

FORZE CONSERVATIVE

(ripasso)

Campo di forze: vettore che dipende dal punto

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{u}_x + F_y(x, y, z)\vec{u}_y + F_z(x, y, z)\vec{u}_z$$

Si può anche usare
la notazione $\vec{F}(\vec{r})$

FORZE CENTRALI

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(\underbrace{r}_{\text{lunghezza di } \vec{r}})\vec{u}_r \quad 1)$$

N.B. Alcuni autori definiscono le forze centrali come

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(\underbrace{r}_{\text{vettore}})\vec{u}_r$$

mentre la 1) è detta forza centrale a simmetria sferica

FORZA CONSERVATIVA: le tre
equivalenti definizioni

1. $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ Per qualsiasi curva chiusa, cioè $\forall \gamma \mid \partial\gamma = \emptyset$ insieme vuoto

2. $\vec{F} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gradiente}}}{\vec{\nabla}} G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right)$

3. $\underset{\substack{\nearrow \\ \text{rotore}}}{\vec{\nabla}} \times \vec{F} = \vec{0}$

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \vec{0}$$

$$1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$$

Esercizio

A) Determinare per quale valore di a e b il campo di forze

$$\vec{F}(x, y, z) = C (yz + a xy, \overset{\downarrow F_x}{xz + x^2}, \overset{\downarrow F_y}{by}, \overset{\downarrow F_z}{x})$$

è conservativo.

B) Determinare le dimensioni della costante C .

A) Abbiamo 3 equazioni:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = bx - x = 0 \rightarrow b = 1$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = y - by = 0 \rightarrow b = 1$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = z + 2x - z - ax \rightarrow a = 2$$

$$a = 2$$

$$b = 1$$

B)

$$[F] = [ma] = M L T^{-2}$$

"

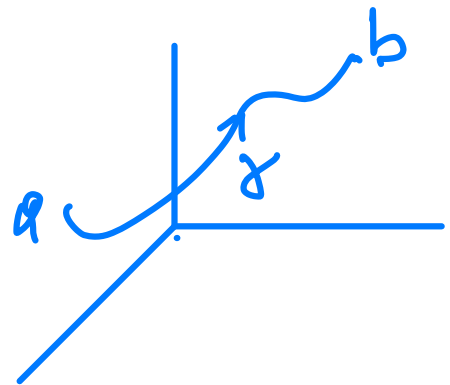
$$[C][yz] = [C] L^2$$

$$\Rightarrow [C] = M L^{-1} T^{-2}$$

ESERCIZIO:

Dimostrare che le forze centrali sono conservative

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$



N.B. a e b dipendono, ognuno, su 3-coordinate

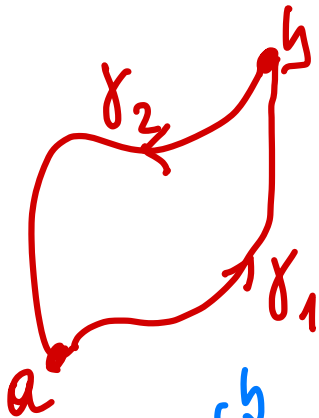
Per una forza centrale si ha $\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \vec{u}_r$,
quindi

$$\int_a^b F(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = \int_{r_a}^{r_b} F(r) dr$$

Siamo passati da un integrale di linea in 3 dimensioni, ad un integrale unidimensionale. In una dimensione c'è un solo contorno d'integrazione possibile. Quindi $\int_{\gamma}^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ non dipende da γ . Chiusamente ciò implica

$$\oint_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \gamma \mid \partial\gamma = \emptyset$$

Infatti $\oint_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1}^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2}^a \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$



$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

D'altronde $\int_{\gamma_1}^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(r) dr$

$$\int_{\gamma_2}^a \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_b^a F(r) dr = - \int_a^b F(r) dr$$