

LEZIONE 6

5.03.2026

Campo elettrostatico generato da una distribuzione continua di cariche

Esercizi: anello e disco uniformemente carichi. Campo elettrostatico tra due piani indefiniti uniformemente carichi.

1.5

CAMPO ELETTROSTATICO PRODOTTO DA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICHE

Abbiamo già rilevato che le cariche di interesse nei problemi elettrostatici corrispondono a un numero molto grande di cariche elementari; inoltre nella maggior parte dei casi pratici queste cariche non sono concentrate in un unico punto, o in una regione estremamente ristretta, ma sono distribuite nello spazio con una ben determinata geometria.

Tali distribuzioni spaziali di carica sono naturalmente sorgenti di un campo elettrostatico: nelle normali applicazioni non si è interessati tanto alla conoscenza del **campo elettrostatico locale** che esiste in prossimità di ciascuna carica, campo che d'altra parte non sarebbe né calcolabile, per l'elevato numero di contributi tipo (1.11), né rilevabile sperimentalmente, quanto piuttosto al **campo elettrostatico medio** nei punti distanti dalle cariche, punti dai quali la distribuzione di carica è vista come una **distribuzione continua**. La distanza in questione, che può essere anche piccola dal punto di vista macroscopico, deve essere molto grande rispetto alla distanza media tra le cariche elementari, che è dell'ordine di 10^{-10} m.

Se la distribuzione di carica è continua il campo elettrostatico che essa crea in un punto P si può ottenere dividendo, figura 1.18, la carica in elementi infinitesimi dq . Il campo elettrostatico prodotto da dq in un punto P distante r' si scrive utilizzando (1.11) in quanto dq è approssimabile, per questo calcolo, ad una carica puntiforme:

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{u}',$$

con $\mathbf{u}'$ versore della direzione orientata che va da dq a P . Il campo elettrostatico risultante in P si calcola come in (1.12) ricorrendo al principio di sovrapposizione; poiché la somma è estesa ad un numero infinito di contributi infinitesimi, essa si riduce ad un integrale vettoriale esteso a tutta la distribuzione continua:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r'^2} \mathbf{u}'. \quad (1.14)$$

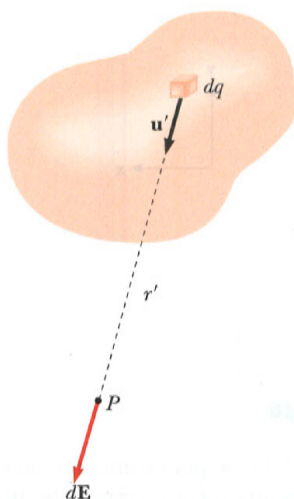


Figura 1.18

Campo elettrostatico prodotto da un elemento di una distribuzione di carica continua.

Per chiarire il significato di questa formula, negli esempi 1.6, 1.7, 1.8 la applichiamo ad alcune distribuzioni di carica, caratterizzate da un *elevato grado di simmetria*, il che corrisponde, come si vedrà, a facilità d'integrazione.

ESEMPIO 1.6 Campo elettrostatico di un anello carico

Una carica q è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio R . Calcolare il campo elettrostatico $\mathbf{E}$ sull'asse dell'anello.

Soluzione Si può definire una **densità lineare di carica** $\lambda = q/2\pi R$, costante sull'anello, per cui ciascun elemento dl di anello ha una carica infinitesima $dq = \lambda dl$. La densità lineare di carica si misura in C/m.

Considerati come in figura 1.19 due elementi dl di anello, diametralmente opposti, nei punti dell'asse si ha che le com-

ponenti lungo l'asse dei campi elettrostatici elementari $d\mathbf{E}$ dovuti alle due cariche sono uguali e concordi, mentre quelle perpendicolari si elidono. Il campo elettrostatico risultante nei punti dell'asse è parallelo all'asse e si calcola integrando la componente x di ciascun elemento dl :

$$dE_x(x) = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta.$$

Al variare della posizione di dl sull'anello tutti i termini di questa espressione restano costanti e quindi

le (1.14) segue integrando $d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{u}'$

$$x = \int_0^x dx' = (x' + c) \Big|_0^x \\ = \underbrace{x + c - c}_x$$

In proposito, si noti che $\vec{E} = \int_{\vec{0}}^{\vec{E}} d\vec{E}'$, dove $\vec{0} = (0,0,0)$ è il vettore nullo. Tale relazione è l'analogo vettoriale dell'ovvia relazione $x = \int_0^x dx'$. In particolare, si ha

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = \left(\int_0^{E_x} dE'_x, \int_0^{E_y} dE'_y, \int_0^{E_z} dE'_z \right) = \int_{\vec{0}}^{\vec{E}} d\vec{E}'$$

DENSITÀ DI CARICA

Ci sono tre tipi di densità di carica

Lineare $\lambda = \frac{dq}{dl} \quad dq = \lambda dl \quad q = \int_a^b dl \lambda$

Superficiale $\sigma = \frac{dq}{d\Sigma} \quad dq = \sigma d\Sigma \quad q = \int_{\Sigma} d\Sigma \sigma$

Volumetrica $\rho = \frac{dq}{dV} \quad dq = \rho dV \quad q = \int_V dV \rho$

CASO DI DENSITÀ UNIFORME

$$q = \int_a^b dl \lambda = \lambda \int_a^b dl = \lambda (b-a)$$

↑
se λ non dipende da l

$$q = \int_{\Sigma} d\Sigma \sigma = \sigma \int_{\Sigma} d\Sigma = \sigma \text{Area}(\Sigma)$$

↑
se σ non dipende da Σ

$$q = \int_V dV g = g \int_V dV = g \text{Vol}(V)$$

↑
se g non dipende da V

N.B. Abbiamo utilizzato la seguente proprietà generale degli integrali

Se l'integrando è 1, allora l'integrale è uguale alla lunghezza del segmento (in $d=1$), all'area della superficie (in $d=2$), al volume (in $d=3$). Questa proprietà si generalizza a qualsiasi dimensione.

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\lambda \cos \theta \mathbf{u}_x}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\lambda \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} 2 \pi R \mathbf{u}_x$$

Siccome $r^2 = R^2 + x^2$ e $\cos \theta = x / \sqrt{R^2 + x^2}$,

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\lambda R}{2 \epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x \quad (1.15)$$

Il campo elettrostatico è parallelo e concorde all'asse dell'anello, così come orientato in figura, per $x > 0$, è parallelo e discorde per $x < 0$ ed è nullo nel centro dell'anello, dove tutti i contributi elementari si elidono.

Nei punti a grande distanza dal centro ($x \gg R$)

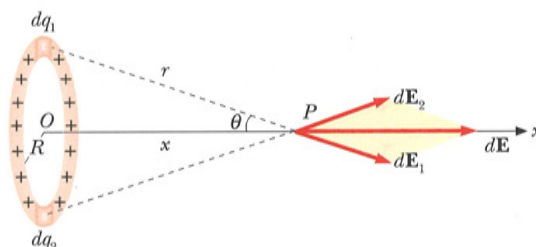


Figura 1.19

$$\mathbf{E}(x \gg R) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 x^2} \mathbf{u}_x$$

concorde all'asse a destra e discorde a sinistra, come se la carica fosse concentrata nel centro dell'anello; non si distingue più, in questa situazione, la struttura della distribuzione.

ESEMPIO 1.7 Campo elettrostatico di un disco carico

Un disco sottile di raggio R ha una carica q distribuita uniformemente su tutta la sua superficie. Calcolare il campo elettrostatico $\mathbf{E}$ sull'asse del disco. Estendere il risultato al caso in cui R tende all'infinito (piano uniformemente carico).

Soluzione In questo caso si definisce una **densità superficiale** di carica $\sigma = q / \pi R^2$, costante su tutto il disco, per cui su ciascun elemento di superficie $d\Sigma$ c'è una carica $dq = \sigma d\Sigma$. La densità superficiale di carica si misura in C/m^2 .

Isoliamo idealmente, come in figura 1.20, una corona circolare compresa tra r e $r + dr$, assimilabile a un anello, di superficie $d\Sigma = 2 \pi r dr$ e carica $dq = \sigma d\Sigma = 2 \pi \sigma r dr$. Questa distribuzione anulare produce sull'asse, a distanza x dal centro, il campo elettrostatico dato da (1.15):

$$\begin{aligned} d\mathbf{E}(x) &= \frac{\sigma x}{2 \epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x \\ &= \frac{q x}{2 \pi \epsilon_0 R^2} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x \quad (*) \end{aligned}$$

Il campo elettrostatico risultante si ottiene sommando i contributi degli infiniti anelli che compongono il disco, cioè integrando l'espressione precedente per r che varia da 0 a R (e x costante):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \frac{\sigma x \mathbf{u}_x}{2 \epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{u}_x \end{aligned}$$

Questa è l'espressione del campo per $x > 0$, dove esso è parallelo e concorde all'asse; per $x < 0$ il modulo è lo stesso, cambia solo il verso, per cui scriviamo in generale

$$\begin{aligned} \Sigma &= \pi r^2 \\ d\Sigma &= \frac{d\Sigma}{dr} dr \\ &= 2\pi r dr \end{aligned}$$

1.15:

$$d\mathbf{E}(x) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(r^2+x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x$$

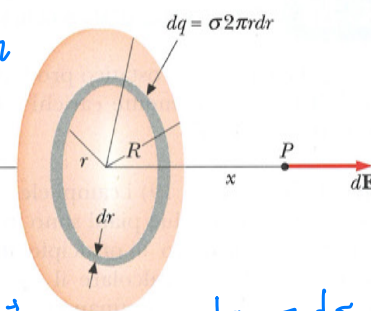


Figura 1.20

$$\begin{aligned} dq &= \sigma d\Sigma \\ &= 2\pi\sigma r dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \pm \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{u}_x \\ &= \pm \frac{q}{2 \pi \epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{u}_x \quad (1.16) \end{aligned}$$

Il segno positivo vale per $x > 0$, quello negativo per $x < 0$. Lasciamo come esercizio (problema 2.19) la verifica che per grandi distanze ($x \gg R$) il disco è visto come una carica puntiforme q posta nel centro.

Quando x tende a zero i limiti destro e sinistro del campo sono diversi e valgono rispettivamente

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{E}_- = -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \mathbf{u}_x \quad (1.17)$$

Nell'attraversamento della superficie carica con densità σ il campo elettrostatico subisce la discontinuità

la versione infinitesimo di

$$\vec{E}(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{u}_x$$

e

$$d\vec{E}(x) = \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \vec{u}_x \quad (1)$$

Nel presente caso $R \rightarrow r$: consideriamo il disco come unione di infiniti anelli di raggio diverso.

Poiché $\sigma = \frac{dq}{d\Sigma}$, si ha $dq = \sigma d\Sigma$

← area disco di raggio r

D'altronde $\Sigma(r) = \pi r^2$, per cui

$$d\Sigma = \frac{d\Sigma}{dr} dr = 2\pi r dr,$$

quindi

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

e la 1) diventa

$$d\vec{E}(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \vec{u}_x$$

che, utilizzando $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$, è equivalente a

$$d\vec{E}(x) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \frac{x r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \vec{u}_x$$

che è la (*).

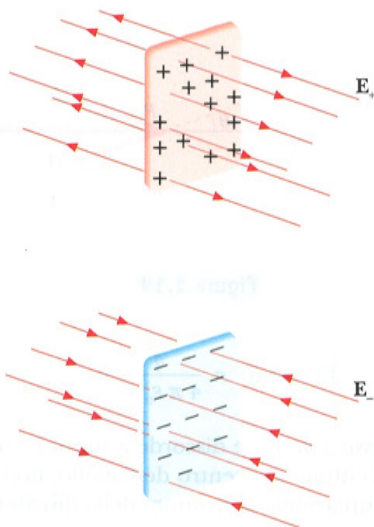


Figura 1.21

$$\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x \quad (1.18)$$

Se ora facciamo tendere R all'infinito, mantenendo σ costante, otteniamo un **piano indefinito uniformemente carico**, come in figura 1.21; il campo elettrostatico, calcolato passando al limite in (1.16), vale

$$\mathbf{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x \quad (1.19)$$

ed è ortogonale al piano, uscente da esso e costante in ogni punto dello spazio ovvero, come si dice, *uniforme*. Esso è discontinuo nel passaggio da una parte all'altra del piano, con discontinuità (1.18).

Nella pratica si ha localmente una situazione tipo piano indefinito quando ci si mette molto vicini ad una superficie carica.

ESEMPIO 1.8 Campo elettrostatico di due piani indefiniti carichi

Calcolare il campo elettrostatico prodotto da due piani indefiniti paralleli uniformemente carichi con **densità superficiale** l'uno $+\sigma$ e l'altro $-\sigma$.

Soluzione In base alla (1.19) i campi elettrostatici $\mathbf{E}_+$ e $\mathbf{E}_-$ generati separatamente dai due piani sono in modulo entrambi eguali a $\sigma/2\epsilon_0$. Utilizzando il principio di sovrapposizione, come in figura 1.22, per calcolare il campo risultante $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$ si vede che i campi si sommano nella regione compresa tra i due piani e si annullano all'esterno. All'interno, per $x_1 < x < x_2$, il campo elettrostatico vale

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x \quad (1.20)$$

mentre è nullo per $x < x_1$ e $x > x_2$. In x_1 e x_2 si hanno le discontinuità $+\sigma/\epsilon_0$ e $-\sigma/\epsilon_0$ rispettivamente.

La disposizione geometrica descritta è utilizzata per ottenere un campo approssimativamente uniforme in una regione limitata tra due superficie piane finite: l'approssimazione è tanto migliore quanto minore è la distanza tra le superficie rispetto alle loro dimensioni; in ogni caso ci si avvicina di più all'uniformità nella zona centrale.

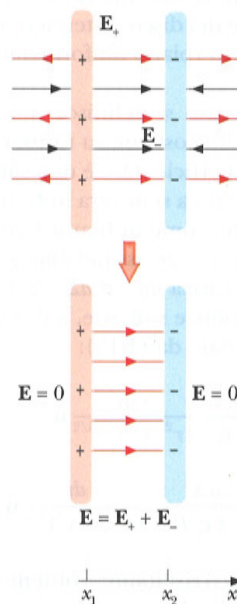


Figura 1.22

I risultati ottenuti negli esempi 1.6, 1.7 valgono per distribuzioni di carica positiva; se la carica fosse negativa cambierebbe soltanto il verso del campo, che diventerebbe entrante verso le cariche invece che uscente, come si è visto nell'esempio 1.8.

Una caratteristica comune degli esempi mostrati è che le *distribuzioni di carica* sono *uniformi*. Questa scelta è stata fatta per ragioni di semplicità analitica, ma nella pratica non è realizzabile facilmente, se non con particolari geometrie.