

FISICA GENERALE II PARTE

lezione 4 3.03.2026 11.30-13.30

RIPASSO NOZIONI BASE DI MATEMATICA

CARICHE ELETTRICHE, ISOLANTI E CONDUTTORI

PROPRIETÀ ELETTRICHE DELLA MATERIA

LEGGE DI COULOMB

RIDUZIONE DI CONFIGURAZIONI DI CARICHE
ELETTRICHE A PROBLEMI CON SIMMETRIA
SFERICA

ESEMPI

Logaritmo

$$a^b = c \quad \log_a c = b$$

$$\log_a(c_1 c_2) = ? \quad a^b = c_1 c_2$$

$$c_1 = a^{b_1}$$

$$c_2 = a^{b_2}$$

$$a^b = c_1 c_2 = a^{b_1} a^{b_2} = a^{b_1 + b_2}$$

$$\log_a(c_1 c_2) = \log_a a^{b_1} a^{b_2} = \log_a a^{b_1 + b_2} = b_1 + b_2$$

$$= b_1 (= \log_a a^{b_1}) + b_2 (= \log_a a^{b_2})$$

$$= \log_a c_1 + \log_a c_2$$

$$\log_a(c_1 c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2$$

$$\log_a c^{-1} \rightarrow a^b = c^{-1} \rightarrow c^{-1} = a^b$$

$$\rightarrow c = (a^b)^{-1} \rightarrow c = a^{-b}$$

$$\rightarrow \log_a c^{-1} = -b = -\log_a c$$

$$\Rightarrow \log_a c^{-1} = -\log_a c$$

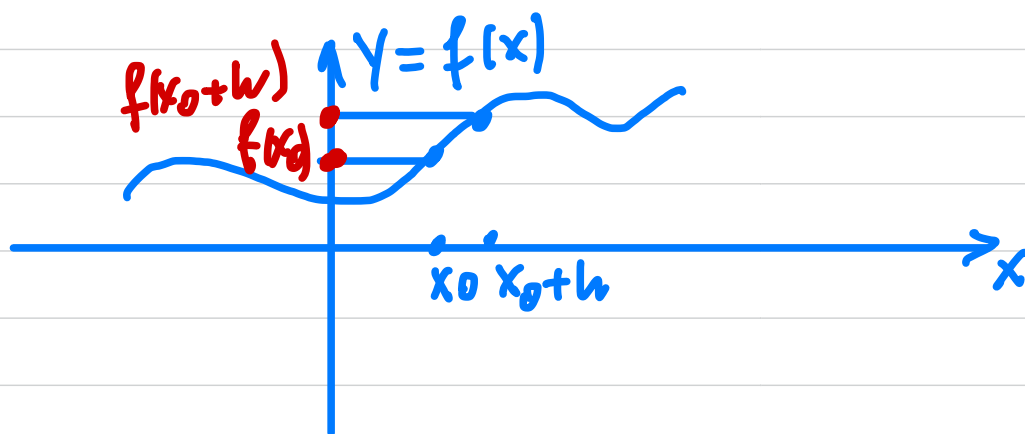
$$\begin{aligned} \log_a \frac{b}{c} &= \log_a b c^{-1} = \log_a b + \log_a c^{-1} \\ &= \log_a b - \log_a c \end{aligned}$$

DERIVATA

Come descrivere le proprietà di una curva?

Risposte: determinare la variazione di $f(x)$

sotto una variazione di x .



$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

↑
Rapporto incrementale

$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0}$ ha un "difetto": dipende dal
valore di h . Quale scegliere?

$$h=0!$$

Più precisamente

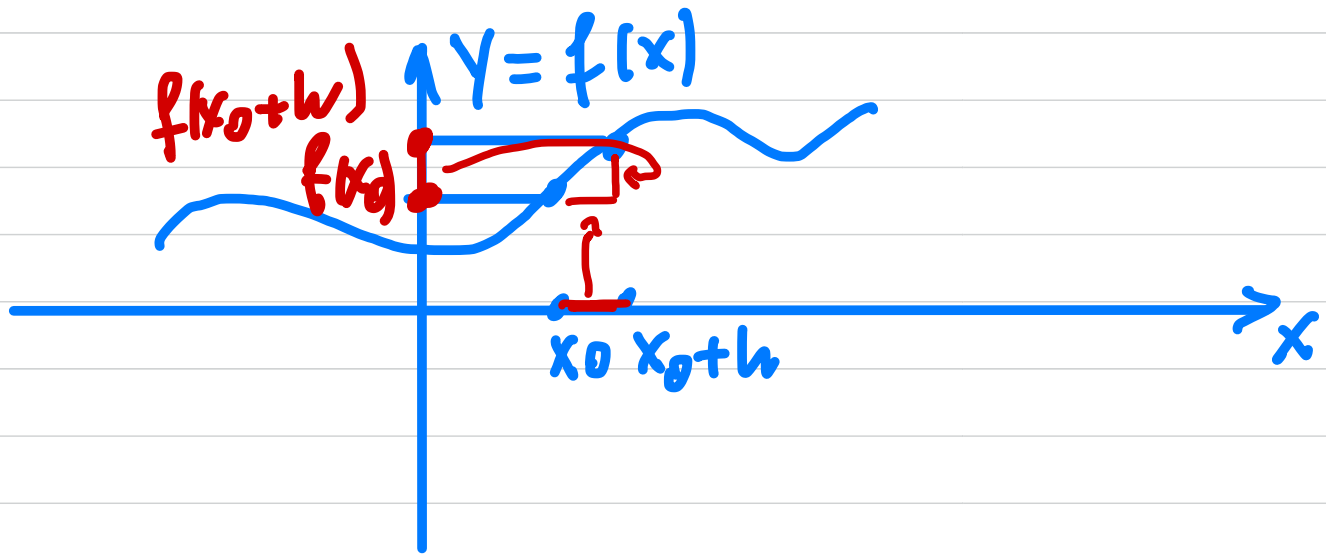
$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Esempio $y = f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + h^2 + 2hx_0 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x_0) \\ &= 2x_0 \end{aligned}$$

Per x generico $x_0 \rightarrow x$

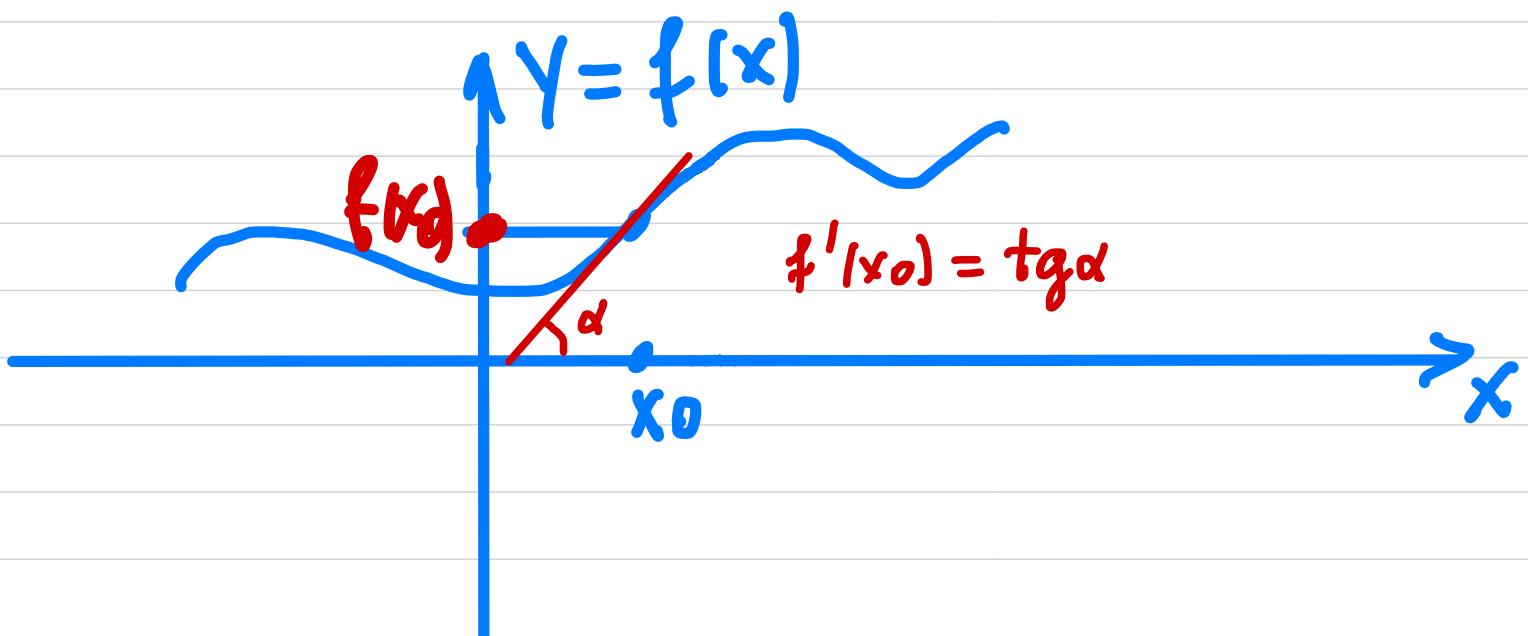
$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$



↑ il rapporto $\frac{\Delta f(x_0+h)}{\Delta x_0}$ ricorda

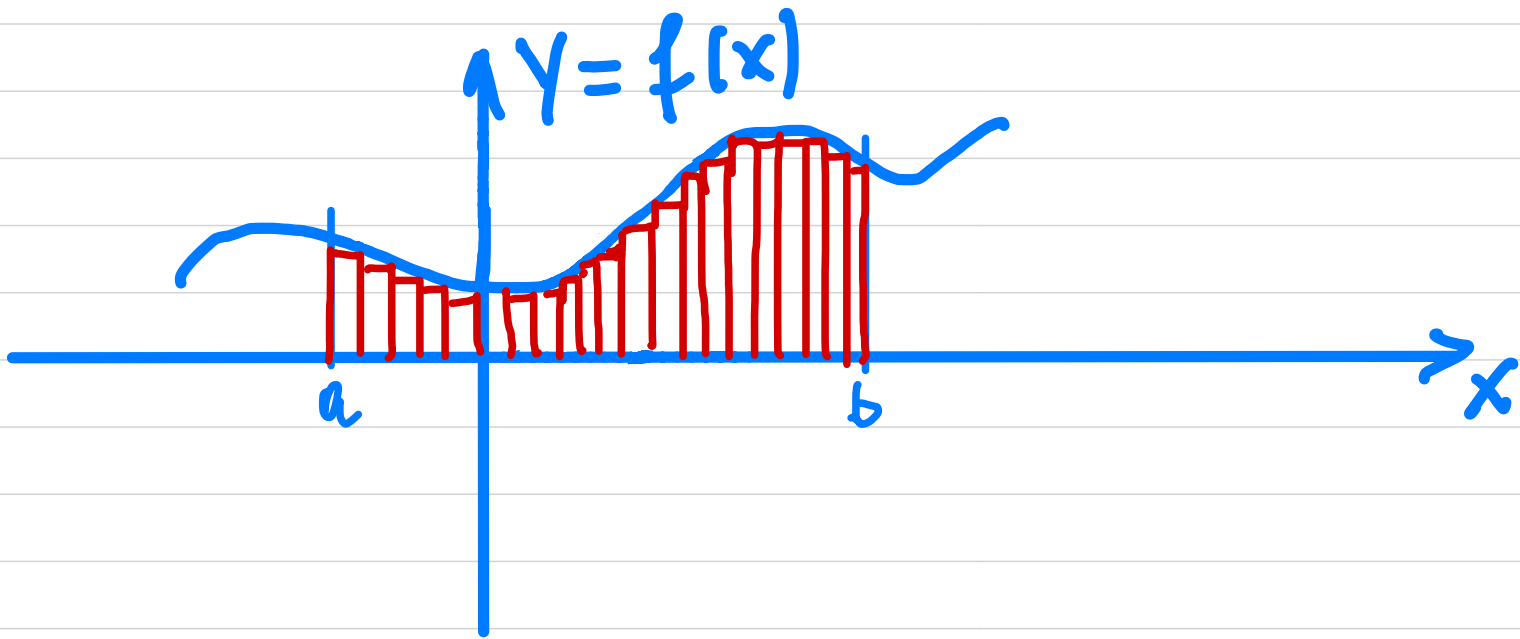
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Si dimostra che nel limite $h \rightarrow 0$ si ha proprio $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ dove α è l'angolo che forma la tangente a f in x_0 con l'asse delle x :



Integrale (di Riemann ... c'è anche quello di Lebesgue). Come vediamo l'integrale è l'operazione "inversa" della derivata.

Calcolo approssimato dell'area sottesa dalle curve tra a e b



Area dei rettangoli, somma di basi per ottenere:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) (x_{k+1} - x_k)$$

Nel limite $n \rightarrow \infty$ $(x_{k+1} - x_k) \rightarrow 0$

si ottiene l'area sottesa da $f(x)$ tra a e b

$$\text{Area}(a, b) = \int_a^b f(x) dx$$

Proprietà:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

dove, in accordo con il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

N.B. $F(x)$ è definito a meno di una costante:

$$\frac{d(F(x) + \text{costante})}{dx} = \frac{dF(x)}{dx}$$

Ovviamente, come deve essere, l'area sottesa dalla curva è indipendente dall'arbitrarietà dovuta alle costanti

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) + \overset{\text{constante}}{\downarrow} c - (F(a) + \overset{\text{constante}}{\downarrow} c)$$
$$= F(b) - F(a)$$

Forza elettrostatica. Campo elettrostatico

capitolo

1

1.1 CARICHE ELETTRICHE. ISOLANTI E CONDUTTORI

Tra le interazioni fondamentali esistenti in natura la prima ad essere scoperta e studiata quantitativamente è stata l'interazione gravitazionale, responsabile di gran parte dei fenomeni che si osservano su scala macroscopica nell'universo. Il moto dei pianeti attorno al sole come il moto rispetto alla terra, sia di un corpo qualsiasi che di un satellite artificiale, sono regolati dalla *legge di Newton*, figura 1.1, che fornisce, per il modulo della forza gravitazionale, l'espressione

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} : \quad (1.1)$$

due corpi di masse m_1 e m_2 , posti a distanza r molto grande rispetto alle dimensioni dei corpi stessi, interagiscono con una forza attrattiva la cui intensità è proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Le masse dei corpi, da cui dipende l'interazione, possono essere assunte eguali alle masse inerziali, cioè a quelle che compaiono nelle legge del moto $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. La costante $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, che descrive l'intensità dell'interazione, è *universale*: il suo valore è indipendente sia dal valore che da qualsiasi altra caratteristica delle masse interagenti.

Un'altra *interazione* fondamentale, che gioca un ruolo essenziale nella costituzione della materia, è quella *elettromagnetica*, le cui leggi vennero formulate in modo quantitativo tra la fine del settecento e la metà dell'ottocento. Un aspetto particolare dell'interazione elettromagnetica è la **forza elettrica**: le sue proprietà costituiscono l'argomento dei primi capitoli di questo volume.

L'osservazione di fenomeni legati alla forza elettrica, ovvero di natura elettrica, risale al settimo secolo a.C., quando si scoprì che l'ambra, l'ebanite e altri materiali, strofinati con un panno di lana, acquistano la proprietà di attirare corpuscoli leggeri, quali granelli di polvere e pagliuzze. Queste osservazioni, tramandate inalterate per oltre venti secoli, vennero riprese nel sedicesimo secolo da W. Gilbert il quale, attraverso un'analisi sistematica, individuò tutta una serie di sostanze, dal diamante al vetro e allo zolfo, che presentano lo stesso comportamento. Egli chiamò *elettrizzati* i materiali che acquistavano la proprietà di attirare i corpuscoli leggeri e *forza elettrica* la forza che si manifestava (dal termine *electron*, che è il nome greco dell'ambra).

Oggi noi attribuiamo le forze in parola a **cariche elettriche**, che preesistono nei corpi e che passano da un corpo all'altro durante lo strofinio, per cui i corpi elettrizzati si chiamano anche *eletticamente carichi*.

Legge di Newton



Figura 1.1

Forza gravitazionale tra due masse puntiformi.

Forza elettrica

Carica elettrica

Isolanti e conduttori

Questi corpi che si caricano per strofinio sono detti **isolanti**, in quanto capaci di trattenere la carica elettrica, mentre altri, come ad esempio i metalli e il corpo umano stesso, non trattengono la carica e sono detti **conduttori**; in effetti, se proviamo a strofinare con un panno una bacchetta di metallo, constatiamo che essa non si elettrizza.

Il metodo dell'elettrizzazione per strofinio può essere applicato sistematicamente a un gran numero di materiali *isolanti*, tra cui anche i materiali sintetici attualmente disponibili (bachelite, plexiglass, materie plastiche in generale), con i seguenti risultati che rivestono carattere generale:

- esistono due specie di materiali isolanti, quelli che si comportano come il vetro e quelli che si comportano come la bachelite;
- tra due bacchette elettrizzate della medesima specie (entrambe tipo vetro o entrambe tipo bachelite) si manifesta sempre una forza repulsiva, figura 1.2a;
- tra due bacchette elettrizzate di specie diversa (una tipo vetro e l'altra tipo bachelite) si manifesta sempre una forza attrattiva, figura 1.2b;
- una forza attrattiva si manifesta in ogni caso tra la bacchetta di isolante e il materiale con cui è stata elettrizzata per strofinio.

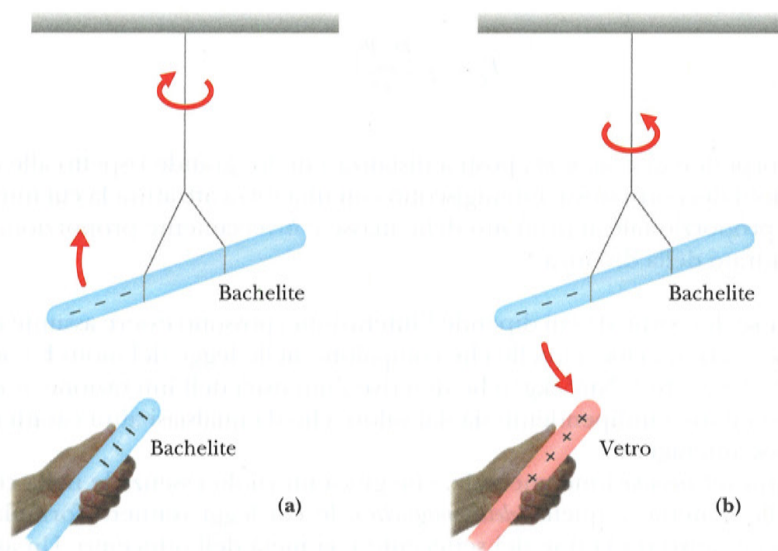


Figura 1.2

Forza tra due bacchette cariche dello stesso segno (a) e di segno opposto (b).

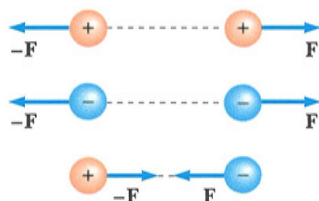


Figura 1.3

Forza tra due cariche elettriche puntiformi.

Da questo insieme di fatti sperimentali si deduce che esistono *due diversi tipi di cariche elettriche*; per convenzione è stata chiamata *positiva* la carica che compare sulla superficie delle sostanze tipo *vetro* quando vengono elettrizzate, mentre è stata chiamata *negativa* la carica che compare sulla superficie delle sostanze tipo *bachelite*. Possiamo allora sintetizzare così i risultati precedenti:

- due corpi isolanti carichi entrambi positivamente o entrambi negativamente si respingono;
- un corpo isolante carico positivamente e uno carico negativamente si attraggono;
- nel processo di carica per strofinio i due corpi, la bacchetta di isolante e il panno, acquistano sempre una carica di segno opposto.

La carica che si accumula per strofinio sugli isolanti si mantiene per tempi considerevoli, specialmente se l'aria nell'ambiente in cui si opera è secca.

Invece, come abbiamo già rilevato, non è possibile caricare per strofinio una bacchetta di metallo tenendola in mano, come si fa con le bacchette di isolante. Gli effetti di elettrizzazione si osservano però se la bacchetta di metallo è sostenuta da un supporto di materiale isolante e in tal caso il comportamento dei metalli è simile a quello degli isolanti.

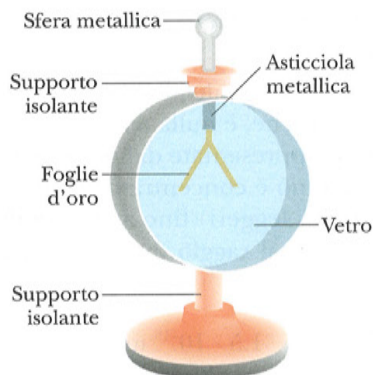
L'assenza di elettrizzazione se non si adotta la suddetta precauzione si spiega col fatto, già ricordato, che i metalli e il corpo umano sono conduttori, cioè permettono il movimento della carica elettrica accumulatasi durante lo strofinio, a differenza di quanto avviene negli isolanti. Dal punto di vista di questi esperimenti hanno caratteristiche di conduttori anche il suolo, svariati liquidi tra cui l'acqua e anche l'aria umida. Allora, dalla bacchetta di metallo tenuta in mano e strofinata la carica si disperde (molto rapidamente) nel corpo umano e, se possibile, nel suolo; analogamente, in una giornata umida un corpo isolante carico mantiene meno facilmente la carica, che tende a disperdersi (lentamente) nell'aria conduttrice verso i corpi circostanti.

L'elettroscopio a foglie

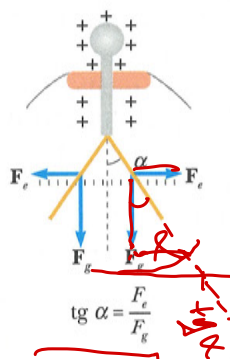
L'elettroscopio a foglie, mostrato in figura 1.4a, è il primo strumento costruito per rivelare e riconoscere lo stato (relativo) di carica. Esso è costituito da due foglioline metalliche molto sottili, d'oro o di alluminio, sospese ad una asticciola metallica. Allo scopo di proteggere le foglie da movimenti dell'aria che ne altererebbero la posizione queste sono contenute in un involucro di vetro; l'asticciola esce dall'involucro attraverso un tappo di ottimo materiale isolante, ad esempio ambra.

Se si tocca con una bacchetta carica l'estremità dell'asticciola, le due foglie acquistano dalla bacchetta tramite l'asticciola una data carica, dello stesso segno, per cui tendono a divergere. L'equilibrio statico di ciascuna foglia (figura 1.4b), caratterizzato da un certo angolo di deflessione α , si raggiunge quando è nulla la risultante di tutte le forze agenti sulla foglia, come discuteremo nell'esempio 1.4. Lo strumento può essere completato da una scala graduata per la misura dell'angolo α .

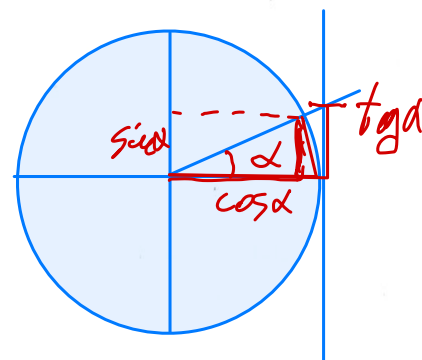
L'elettroscopio permette di riconoscere il segno relativo della carica dei corpi. Se ad esempio tocchiamo l'elettroscopio precedentemente caricato con una carica di un dato segno con una bacchetta carica con lo stesso segno la deflessione delle foglie aumenta, mentre se la carica della bacchetta è di segno opposto la deflessione diminuisce.



(a)



(b)



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Triangoli simili

Figura 1.4

Elettroscopio a foglie d'oro (o alluminio) (a); equilibrio delle forze che agiscono sulle foglie di un elettroscopio carico (b).

1.2 STRUTTURA ELETTRICA DELLA MATERIA

I fenomeni descritti finora si spiegano in modo coerente con l'ipotesi della preesistenza delle cariche elettriche nei corpi, ovvero con l'ipotesi che i costituenti elementari della materia possiedono carica elettrica.

Per le nostre considerazioni possiamo dire che la materia stabile che ci circonda (corpi terrestri, pianeti, la nostra galassia) è formata da tre costituenti elementari, il **protone p**, il **neutrone n**, l'**elettrone e**.

La massa del protone, entro qualche permille, è eguale alla massa del neutrone e vale $m_p \cong m_n \cong 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg; la massa dell'elettrone è $m_e \cong 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, circa 1840 volte più piccola della massa del protone e del neutrone (i valori precisi sono dati nella tabella 1.1 del paragrafo 1.3).

Sulla base dei dati sperimentali esistenti il protone e il neutrone hanno dimensioni dell'ordine di 10^{-15} m, cioè del *femtometro*, unità che in fisica nucleare è anche chiamata **fermi**. Con i mezzi di indagine attualmente disponibili si può affermare che le dimensioni dell'elettrone sono inferiori a 10^{-17} m: esso ci appare *puntiforme*, cioè privo di struttura interna.

La carica elettrica dell'elettrone è la più piccola osservata sperimentalmente: essa è chiamata **carica elementare** ed è indicata con $-e$; il segno evidenzia l'assunzione che la carica dell'elettrone sia negativa. Il protone ha una carica positiva $+e$, eguale in valore assoluto a quella dell'elettrone, il neutrone invece ha carica elettrica nulla (è neutro).

Il carattere elementare della carica dell'elettrone è suffragato, oltre che dall'esperimento di Millikan (paragrafo 1.8), anche dal fatto che tutte le particelle subatomiche osservate hanno una carica che, in valore assoluto, è eguale alla carica elementare e oppure è multipla intera di questa. Questa situazione si esprime dicendo che la carica elettrica è una grandezza *quantizzata*.

I tre costituenti si aggregano in strutture che si chiamano **atomi**. Precisamente, un certo numero di protoni e neutroni, legati dall'**interazione forte** (un altro tipo di interazione fondamentale esistente in natura) costituiscono il nucleo dell'atomo, che risulta quindi carico positivamente; attorno al nucleo si muove un numero di elettroni, eguale al numero di protoni, sotto l'azione elettrica attrattiva esercitata dal nucleo. La configurazione di questi elettroni è determinata dalle leggi della meccanica quantistica ed è caratteristica del tipo di atomo.

La composizione di un atomo è descritta da due numeri:

- il **numero atomico Z** che dà il numero di protoni ed elettroni esistenti nell'atomo;
- il **numero di massa A** $A = Z + N$, somma del numero Z di protoni e N di neutroni che formano il nucleo dell'atomo.

Poiché il numero di protoni in ogni atomo è eguale al numero di elettroni, la carica elettrica totale, somma delle singole cariche, è nulla e l'*atomo è neutro*.

Le proprietà di massa di un atomo sono rappresentate dal numero di massa A; in effetti oltre il 99.9% della massa di un atomo è concentrato nel nucleo. Le dimensioni dei nuclei variano da 10^{-15} m (nuclei leggeri) fino a 10^{-14} m per i nuclei più pesanti; si è trovato sperimentalmente che il **raggio di un nucleo atomico** è dato con buona approssimazione dalla formula

$$r = R_0 A^{1/3} \quad \text{con} \quad R_0 = 1.5 \cdot 10^{-15} \text{ m} .$$

La dipendenza da A è proprio quella attesa per una distribuzione uniforme di massa nel nucleo. Le dimensioni degli atomi sono dell'ordine di 10^{-10} m e coincidono con lo spazio entro cui si muovono gli elettroni.

Protone, neutrone, elettrone

fermi

Carica elementare

Numero atomico Z

Numero di massa A

Raggio del nucleo atomico

Le proprietà elettriche di un atomo sono invece descritte dal numero atomico Z ; in particolare dalla configurazione degli Z elettroni attorno al nucleo dipendono la capacità di un atomo di legarsi ad altri atomi e quindi le sue *proprietà chimiche*.

Gli elettroni di un atomo, specialmente quelli periferici, sono più o meno legati al nucleo: da ciò deriva la differenza tra materiali isolanti e conduttori. Negli isolanti gli elettroni sono ben vincolati al nucleo e non possono spostarsi attraverso il corpo: gli isolanti non trasportano facilmente la carica. Mediante una specifica azione locale, quale lo strofinio con un panno, si può far passare, nei punti di contatto, un certo numero n di elettroni e quindi una carica $-q = -ne$ da un corpo C_1 , ad esempio una bacchetta di vetro, ad un corpo C_2 , il panno; C_2 risulta carico negativamente nei punti di contatto con C_1 e tale carica non si muove verso altre zone di C_2 , figura 1.5. Invece in C_1 nei punti di contatto è presente un eccesso di carica positiva $q = ne$. Nel caso di isolanti tipo bachelite il processo avviene in senso contrario (C_1 acquista elettroni da C_2).

In conclusione un processo di carica per *strofinio* è un processo in cui vengono separate, attraverso un agente meccanico, delle cariche (elettroni) e trasferite da un corpo ad un altro. Si noti che lo spostamento riguarda un numero intero di elettroni, cioè la carica trasferita può assumere solo valori multipli interi della carica elementare, in accordo al fatto che la **carica elettrica è quantizzata**.

Prima dello strofinio la carica del panno e della bacchetta erano entrambe nulle: tutti i corpi sono neutri, perché ogni atomo costituente della materia è neutro. Dopo lo strofinio il panno e la bacchetta hanno acquistato una carica eguale ed opposta, ma nel suo complesso la carica totale del sistema panno + bacchetta è rimasta nulla.

Questa proprietà fondamentale di tutti i processi in cui compaiono cariche elettriche, nota come **principio di conservazione della carica elettrica**, verificata senza nessuna eccezione sia su scala macroscopica che su scala atomica e subatomica, si enuncia in modo seguente:

in un sistema elettricamente isolato la somma algebrica di tutte le cariche elettriche rimane costante nel tempo ovvero si conserva.

Quando ad un atomo vengono aggiunti o tolti elettroni si forma rispettivamente uno **ione negativo** o uno **ione positivo**; in particolare il fenomeno di sottrazione di elettroni di chiama **ionizzazione**. Gli atomi dei metalli hanno la proprietà di essere facilmente ionizzabili: uno o più elettroni degli strati più esterni della configurazione elettronica si comportano come *elettroni liberi* e le proprietà conduttrici dei metalli, come vedremo nel capitolo 4, sono dovute proprio a questo *gas di elettroni di conduzione* che si possono muovere liberamente nel corpo.

Se ad esempio, come in figura 1.6, tocchiamo con una bacchetta di vetro carica positivamente un conduttore isolato, cioè non in contatto con la terra, nel punto di contatto alcuni elettroni del conduttore sotto l'azione della forza attrattiva esercitata dalla carica positiva si trasferiscono sulla bacchetta e il conduttore appare carico positivamente (è così che si carica l'elettroscopio a foglie). Come vedremo in seguito l'*eccesso di carica del conduttore si distribuisce su tutta la superficie del conduttore e non nel suo interno*.

Quando il conduttore non è isolato (per esempio è collegato a terra tramite il corpo dello sperimentatore che lo sostiene con una mano), la carica si distribuisce ancora su tutta la superficie di conduttore disponibile, ma essendo la superficie della terra preponderante ne consegue che tutta la carica si disperde sulla terra e il conduttore appare scarico.

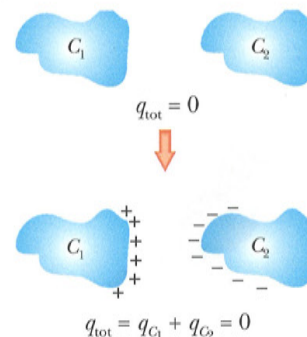


Figura 1.5

Carica di un materiale isolante per strofinio.

La carica elettrica è quantizzata

Principio di conservazione della carica

Ione negativo – Ione positivo

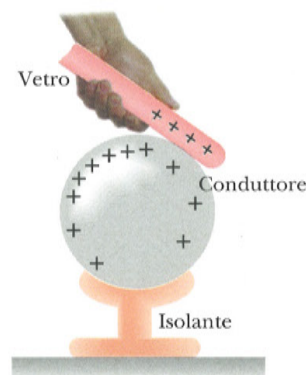
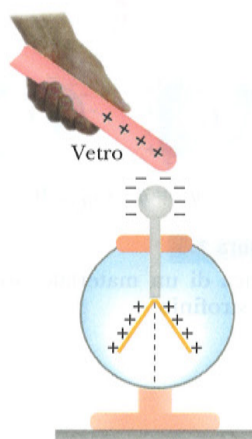


Figura 1.6

Carica di una sfera di materiale conduttore isolato per contatto.

**Figura 1.7**

Separazione delle cariche in un elettroscopio a foglie per induzione.

Induzione elettrostatica

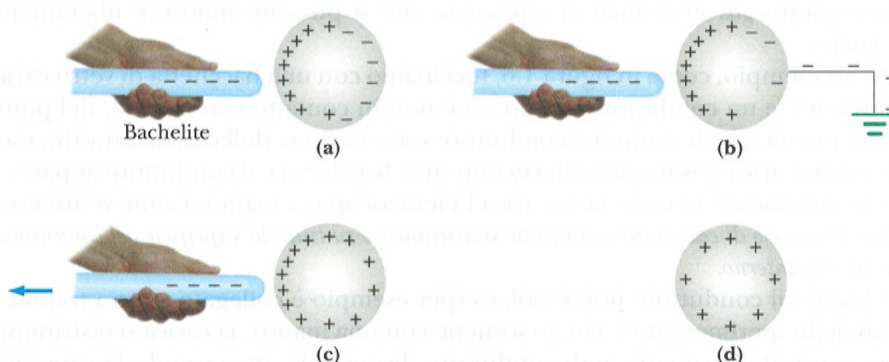
Supponiamo ora di avvicinare, figura 1.7, una bacchetta carica positivamente ad un elettroscopio senza toccarlo: osserviamo che le foglie divergono. Sotto l'azione della carica positiva un certo numero di elettroni liberi del conduttore si porta sull'estremità superiore dell'asticciola e sulla parte più lontana, le foglie, resta un eccesso di carica positiva. Se la bacchetta è carica negativamente, gli elettroni si muovono verso le foglie, su cui compare un eccesso di carica negativa. Allontanando la bacchetta si ripristinano le condizioni iniziali, le foglie si richiudono.

Un'analisi più accurata, ovvero una spiegazione che rimandiamo al capitolo 4 sulle proprietà dei conduttori, permetterebbe di verificare che ad una estremità è comparsa globalmente una carica q e all'altra una carica $-q$, cioè che la carica totale del conduttore è nulla come all'inizio dell'esperimento ed è nulla anche la carica all'interno del conduttore.

Questo processo di separazione della carica, caratteristico dei conduttori, è noto come **induzione elettrostatica**. Il processo è statico, cioè comporta una situazione di equilibrio con cariche ferme, come tutti i fenomeni che stiamo descrivendo, in quanto l'accumulo di elettroni su una estremità, che avviene molto rapidamente, impedisce per repulsione elettrica un ulteriore arrivo di elettroni. Si può ottenere per induzione una carica permanente su un conduttore isolato operando nel modo seguente.

Sottoponiamo, figura 1.8a, ad induzione elettrostatica, con una carica inducente per esempio negativa, un conduttore. Colleghiamo, figura 1.8b, con un filo metallico il conduttore a *terra*, che in figura è indicata con il simbolo universalmente adottato. Il conduttore e la terra costituiscono un unico conduttore e quindi la carica dello stesso segno di quella inducente compare nei punti più lontani da questa, cioè sulla terra. Se a questo punto si interrompe il collegamento e si allontana la carica inducente, figura 1.8c, il corpo rimane carico di segno opposto a questa, cioè positivamente nell'esempio considerato e la carica si distribuisce su tutta la superficie del conduttore, figura 1.8d.

È chiaro che anche nei processi di carica dei conduttori vale sempre il principio di conservazione della carica del sistema complessivo; se il processo avviene per contatto si ha un trasferimento di n elettroni da un corpo all'altro, se avviene per induzione si ha una separazione di carica (spostamento di elettroni) che può diventare permanente, ma la carica totale finale è sempre eguale a quella iniziale.

**Figura 1.8**

Fasi del processo di carica di un conduttore sferico isolato per induzione elettrostatica.

1.3 LA LEGGE DI COULOMB

Come abbiamo visto nel paragrafo 1.2 i costituenti dell'atomo hanno carica pari alla carica elementare o sono neutri e l'atomo stesso è neutro. Di conseguenza per un corpo qualsiasi, che è composto di atomi, la carica totale, pari alla somma algebrica di tutte le cariche elementari presenti nel corpo, risulta normalmente nulla: il corpo è neutro. Con metodi opportuni, alcuni dei quali abbiamo descritto in precedenza, è però possibile effettuare trasferimenti di carica tra corpi per cui la carica totale di un corpo può risultare *positiva*, e si dice che il *corpo è carico positivamente*, oppure *negativa*, e si dice che il *corpo è carico negativamente*.

Per misurare operativamente la carica elettrica dei corpi carichi si stabilisce innanzi tutto di considerare eguali in grandezza e segno due cariche se queste, poste alla stessa distanza da una terza, agiscono su di essa con una forza eguale e dello stesso verso; si considerano eguali e di segno opposto quando, nelle stesse condizioni, le forze risultano eguali in modulo, ma di verso opposto. Un possibile metodo di misura è indicato nell'esempio 1.3.

Un confronto tra cariche si può effettuare anche con l'elettroscopio descritto nel paragrafo 1.1. Siccome si può dimostrare che quando portiamo a contatto un conduttore carico con un elettroscopio questo acquista una carica proporzionale alla carica del corpo, diremo che due corpi hanno la stessa carica quando, posti successivamente a contatto con l'elettroscopio scarico, fanno deviare le foglie dello stesso angolo. Una carica sarà maggiore di un'altra quando farà divergere le foglie di un angolo maggiore dell'altra.

Il confronto tra due cariche diverse in modulo può diventare quantitativo solo se si conosce l'espressione della forza con cui interagiscono le cariche elettriche.

La formulazione precisa della legge della forza elettrica è dovuta a Coulomb, il quale eseguì nel 1785 una serie di misure sistematiche per stabilire la dipendenza della forza tra due cariche dai valori q_1 e q_2 di queste e dalla loro distanza r .

Coulomb utilizzò la bilancia di torsione mostrata schematicamente in figura 1.9 e descritta nel paragrafo 11.2 del primo volume. Una sottile asta isolante orizzontale è appesa al centro ad un filo di quarzo, di cui è nota la costante elastica di torsione k_t . Ad una estremità dell'asta è fissata una piccola sfera conduttrice che porta una carica q_1 , sull'altra estremità è fissato un opportuno contrappeso per garantire l'orizzontalità. Nel piano orizzontale contenente l'asta è posta una seconda sferetta con carica q_2 , a distanza r da q_1 . Per effetto della forza tra q_1 e q_2 l'asta, se si ha cura di neutralizzare altri movimenti, compie solo una rotazione e raggiunge una posizione di equilibrio, individuata da un angolo θ di rotazione, in cui il momento elastico $k_t\theta$ eguaglia il momento della forza elettrica. In sostanza il valore di F è dedotto dalla misura di θ .

Variando i parametri in gioco, tra cui i valori delle cariche, Coulomb stabilì che due *cariche puntiformi* q_1 e q_2 , poste a distanza r , interagiscono con una forza F , diretta secondo la loro congiungente, di modulo

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.2)$$

la forza è direttamente proporzionale al prodotto delle cariche elettriche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

Osserviamo subito che la struttura di (1.2) è identica a quella di (1.1): la caratteristica più peculiare è che sia la forza gravitazionale che quella elettrica sono *inversamente proporzionali al quadrato della distanza*. Ricordiamo inoltre che il metodo di Coulomb fu applicato nel 1798 da Cavendish all'interazione gra-

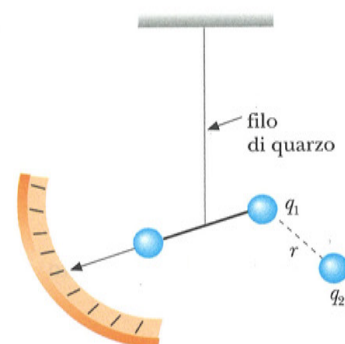


Figura 1.9

Rappresentazione schematica della bilancia a torsione di Coulomb.

Legge di Coulomb

vitazionale tra sfere massicce con lo scopo di determinare il valore della costante γ nella (1.1).

La costante k che compare nella (1.2) dipende dalla scelta delle unità di misura e dal mezzo in cui le cariche sono immerse, mezzo di norma isolante che per le sue proprietà elettriche viene chiamato **dielettrico**.

Nell'ambito del sistema internazionale si è adottata oltre alle unità di misura di lunghezza, tempo, massa e temperatura una quinta unità indipendente per le grandezze elettromagnetiche e la scelta, per ragioni di precisione di misura, è caduta sull'**ampere**, simbolo A, unità di misura dell'intensità di corrente elettrica, che definiremo in seguito. Come unità di carica si è poi definito il **coulomb**, simbolo C, che è *pari alla carica trasportata da una corrente di 1A in 1 secondo*. Fissata l'unità di misura della carica, ed essendo già definite le unità di forza e di distanza, in linea di principio basta misurare la forza tra due cariche note a distanza nota per determinare nel sistema internazionale il valore di k nel vuoto; risulta

$$k = 8.9875 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2, \quad (1.3)$$

che nella pratica approssimeremo con $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

Per ragioni pratiche che appariranno chiare più avanti è conveniente esprimere k come

$$k = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0}$$

dove la costante ϵ_0 è nota come **costante dielettrica** (o *permettività*) **del vuoto** e ha il valore

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \pi k} = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}. \quad (1.4)$$

Con questa notazione la (1.2) scritta nel sistema internazionale diventa

$$F = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.5)$$

Il valore della **carica elementare** espresso in coulomb risulta

$$e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (1.6)$$

e quindi 1C equivale alla carica di $1/e = 6.24 \cdot 10^{18}$ elettroni.

In tabella 1.1 sono dati i valori più aggiornati delle cariche e delle masse dell'elettrone, del protone e del neutrone; si intende che l'incertezza è sull'ultima cifra indicata.

Negli esperimenti di elettrostatica che abbiamo descritto, come l'elettrizzazione per strofinio, la carica della bacchetta può essere dell'ordine di 10^{-7} C e ciò equivale allo spostamento di $6.24 \cdot 10^{11}$ elettroni. Due cariche $q_1 = q_2 = 10^{-7} \text{ C}$ poste a distanza $r = 10^{-2} \text{ m}$ interagiscono con una forza

$$F = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-7} / 10^{-4} = 0.9 \text{ N}$$

che è ben misurabile (due cariche di 1C a 1 metro di distanza interagirebbero con una forza di $9 \cdot 10^9 \text{ N}$!). In effetti in elettrostatica la carica di 1C è ben oltre le possibilità sperimentali; gli eccessi di carica su isolanti e conduttori sono quasi sempre inferiori a 10^{-6} C ; solo con opportuni dispositivi che descriveremo più avanti, i **condensatori**, è possibile in qualche caso avere cariche separate dell'ordine di $0.1 \div 1 \text{ C}$. La ragione sostanziale che impedisce l'accumulo oltre un certo limite di carica libera è la repulsione tra cariche dello stesso segno.

Fino a abbiamo introdotto i seguenti concetti:

- Materiali isolanti: trattengono le cariche. Gli isolanti sono anche detti **dielettrici**
- Materiali conduttori: non trattengono la carica.
- Concetto di carica: positiva e negativa. La carica è **quantizzata** e si conserva
- Legge di Coulomb: come la legge di Newton con le masse sostituite da cariche. Può essere sia attrattiva (come la gravità) che repulsiva

Abbiamo visto che due cariche, q_1 e q_2 , sono soggette alle forze di Coulomb (1785)

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

dove k è una costante, il cui valore è

$$k = 8.9875 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

dove N denota Newton e C Coulomb. Il valore di k è spesso approssimato a $9 \cdot 10^9 N \cdot m^2 / C^2$.

Il fatto che la forza di Coulomb sia centrale, cioè

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \vec{u}_r$$

scalare
di F scalare $r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

implica un'invarianza sotto rotazioni. In altre parole, poiché F dipende solo del modulo

di $\vec{n}$, implica che il modulo della forza a cui è soggetta una carica puntiforme q_2 in presenza di una carica q_1 è lo stesso in qualsiasi punto della sfera di raggio r e centro q_1 :



$$F(r) = \frac{k q_1 q_2}{r^2} = \frac{k q_1 q_2}{r^2}$$

Il modulo della forza a cui è soggetta q_2 è lo stesso in tutti i punti della superficie sferica. Questo è vero per qualsiasi r .

Questa è detta **SIMMETRIA SFERICA** della distribuzione di carica.

Tale simmetria gioca un ruolo fondamentale nei fenomeni elettrostatici. In proposito si noti che la legge di Coulomb si può anche esprimere nella forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = 4\pi k \frac{q_1 q_2}{S_r} \vec{u}_r$$

dove $S_r = 4\pi r^2$ è l'area della superficie della sfera di raggio r .

Questo è il motivo per cui, invece di k , si utilizza più frequentemente la costante

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \rightarrow k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$$

ϵ_0 è detta costante dielettrica (o permittività) del vuoto.

In tal modo si ha

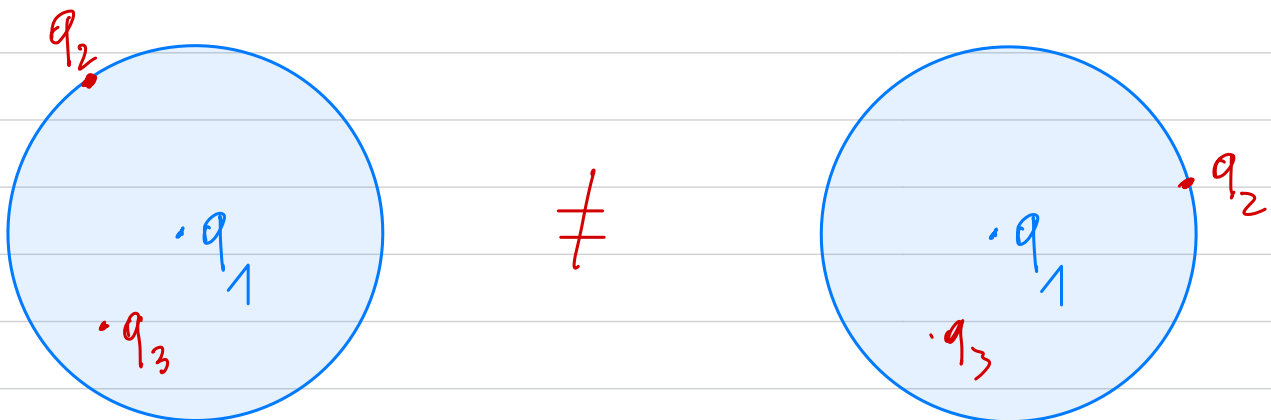
$$\vec{F}(\vec{r}) = 4\pi k \frac{q_1 q_2}{S_r} \vec{u}_r = \frac{q_1 q_2}{\epsilon_0 S_r} \vec{u}_r$$

~~4~~ 4π non c'è

Si ha quindi che la forza elettrostatica (analogamente a quella gravitazionale) è

INVERSAMENTE PROPORZIONALE ALL'AREA
DELLA SUPERFICIE SFERICA CON CENTRO
 q_1 E SU CUI q_2 SI TROVA

Si noti che la simmetria sferica non rimane nel caso vi siano più di due cariche:



Infatti la forza a cui è soggetto q_2 è data dalla somma vettoriale delle forze dovute a q_1 e q_3 :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_1(\vec{r}) + \vec{F}_3(\vec{r})$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2} \vec{u}_{r_{21}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}^2} \vec{u}_{r_{23}}$$

$$\neq F(r) \vec{u}_r$$

$\vec{r}_{jk}$ = raggio vettore congiungente q_j e q_k

Nonostante ciò, la simmetria sferica permette spesso di semplificare i conti. Per esempio

di semplificare i conti. Per esempio

— Distribuzione a simmetria sferica delle cariche

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$



Q = carica totale

= carica distribuita

con simmetria sferica.

Per esempio con densità ρ

costante. Oppure dipendente

solo da r e non da $\vec{r} = (x, y, z)$

dipende solo da r , allora ha simmetria sferica

Commento su $\vec{F}(\vec{r})$

Si noti che $\vec{F}(\vec{r})$ è un campo vettoriale e che $\vec{r}$ è il vettore $\vec{r} = (x, y, z)$. Quindi

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) &= (F_x(\vec{r}), F_y(\vec{r}), F_z(\vec{r})) \\ &= (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))\end{aligned}$$

In proposito va osservato che l'espressione della forza a cui è soggetta q_2

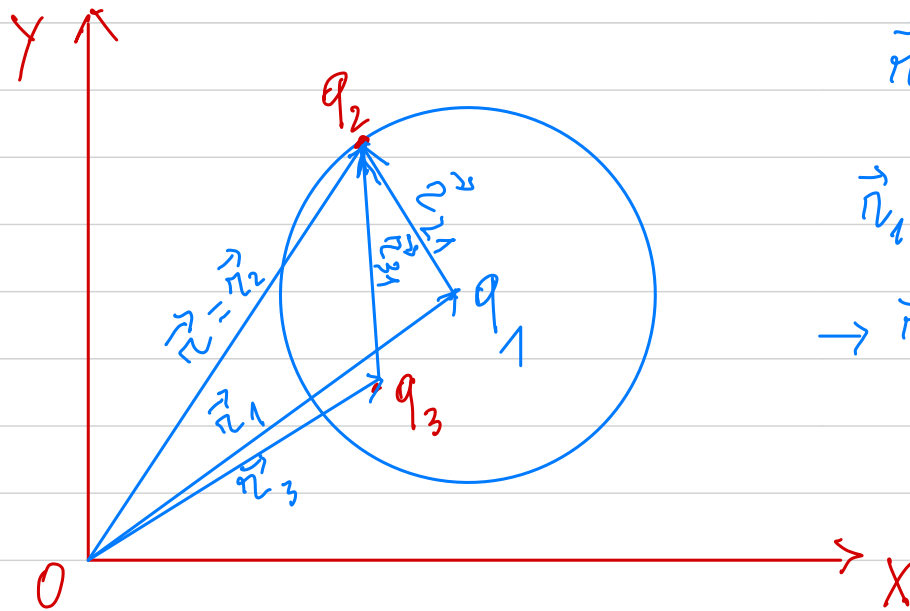
$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_1(\vec{r}) + \vec{F}_2(\vec{r})$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2} \vec{u}_{r_{21}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}^2} \vec{u}_{r_{23}}$$

esprime $\vec{F}(\vec{r})$ in termini di $\vec{r}_{21}$ e $\vec{r}_{23}$

entrambi, in principio, diversi da $\vec{r}$. Tale vettore

dipende dallo salto dell'origine mentre $\vec{r}_{21}$ e $\vec{r}_{13}$ sono indipendenti da tale salto

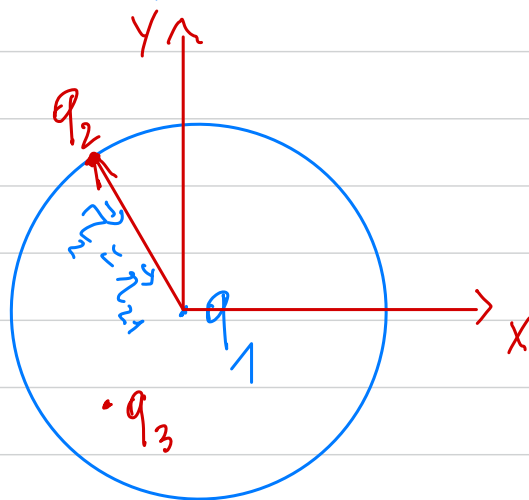


$$\vec{r} = \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_{21} = \vec{r}_2$$

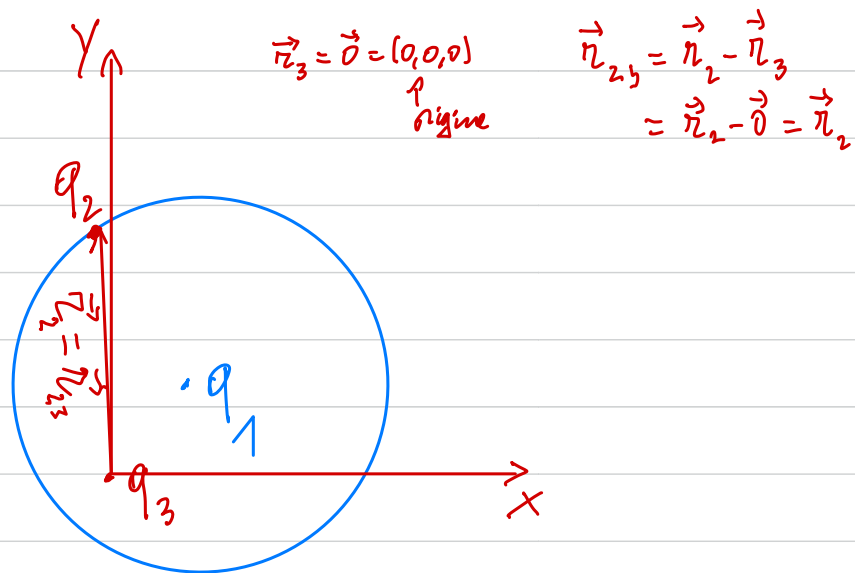
$$\rightarrow \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Ovviamente è più "elegante" scegliere come origine delle coordinate la posizione di q_1 o q_3



$$\vec{r}_1 = \vec{0} = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{21} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= \vec{r}_2 - \vec{0} = \vec{r}_2 \end{aligned}$$

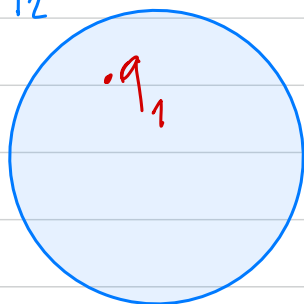


Osservazione "banale": la forza è definita solamente nel punto dove c'è la carica. In altre parole, l'argomento della forza $\vec{F}(\vec{r})$ è la posizione $\vec{r}$ della carica.

Ovviamente ciò è vero per qualsiasi tipo di forza, non solo quella elettrica. Come vedremo, data una qualsiasi distribuzione di carica, si può definire in tutto $\mathbb{R}^3$ un campo vettoriale $\vec{E}(\vec{r})$, chiamato campo elettrico.

- Distribuzione di carica riconducibile ad un problema con simmetria sferica

q_2



Q : sfera con carica totale Q distribuita con simmetria sferica, per cui la densità di carica volumetrica dipende solo da r e non da

la forza a cui è soggetto q_1 è la somma delle forze $\vec{r} = (x, y, z)$

dovute alla distribuzione sferica con carica totale Q e alla carica q_2

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_Q + \vec{F}_{q_2}$$

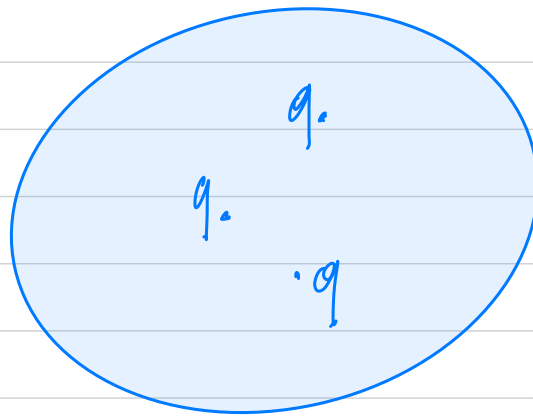
$\vec{F}_Q$ = forza a cui è soggetto q dovuta alla distribuzione

sferica di carica totale Q : possiamo semplificare

utilizzando la simmetria sferica. Il termine rimanente è semplicemente

$$\vec{F}_{q_2}(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}^2} \vec{u}_{r_{12}}$$

Abbiamo visto che la carica più piccola esistente è quella dei quarks. Questi hanno carica $\pm \frac{1}{3}$ e $\pm \frac{2}{3}$ le cariche dell'elettrone. D'altronde i quarks non sono mai stati osservati come singole particelle, questi sono "confinati" all'interno di particelle come neutroni e protoni



LE CARICHE OSSERVABILI SONO
MULTIPLI INTERI DELLA
CARICA DELL'ELETTRONE

ESERCIZIO

Una persona di massa $m = 70 \text{ kg}$ isolata da terra, possiede una carica $-q$, che immaginiamo concentrata in un punto a distanza $r_1 = 1 \text{ m}$ dal suolo. Sul suolo, a distanza r_2 da $-q$ è posta una carica q . Calcolare q tale che la forza peso è pari alle forze elettrostatiche.

$$mg = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg} \quad r = 2.76 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

Quindi la persona ha un eccesso di elettroni pari a

$$N = \frac{q}{e} = \frac{2.76 \cdot 10^{-4}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 1.73 \cdot 10^{15} \text{ elettroni}$$

la massa totale di questi elettroni

$$N m_e = 1.58 \cdot 10^{-15} \text{ kg}$$

Riportiamo la tabella con carica e massa di elettrone, protone e neutrone

	Carica (C)	Massa (Kg)
e	$-1.602177335 \cdot 10^{-19}$	$9.10938975 \cdot 10^{-31}$
p	$1.602177335 \cdot 10^{-19}$	$1.67262311 \cdot 10^{-27}$
n	0	$1.67492866 \cdot 10^{-27}$

ESERCIZIO

Considerando l'atomo di idrogeno in termini non quantistici, si può considerare un modello in cui l'elettrone si trova ad una distanza media di $r = 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Di seguito proponiamo le forze gravitazionali e quelle elettrostatiche tra elettrone e protone

$$F_G = G \frac{m_e m_p}{r^2} = 3.61 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 8.20 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

da cui

$$\frac{F_e}{F_G} \approx 2.3 \cdot 10^{39}$$

che mostra come a livello atomico la forza gravitazionale è del tutto trascurabile.