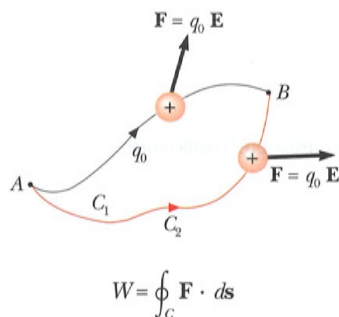
Figura 2.1

Lavoro della forza elettrica per uno spostamento elementare.

**Figura 2.2**

Lavoro della forza elettrica per lo spostamento lungo una linea spezzata (a), lungo una linea continua (b) e *tensione* del campo elettrico tra due punti A e B (c).

Tensione elettrica

**Figura 2.3**

Lavoro della forza elettrica per lo spostamento lungo una traiettoria chiusa.

**Figura 2.4**

Forza elettromotrice $\mathcal{E}$ del campo elettrico.

Forza elettromotrice (f.e.m.)

spostamento della carica q_0 da A a B lungo il percorso C_1 , figura 2.2c, e il valore della carica, definisce la **tensione elettrica** tra i due punti A e B relativa al percorso C_1 :

$$\mathcal{T}_1 (A \rightarrow B \text{ lungo } C_1) = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.4)$$

Se si considera, come in figura 2.3, un altro percorso C_2 si trova in generale un lavoro diverso e quindi un *diverso valore della tensione elettrica*, pur essendo i punti A e B gli stessi:

$$\mathcal{T}_1 (A \rightarrow B \text{ lungo } C_1) \neq \mathcal{T}_2 (A \rightarrow B \text{ lungo } C_2) .$$

Per un percorso chiuso C, figura 2.4, composto ad esempio dal percorso C_1 da A a B e dal percorso $-C_2$ da B ad A, il lavoro risulta

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = W_1 - W_2 ,$$

$\int_A^B dx = B - A = - \int_B^A dx$

in cui abbiamo sfruttato la proprietà dell'integrale di linea di cambiare soltanto di segno se cambia il verso di percorrenza lungo la linea e utilizzato il simbolo $\oint$ per indicare che il percorso è chiuso (ricordiamo che in questo caso l'integrale di linea si chiama anche *circuitazione*). Vediamo che *in generale il lavoro per un percorso chiuso è diverso da zero*. Inseriamo (2.1):

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \stackrel{\text{definizione}}{=} q_0 (\mathcal{E}) . \quad (2.5)$$

Il lavoro per spostare una carica lungo il percorso chiuso C è dato dal prodotto della carica per la circuitazione del campo elettrico lungo C. L'integrale

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.6)$$

che esprime il rapporto tra lavoro compiuto sulla carica e la carica stessa per lo spostamento C si definisce **forza elettromotrice (f.e.m. del campo elettrico)** relativa al percorso chiuso C. Essa è in generale diversa da zero e dipende dalle carat-

teristiche del campo e dal percorso C scelto, ma *non* dalla carica q_0 ; malgrado il nome improprio, si tenga ben presente che $\mathcal{E}$ *non è una forza*.

Abbiamo visto in meccanica che esiste una categoria di **forze**, dette **conservative**, per le quali il lavoro compiuto nello spostamento di un punto da A a B è funzione soltanto della posizione di partenza e di quella di arrivo e non del cammino seguito:

$$W(C_1) = \dots = W(C_i) = \dots = W(C_n) ,$$

qualunque sia C_i purché inizi in A e finisca in B . Ne deriva che il **lavoro lungo un qualsiasi percorso chiuso è nullo, ovvero che la circuitazione di una forza conservativa è nulla**.

Non si verifica in natura che qualsiasi forza elettrica sia conservativa; questo è però il caso delle forze elettrostatiche, come dimostreremo nel paragrafo 2.2, e il risultato si esprime anche dicendo che *il campo elettrostatico è conservativo*. Non dipendendo dal percorso effettivamente seguito l'integrale che compare nella (2.3) può sempre essere espresso come differenza dei valori di una funzione delle coordinate, chiamata *potenziale elettrostatico*:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} . \quad (2.7)$$

In realtà è la **differenza di potenziale (d.d.p.) elettrostatico** tra il punto B e il punto A ad essere definita da (2.7) e ciò vuol dire che il potenziale elettrostatico in un punto è determinato a meno di una costante additiva. Inserendo (2.7) in (2.3)

$$W_{AB} = -q_0 (V_B - V_A) = -q_0 \Delta V : \quad (2.8)$$

il lavoro svolto dalla forza elettrostatica per portare q_0 da A a B è dato dall'opposto del prodotto di q_0 per la differenza di potenziale ($V_B - V_A$) tra il punto di arrivo e il punto di partenza.

Ricordiamo che ad ogni forza conservativa è associata una determinata *energia potenziale* e che *il lavoro della forza conservativa è pari all'opposto della variazione della corrispondente energia potenziale*. Nel caso elettrostatico abbiamo pertanto

$$W_{AB} = -\Delta U_e = -[U_e(B) - U_e(A)]$$

e dal confronto con (2.8) segue l'eguaglianza:

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V . \quad (2.9)$$

La U_e prende il nome di **energia potenziale elettrostatica**, risulta proporzionale al potenziale elettrostatico e anch'essa definita a meno di una costante additiva.

Notiamo esplicitamente l'uso del simbolo U_e per l'energia potenziale elettrostatica al posto del simbolo E_p , introdotto nello studio della meccanica. La scelta è motivata dall'opportunità di evitare confusione con il simbolo del campo elettrostatico. Notiamo anche che il segno negativo nella (2.7) deriva dal segno negativo della relazione tra lavoro e variazione di energia potenziale.

Dalle (2.5, 2.6, 2.7, 2.8) segue che per un qualsiasi percorso chiuso nella regione in cui è definito il campo elettrostatico $\mathbf{E}$, essendo la differenza di potenziale nulla in quanto $A \equiv B$, valgono le relazioni

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 , \quad W = q_0 \mathcal{E} = 0 . \quad (2.10)$$

Forze conservative

Differenza di potenziale (d.d.p.)

Energia potenziale elettrostatica