

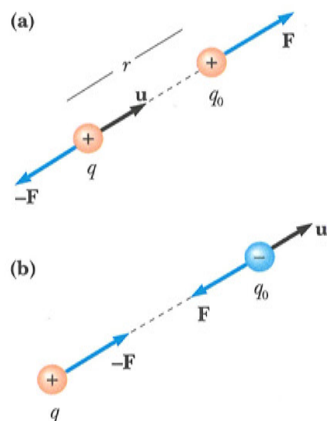
# LEZIONE 5

4.03.2026

CAMPO ELETTROSTATICO

DISTRIBUZIONE DI CARICA

ESERCIZI

**Figura 1.10**

Rappresentazione vettoriale della legge di Coulomb.

### Forma vettoriale della legge di Coulomb

La legge (1.5) deve essere scritta in termini vettoriali, trattandosi dell'espressione di una forza. Abbiamo già detto che la direzione della forza è quella della retta congiungente le due cariche puntiformi; cambiando simboli rispetto a (1.5) chiamiamo  $q$  la carica  $q_1$  e  $q_0$  la carica  $q_2$  e indichiamo con  $\mathbf{u}$  il versore del vettore  $\mathbf{r}$  che va da  $q$  a  $q_0$ , cioè il versore uscente da  $q$ . La forza che la carica  $q$  esercita sulla carica  $q_0$  assume la forma

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \mathbf{u} \quad (1.7)$$

Se  $q$  e  $q_0$  hanno lo stesso segno ( $q q_0 > 0$ ), la forza ha lo stesso verso di  $\mathbf{u}$ , è cioè *repulsiva*, figura 1.8a; se invece  $q$  e  $q_0$  hanno segno opposto ( $q q_0 < 0$ )  $\mathbf{F}$  ha verso opposto ad  $\mathbf{u}$ , è *attrattiva*, figura 1.8b. In accordo con il principio di azione e reazione la forza che  $q_0$  esercita su  $q$  è  $-\mathbf{F}$ .

### ESEMPIO 1.3 Misura della carica elettrica

Una sferetta conduttrice molto leggera, figura 1.11, di massa  $m = 2 \cdot 10^{-3}$  kg, possiede una carica  $q_0 = 2 \cdot 10^{-9}$  C ed è sospesa ad un filo lungo  $l$ . Una seconda sferetta conduttrice con una carica  $q = 5 \cdot 10^{-7}$  C viene avvicinata a  $q_0$ . Quando la distanza tra i centri di  $q$  e  $q_0$  vale  $r = 5$  cm l'angolo che il filo forma con la verticale vale  $\theta$ . Calcolare  $\theta$ .

**Soluzione** All'equilibrio abbiamo la situazione indicata in figura 1.11: la risultante  $\mathbf{R}$  della forza peso e della forza elettrostatica agenti su  $q_0$  è diretta lungo il filo ed è bilanciata dalla tensione del filo stesso. Quindi

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{F_e}{F_g} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2 m g} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{25 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8} \\ &= 0.1837 \Rightarrow \theta \approx 10.41^\circ; \end{aligned}$$

con l'approssimazione  $\theta = \tan \theta$  risulta  $\theta \approx 10.53^\circ$ . Pertanto, finché l'angolo è piuttosto piccolo, diciamo inferiore a  $10^\circ = 0.1745$  rad, possiamo scrivere

$$\theta = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 m g r^2},$$

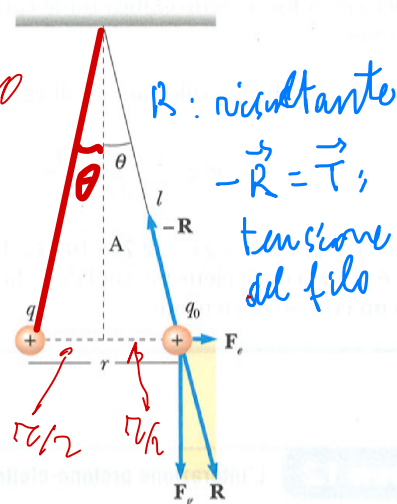
in cui l'angolo è espresso in radianti. La relazione tra l'angolo di deviazione della carica  $q_0$  e il valore della carica che provoca la deviazione è lineare, a parità di distanza. L'angolo  $\theta$  può essere dedotto dallo spostamento  $d = r/2 = l\theta$  della carica  $q_0$ .

Sulla base di quanto descritto si può costruire uno stru-

*non è necessario che sia conduttrice*

*rispetto a cose?*

*$\theta$  = valore dell'equilibrio*

**Figura 1.11**

mento per confrontare tra loro due cariche e quindi misurare una rispetto all'altra nota; una misura assoluta di carica può essere fatta se è nota  $q_0$ , che potrebbe essere determinata con il medesimo strumento ponendo  $q = q_0$ .

La sensibilità non è elevata: se si apprezza il decimo di grado ( $0.1^\circ = 1.75 \cdot 10^{-3}$  rad) si commette un errore relativo superiore all'1%, che per una carica di  $10^{-7}$  C vuol dire  $10^{-9}$  C. Di questo ordine di grandezza è anche il valore minimo di carica che in pratica si può pensare di misurare.

Precisazioni sull'esempio 1.3 del testo di Moraldi, Nigro e Voci.

Nell'esempio è sottinteso che l'angolo  $\theta$  è quello che si ha all'equilibrio. Inoltre la configurazione da considerare è quella riportata in figura e non menzionata nel testo, ovvero considerare la cricca  $q$  a distanza  $\pi/2$  dalla verticale. Va anche precisato che la cricca  $q$  deve essere soggetta ad una forza  $-\vec{R} = -\vec{F}_G - \vec{F}_e$ , cioè opposta alla risultante della forza gravitazionale e di quella elettrostatica. Di fatto è didatticamente più istruttivo

risolvere l'esempio 1.4 con la modifica della carica sulla destra, da  $q$  a  $q_0$ . La soluzione di 1.4 segue ponendo  $q_0 = q$ .

È utile osservare che cambiando il valore della carica a destra, da  $q$  a  $q_0$ , non cambia il fatto che la configurazione è simmetrica: i due angoli al vertice sono uguali in quanto l'intensità delle forze elettrostatiche a cui sono soggetti le due cariche è la stessa (in principio delle dinamiche).

**ESEMPIO 1.4** Misura della carica elettrica. Elettroscopio

Due sferette conduttrici eguali, di massa  $m$  e carica  $q$ , sono sospese ciascuna ad un filo lungo  $l$ ; in equilibrio i fili sono disposti simmetricamente rispetto alla verticale, ciascuno ad angolo  $\theta$ . Calcolare la relazione esistente tra  $q$  e  $\theta$  ed estendere il risultato all'equilibrio delle foglie di un elettroscopio.

**Soluzione** La distanza tra le cariche in equilibrio è  $r = 2l \sin \theta$ ; come abbiamo visto nell'esempio 1.3, ciascuna carica sta in equilibrio all'angolo  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{F_e}{F_g} = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 m g (2 l \sin \theta)^2} \\ \Rightarrow q &= 2 l \sin \theta \sqrt{4 \pi \epsilon_0 m g \tan \theta} \end{aligned}$$

La relazione tra  $q$  e  $\theta$  non è lineare, nemmeno nell'approssimazione di angoli piccoli ( $q \sim \theta^{3/2}$ ).

Il risultato può essere esteso, in prima approssimazione, alle foglie di un elettroscopio, figura 1.12, se si immagina che

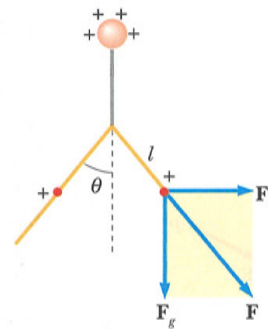


Figura 1.12

la carica di ciascuna foglia sia concentrata nel centro, a distanza  $l$  dal punto di sospensione (in realtà la carica si distribuisce su tutta la superficie della foglia).

**1.4 CAMPO ELETTRISTICO**

Le forze elettriche agenti su una carica  $q_0$  dovute alle cariche circostanti si sommano come vettori: vige cioè il **principio di sovrapposizione**, detto anche *principio di indipendenza delle forze simultanee*, che esemplifichiamo nel caso più semplice.

Consideriamo, figura 1.13, tre cariche puntiformi, fisse in un sistema di riferimento inerziale,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_0$ . La carica  $q_1$  esercita la forza  $\mathbf{F}_1$  su  $q_0$  e la carica  $q_2$  esercita la forza  $\mathbf{F}_2$ ; quando entrambe le cariche sono presenti, la forza  $\mathbf{F}$  su  $q_0$  è data dalla somma vettoriale di  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$ . Per ciascuna forza vale una formula tipo (1.7); se indichiamo con  $r_1$  e  $r_2$  rispettivamente la distanza da  $q_1$  a  $q_0$  e da  $q_2$  a  $q_0$  e con  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  i relativi versori, usciti dalle cariche, possiamo scrivere

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r_1^2} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_2 q_0}{r_2^2} \mathbf{u}_2 \quad (1.8)$$

La forza elettrostatica su una carica puntiforme  $q_0$ , risultante delle forze esercitate da un sistema discreto di cariche puntiformi  $q_i$ , si ottiene generalizzando (1.8) con ovvio significato dei simboli:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_i q_0}{r_i^2} \mathbf{u}_i = q_0 \sum_i \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i \quad (1.9)$$

Questi risultati sono verificati sperimentalmente e confermano il carattere vettoriale della legge (1.7).

Nella (1.9) abbiamo messo in evidenza che la forza risultante esercitata su  $q_0$  è proporzionale a  $q_0$ . La grandezza vettoriale

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (1.10)$$

viene chiamata **campo elettrostatico**. Più precisamente:

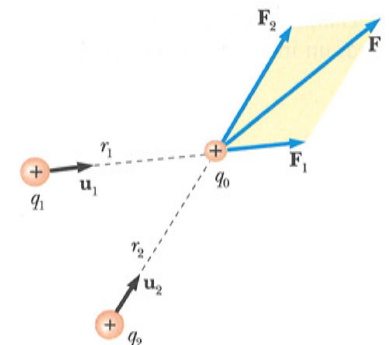
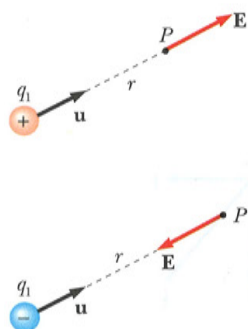
**Principio di sovrapposizione**

Figura 1.13

Forza elettrostatica di due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$  sulla carica di prova  $q_0$ .

**Campo elettrostatico**

**Figura 1.14**

Campo elettrostatico prodotto da una carica puntiforme.

il campo elettrostatico prodotto in un punto  $P$  da un sistema di cariche ferme è definito come la forza elettrostatica risultante  $\mathbf{F}$  che agisce su una carica di prova  $q_0$  posta in  $P$  divisa per la carica  $q_0$  stessa.

Nei casi concreti la carica di prova  $q_0$  può perturbare la distribuzione originale, non potendo questa essere formata da cariche esattamente puntiformi, cioè prive di struttura. Se ad esempio le cariche  $q_i$  sono portate da sferette conduttrici,  $q_0$  può alterare la distribuzione della carica sulla superficie delle sferette tramite il fenomeno dell'induzione elettrostatica. Se invece le sferette che portano le  $q_i$  sono di materiale isolante,  $q_0$  non può spostare le cariche presenti sulle sferette, ma può tuttavia produrre dei microspostamenti locali tramite il fenomeno della polarizzazione dei dielettrici, che studieremo nel capitolo 4.

Da un punto di vista teorico la definizione (1.10) diventerebbe quindi più precisa se si facesse tendere a zero il valore di  $q_0$ , così da far scomparire la perturbazione prodotta da  $q_0$ . In pratica  $q_0$  deve essere molto piccola rispetto a ciascuna delle  $q_i$ .

In base a (1.10), (1.7) il campo elettrostatico prodotto da una carica puntiforme  $q_1$  nel punto  $P$  è dato, figura 1.14, da

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \mathbf{u}_1 \quad (1.11)$$

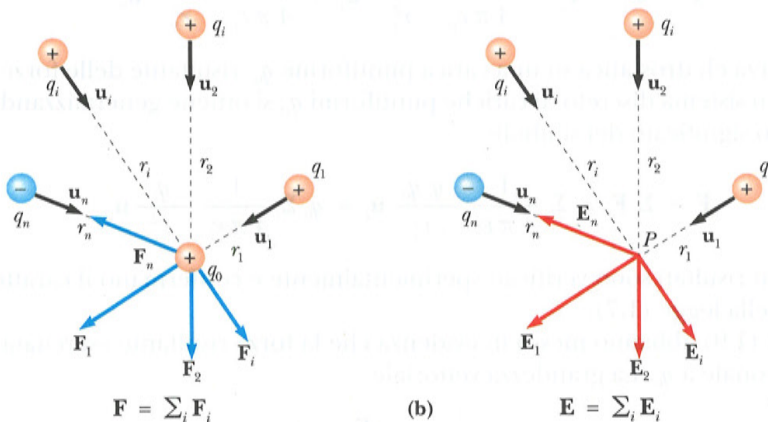
Da (1.11) si deduce che se la carica  $q_1$  è positiva il campo è uscente da  $q_1$ , mentre se la carica  $q_1$  è negativa il campo è entrante in  $q_1$ .

Analogamente, figura 1.15, si ottiene da (1.9) il campo elettrostatico generato da un sistema discreto di cariche puntiformi:

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i \quad (1.12)$$

Il campo elettrostatico in un punto  $P$  prodotto da un sistema discreto di cariche è uguale alla somma dei campi elettrostatici prodotti singolarmente dalle cariche.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = q_0 \mathbf{E}(x, y, z) \quad (1.13)$$

**Figura 1.15**

Forza elettrostatica di un sistema discreto di cariche puntiformi su una carica di prova  $q_0$  (a) e campo elettrostatico di un sistema discreto di cariche (b).

Campo elettrostatico di un insieme discreto di cariche

La (1.13) può essere interpretata dicendo che **il sistema di cariche è la sorgente del campo elettrostatico  $\mathbf{E}$** : la carica  $q_0$  interagisce con questo subendo la forza  $\mathbf{F}$ ; l'azione elettrica tra cariche, che è una azione a distanza, avviene, secondo questa descrizione, attraverso il campo. Del resto la stessa interpretazione viene data all'azione gravitazionale attraverso l'introduzione del campo gravitazionale  $\mathbf{G}$ , come è discusso nel paragrafo 11.4 del primo volume.

## UNITÀ DI MISURA

Nel sistema internazionale di unità di misura il **campo elettrostatico**, rapporto tra una forza e una carica, si misura in newton/coulomb (N/C). Vedremo in seguito un'unità di misura equivalente più utilizzata nella pratica. La stessa unità di misura vale, in generale, come vedremo nei capitoli successivi, per tutti i campi elettrici, anche di natura non elettrostatica.

### ESEMPIO 1.5 Forza elettrostatica in un sistema di tre cariche

Tre cariche positive eguali  $q_1 = q_2 = q_3 = q$  sono fisse nei vertici di un triangolo equilatero di lato  $l$ . Calcolare la forza elettrica agente su ognuna delle cariche e il campo elettrostatico nel centro del triangolo.

**Soluzione** Per calcolare la forza che agisce su una delle cariche, ad esempio su  $q_3$  di figura 1.16, calcoliamo i campi  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  prodotti da  $q_1$  e  $q_2$  nel punto  $P_3$  (la carica  $q_3$  funge da carica di prova). Essendo  $q_3$  equidistante da  $q_1$  e  $q_2$ , in modulo

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

I due campi elettrostatici sono disposti simmetricamente rispetto all'asse  $y$  e quindi le loro componenti lungo l'asse  $x$ , eguali ed opposte, si annullano nella somma; invece le componenti lungo l'asse  $y$ , eguali e concordi, sommandosi danno il modulo

$$E = E_{1,y} + E_{2,y} = \frac{2q \cos 30^\circ}{4\pi\epsilon_0 l^2} = \frac{q\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 l^2};$$

lo stesso risultato si può ottenere da

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos 60^\circ.$$

La forza  $\mathbf{F}$  che agisce su  $q_3 = q$  vale

$$\mathbf{F} = q_3 \mathbf{E} = \frac{q^2 \sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 l^2} \mathbf{u}_y.$$

Il vincolo che tiene ferma ciascuna carica deve esercitare una forza eguale e contraria.

Il centro  $C$  del triangolo equilatero è equidistante dai vertici, per cui i moduli dei campi elettrostatici  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  generati dalle tre cariche eguali nel centro sono eguali. I tre vettori sono disposti come i lati di un triangolo equilatero e quindi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = \mathbf{0},$$

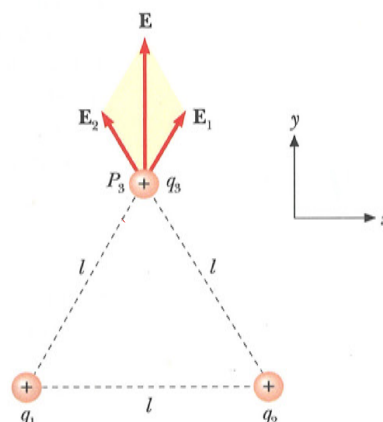


Figura 1.16

il campo nel centro è nullo, figura 1.17. Se ponessimo in  $C$  una carica, essa non risentirebbe di alcuna forza e resterebbe in equilibrio (instabile).

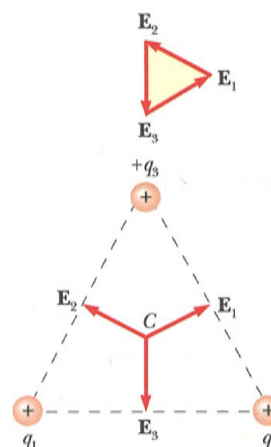
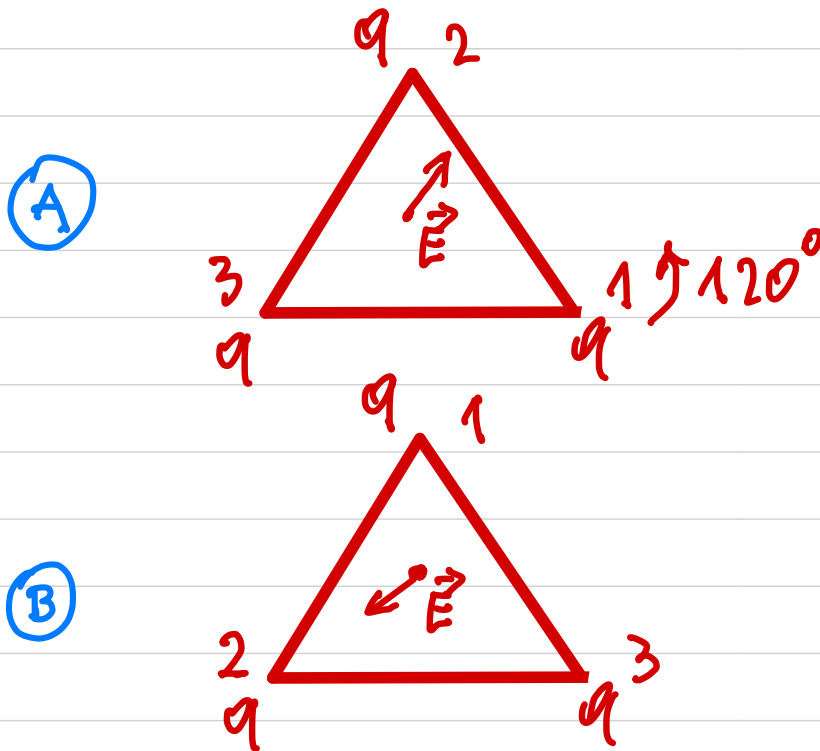


Figura 1.17

Il fatto che  $\vec{E} = \vec{0}$  nel centro del triangolo, lo si può dedurre immediatamente usando l'invarianza della configurazione di cariche per rotazioni multiple di  $120^\circ$  attorno al centro del triangolo.

Supponiamo che  $\vec{E} \neq \vec{0}$ . Quindi che ci debba essere una qualche direzione per  $\vec{E}$



Poiché (A) (B) hanno la stessa configurazione di cariche, ne segue che anche  $\vec{E}$  deve rimanere invariato. D'altronde, l'unico vettore invariante sotto una rotazione diversa da  $360^\circ$  è il vettore nullo, per cui  $\vec{E} = \vec{0}$ .