

FISICA GENERALE II PARTE

lezione 3 26.02.2026

Test e soluzioni inizio II semestre

Ripasso nozioni base di matematica

Test d'inizio corso di Fisica Generale per Chimici Industriali, II semestre

1. $8^{-2/3} =$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} \sin x =$, $\int_a^b x^c dx =$, $\int_a^b x^{-1} dx =$
 $a, b, c > 0$.
2. Calcolare la derivata prima rispetto ad x , nel punto $x = 1$, delle seguenti funzioni:
 e^{ax} , e^{-x^2} , $x \ln(ax)$, $(\ln x)^2$, $\ln x^2$, con a costante.
3. Siano $\mathbf{A} = (\sqrt{2}, 4, -5)$ e $\mathbf{B} = (0, 1, 2)$ due vettori in un sistema cartesiano tridimensionale. Determinare
 $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| =$ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} =$ $\mathbf{A} \times \mathbf{B} =$
4. Si determini l'accelerazione della luna verso la terra sapendo che il periodo dell'orbita, supposta circolare di raggio 385.000 km, è di 27,3 giorni.
5. Si enuncino le tre leggi della dinamica.
6. Si dia la definizione di forza conservativa.
7. Determinare la legge oraria $x(t)$ di una particella di massa m che al tempo t_0 è a riposo nel punto x_0 dell'asse x , nel caso sia soggetta alla forza
 - I) $F_1 = C$, con C costante
 - II) $F_2 = -kx$, con k costante positiva

Anno di corso: Voto prova parziale Fisica Generale: Voto prova parziale Matematica:

1. $8^{-2/3} = 1/4$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} \sin x = 1$, $\int_a^b x^c dx = \frac{1}{c+1}(b^{c+1} - a^{c+1})$, $\int_a^b x^{-1} dx = \ln b/a$.
2. Calcolare la derivata prima rispetto ad x , nel punto $x = 1$, delle seguenti funzioni: e^{ax} , e^{-x^2} , $x \ln(ax)$, $(\ln x)^2$, $\ln x^2$, con a costante. Le derivate delle precedenti funzioni sono ae^{ax} , $-2xe^{-x^2}$, $1 + \ln(ax)$, $\frac{2}{x} \ln x$, $\frac{2}{x}$. Per $x = 1$ si ha quindi ae^a , $-2e^{-1}$, $1 + \ln a$, 0 , 2 .
3. Siano $\mathbf{A} = (\sqrt{2}, 4, -5)$ e $\mathbf{B} = (0, 1, 2)$ due vettori in un sistema cartesiano tridimensionale. Determinare

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = 6, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -6, \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (13, -2\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

4. Si determini l'accelerazione della luna verso la terra sapendo che il periodo dell'orbita, supposta circolare di raggio 385.000 km, è di 27,3 giorni.

$$v = 2\pi r/T, \quad a = v^2/r = 27,3 \cdot 10^{-2} \text{ cm/s}^2.$$

5. Si enuncino le tre leggi della dinamica.

I legge: *Ogni corpo persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché forze esterne ad esso applicate mutino questo stato.*

Questa definizione implica che, affinché non ci sia variazione dello stato del moto del corpo, la forza totale esterna agente su di esso deve essere nulla. In proposito si osservi che l'applicazione di un momento di una forza sul corpo, benché questa corrisponda ad una forza totale nulla, induce un movimento rotatorio del corpo stesso, fatto che comunque non implica una variazione del moto del corpo nel suo insieme.

Si noti anche che tale legge implica che, trascurando l'attrito dell'aria, un oggetto in caduta libera da un aereo in volo con velocità costante e parallela al terreno si trova, in ogni istante finché non giunge a terra, in un punto del segmento rettilineo che unisce l'aereo al terreno e, istante per istante, ad esso perpendicolare. Stessa conclusione si ha nel caso in cui l'aereo abbia una velocità non parallela al terreno: la componente parallela al terreno della velocità dell'oggetto in caduta libera sarebbe comunque la stessa che aveva prima del distacco. Questo significa che la componente orizzontale della velocità dell'oggetto in caduta libera è la stessa che ha l'aereo. Per lo stesso motivo, saltare verticalmente nel corridoio di un treno o sul ponte di una nave, non implica una traslazione orizzontale rispetto al treno o alla nave. Infatti, la forza gravitazionale agisce solo sulla componente verticale del moto, per cui, in accordo con la prima legge della dinamica, la velocità nella direzione parallela al terreno, sia dell'oggetto che cade dall'aereo che della persona che salta sul treno o sulla nave, rimane la stessa che aveva prima del distacco.

II legge: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

III legge: *Ad ogni azione corrisponde sempre una reazione uguale e contraria; ovvero le mutue azioni di due corpi sono sempre uguali e dirette in versi opposti.*

6. Si dia la definizione di forza conservativa.

Una forza $\vec{F}$ è detta conservativa se e solo se l'integrale di circuitazione $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ lungo qualsiasi curva chiusa C è nullo. Si noti che C è arbitraria, quindi in generale diversa da quella corrispondente alla traiettoria fisica. Poiché il lavoro è definito rispetto a traiettorie fisiche, si ha che in generale $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ non può definirsi lavoro. Come vedremo, un esempio di forza non conservativa è quella di Lorentz, $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$. Lungo la traiettoria fisica si ha sempre $\vec{F}_L \cdot d\vec{s} = 0$, in quanto $d\vec{s}$ è parallelo a $\vec{v}$ e quindi perpendicolare a $\vec{F}_L$. Da cui segue che il campo magnetico non compie mai lavoro, d'altronde se C è una curva arbitraria, allora $d\vec{s}$ non è in generale parallelo alla traiettoria fisica, e in tal caso $\vec{F}_L \cdot d\vec{s} \neq 0$. Si ha quindi che, a meno di curve particolari, $\oint_C \vec{F}_L \cdot d\vec{s} \neq 0$.

7. Determinare la legge oraria $x(t)$ di una particella di massa m che al tempo t_0 è a riposo nel punto x_0 dell'asse x , nel caso sia soggetta alla forza

I) $F_1 = C$, con C costante: $x(t) = x_0 + \frac{C}{2m}(t - t_0)^2$.

II) $F_2 = -kx$, con k costante positiva: $x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$, dove A e ϕ sono costanti d'integrazione. A è l'ampiezza massima dell'oscillazione. A e ϕ sono determinate dalle due condizioni iniziali

$$x(0) = A \cos \phi = x_0, \quad \dot{x}(0) = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \phi = 0,$$

quindi $\phi = n\pi$, $A = (-1)^n x_0$, $n \in \mathbb{Z}$. L'arbitrarietà nella scelta di $n \in \mathbb{Z}$ non ha alcun effetto sulla soluzione in quanto $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x$. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha comunque sempre lo stesso risultato per la legge oraria, cioè

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

Si ricordi che il numero di condizioni iniziali necessarie per determinare le soluzioni di un'equazione differenziale lineare, corrisponde all'ordine massimo della derivata presente.

FUNDAMENTAL MATHEMATICAL CONCEPTS IN A NUTSHELL

Dimostriamo: $x^0 = 1 \ (x \neq 0)$ e $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$$x^m := \underbrace{x \cdots x}_{m\text{-volte}} \quad = 1, 2, \dots = \mathbb{N}_+$$

$$x^{m-1} = \underbrace{x \cdots x}_{(m-1)\text{volte}} = \frac{x^m}{x} \rightarrow x^{m-m} = \frac{x^m}{x^m}$$

$$m=1: \quad x^{1-m} = \frac{x}{x^m} = \frac{1}{x^{m-1}}$$

Quindi

$$\begin{array}{ccc} x^{1-m} & = & \frac{1}{x^{m-1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ N := m-1 & & \\ x^{-N} & = & \frac{1}{x^N} \end{array}$$

$$x^0 = x^{N-N} = x^N x^{-N} = x^N \frac{1}{x^N} = 1$$

$$x^{\frac{m}{n}} ?$$

$$\underbrace{x^{\frac{m}{n}} \dots x^{\frac{m}{n}}}_{n\text{-volte}} = x^{\overbrace{\frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n}}^{n\text{-volte}}} = x^{n \frac{m}{n}} = x^m$$

$y_i = x^{\frac{m}{n}}$ $y^n = x^m$

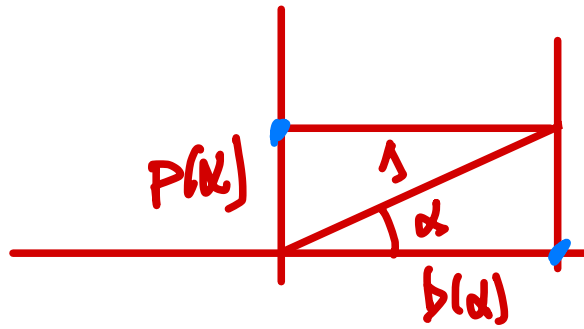
$$y = \sqrt[n]{x^m} \quad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

=

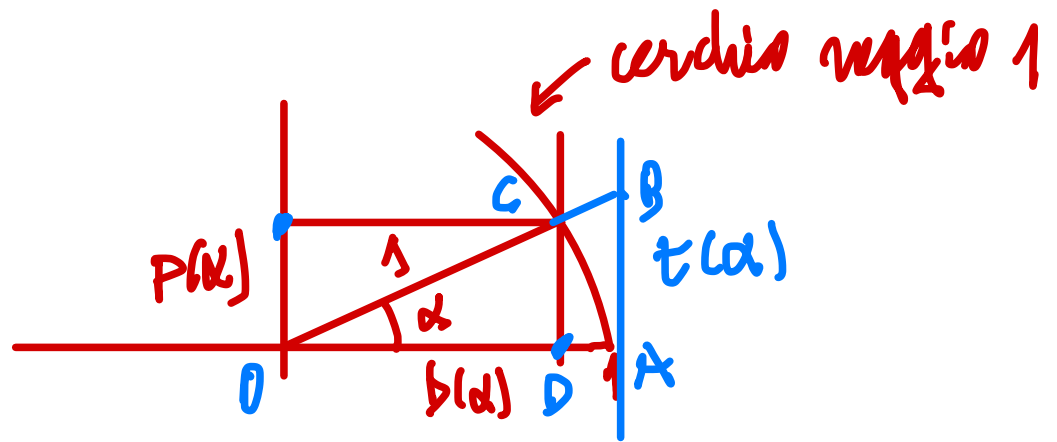
(TRI)-GONOMETRIA

Osservazione del minatore: se cambio l'angolo d'inclinazione della scala allora cambia sia l'altezza a cui arriva che la distanza delle basi del muro.

QUINDI: C'E' UNA RELAZIONE



Scale length 1: $b(\alpha)^2 + p(\alpha)^2 = 1$ Pitagore



ODC e OAB sono triangoli simili, cioè

$$\overline{OB} = k \overline{OC} \quad \overline{OA} = k \overline{OD} \quad \overline{BA} = k \overline{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CD}} = k$$

cioè i 3 rapporti tra lati simili sono identici,

quindi, in particolare

$$\frac{p(\alpha)}{b(\alpha)} = \frac{t(\alpha)}{\underbrace{\overline{OA}}_1} = t(\alpha)$$

In letteratura $s(\alpha) = \sin \alpha$ $c(\alpha) = \cos \alpha$

$t(\alpha) = \tan \alpha$. Quindi

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Qualche valore particolare

$\alpha = 45^\circ \rightarrow$ triangolo isoscele $\rightarrow$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$$

Pythagora:

$$\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 45^\circ = 1$$

$$\sin 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$$

Si derivano facilmente altri valori di $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ "semplici", per esempio

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{pitagora}} \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

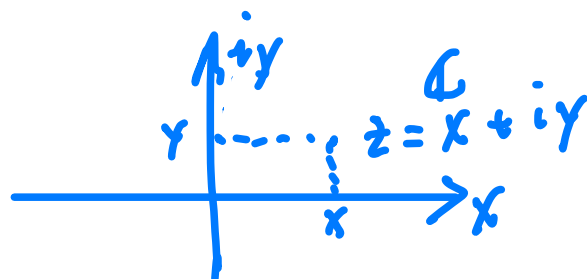
Formula utile per calcolo goniometrico, per
esempio $\cos(x+y) = \dots?$

Trick: Introduciamo un nuovo spazio,
quello dei numeri immaginari

$$i := \sqrt{-1} \quad \rightarrow \quad i^2 = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = -1$$

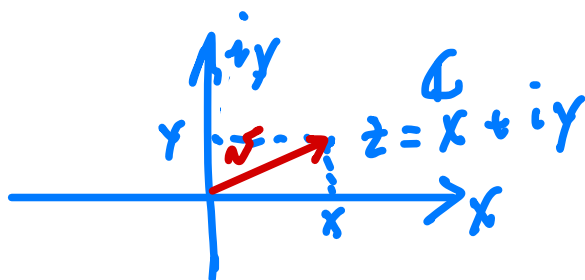
Possiamo introdurre un altro spazio ancora:
quello dei numeri complessi $\mathbb{C}$

$$z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$$



N.B. z defines in modo naturale un vettore

$$v = (x, y)$$



Nel calcolo matriciale v si denota:

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sviluppo di Taylor:

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

$$f^{(k)}(x_0) := \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=x_0}$$

Se $x_0 = 0$ allora si ha lo sviluppo di McLaurin!

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Esempio

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \left. \frac{d^k e^x}{dx^k} \right|_{x=0} = e^x, e^0 = 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Formule di Eulero

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Dimostrazione

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = -i \cdot i = 1$$

$$e^{ix} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}}_{\cos x} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin x}$$

Un modo alternativo di dimostrare la formula di Eulero è il seguente. Basterà ci accorgere che

$$\frac{d}{dx} e^{ix} = i e^{ix}$$

cioè e^{ix} è soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{df}{dx} = i f \quad *)$$

Un'equazione differenziale lineare ($\pm f$ appare solo alla potenza 1) di ordine n ha n soluzioni linearmente indipendenti. Quindi $*)$ ha solo una soluzione. D'altronde un'equazione differenziale di ordine n ha n costanti di integrazione. Nel caso di $*)$ si ha quindi una sola costante di integrazione, infatti se f è soluzione di $*)$, allora anche $c f$, con $c = \text{costante}$, è soluzione di $*)$:

$$\frac{d(c f)}{dx} = i c f \rightarrow \cancel{\frac{df}{dx} = i f}$$

Scriviamo quindi $f = A \cos \alpha + B \sin \alpha$
e verifichiamo se soddisfa *). Si ha

$$\frac{d(A \cos \alpha + B \sin \alpha)}{d\alpha} = -A \sin \alpha + B \cos \alpha$$

In effetti ponendo $B = iA$ si ha

$$\frac{d[A(\cos \alpha + i \sin \alpha)]}{d\alpha} = i[A(\cos \alpha + i \sin \alpha)]$$

Quindi $e^{i\alpha}$ e $A(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ devono essere
la stessa funzione per qualche valore di A .
Poichè $e^0 = 1$, si ha $iA \cos 0 = iA$, da cui
 $A = 1$.

Esempio di applicazione delle formule di

Come esprimere $\cos(x+y)$ e $\sin(x+y)$
in termini di $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$

Ridurre il problema utilizzando

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

$$\begin{aligned} \downarrow \\ \cos(x+y) + i \sin(x+y) &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned}$$

sono due equazioni: una per la parte **reale**,
l'altra per la parte **immaginaria**.

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$