

Approfondimento sulle forze conservative e non conservative

Come già visto a lezione, un aspetto fondamentale nello studio della dinamica riguarda le forze conservative: una forza $\vec{F}$ è detta conservativa se **per qualsiasi contorno chiuso** γ si ha

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 . \quad (1)$$

Di seguito vedremo come tali forze abbiano particolari proprietà. Ciò è di estrema rilevanza in quanto sia la forza gravitazionale che quella elettrostatica sono conservative. Non lo sono invece né la forza magnetica, detta anche forza di Lorentz, né le altre due interazioni fondamentali della Natura, quella nucleare forte e la nucleare debole.

L'analisi delle forze conservative fornisce un ottimo esempio di come concetti profondi di matematica, benché tecnicamente pressoché elementari, costituiscano l'impalcatura essenziale per la piena comprensione dei fenomeni fisici sottostanti. Per tale motivo iniziamo queste note con una breve descrizione degli strumenti matematici necessari.

Consideriamo un integrale indefinito

$$\int f(x)dx = g(x) + c , \quad (2)$$

dove c è una costante arbitraria. La funzione g è una primitiva di f (le altre differiscono per una costante), cioè $f = g'$. Se, dato c , esiste almeno un x_0 tale che $g(x_0) = -c$, allora, (2) è equivalente ad un integrale definito, cioè

$$\int_{x_0}^x f(x')dx' = g(x) + c .$$

Un'ovvia proprietà degli integrali definiti in una dimensione è che questi sono indipendenti dal cammino in quanto ne esiste solamente uno. In particolare, si ha

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) ,$$

relazione nota come teorema fondamentale del calcolo. Geometricamente quest'integrale mostra che un'informazione bidimensionale, cioè l'area (con opportuno segno) sottesa dalla curva $y = f(x)$, corrisponde alla differenza tra la funzione primitiva valutata nel punto finale dell'intervallo d'integrazione e la stessa funzione valutata nell'altro estremo d'integrazione.

Considerando il caso a più dimensioni, ci si può chiedere quale siano le condizioni affinché un integrale curvilineo non dipenda dal cammino d'integrazione, bensì solamente dai suoi estremi. Consideriamo un campo vettoriale

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 ,$$

e consideriamo l'integrale lungo una curva¹ γ_{ab} di estremi $a \equiv (a_x, a_y, a_z)$ e $b \equiv (b_x, b_y, b_z)$

$$\int_{\gamma_{ab}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_{ab}} F_x(\vec{r}) dx + \int_{\gamma_{ab}} F_y(\vec{r}) dy + \int_{\gamma_{ab}} F_z(\vec{r}) dz ,$$

dove $\vec{F}(\vec{r}) \equiv \vec{F}(x, y, z)$. Si noti che i valori di x, y, z devono corrispondere a punti della curva. Essendo γ_{ab} unidimensionale, ne segue che γ_{ab} può essere parametrizzata da un singolo parametro. In particolare, denotando con t tale parametro, parametrizzare la curva vuol dire determinare le funzioni

$$x = x(t) , \quad y = y(t) , \quad z = z(t) , \quad (3)$$

in modo tale che, come t varia tra² 0 e 1, i punti $(x(t), y(t), z(t))$ riproducano tutta γ_{ab} . Ciò implica, in particolare,

$$\vec{r}(0) = a , \quad \vec{r}(1) = b .$$

L'aver introdotto una parametrizzazione permette sia di tener traccia della condizione di appartenenza alla curva γ_{ab} anche³ nell'integrando, che rendere esplicito il fatto che lo spazio su cui si calcola l'integrale è unidimensionale, cioè

$$\int_{\gamma_{ab}} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r}(t) = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt . \quad (4)$$

Si osservi che nel passaggio in questione abbiamo utilizzato le proprietà del differenziale totale. In generale, se invece delle coordinate x, y, z , si vogliono utilizzare delle coordinate s, t, u , allora una volta nota la dipendenza sia di x, y e z rispetto a s, t, u , si ha

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial u} du ,$$

e similmente per y and z . Mentre la trasformazione $x, y, z \rightarrow s, t, u$ è, nel caso generale, una mappa da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$, nel caso del differenziale $d\vec{r}$ nell'integrale (4) è necessario tener presente che questo si riferisce allo spazio su cui si integra, che è unidimensionale. Si ha quindi

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt , \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t} dt , \quad dz = \frac{\partial z}{\partial t} dt ,$$

espressione che in realtà è già inclusa nel caso generale osservando che, come segue dalla (3), le derivate di x, y, z rispetto a s e u sono nulle. Risulta quindi

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt = d\vec{r}(t) .$$

Nella precedente descrizione abbiamo introdotto il concetto di derivata parziale. Nel caso in cui una funzione dipenda da una sola variabile, come $\vec{r}(t)$ non vi è alcuna distinzione tra il concetto di derivata totale e quella parziale, cioè

$$\frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} ,$$

¹In questa parte usiamo temporaneamente la simbologia matematica, e quindi sostituiamo $d\vec{s}$ con $d\vec{r}$. I due simboli hanno lo stesso significato. In letteratura fisica si utilizza più frequentemente $d\vec{s}$.

²La scelta dell'intervallo $[0, 1]$ è del tutto convenzionale. In proposito si noti che la scelta più generale, cioè $[A, B]$, con A e B arbitrari, corrisponde al seguente banale cambio di parametro: $t \rightarrow (B - A)t + A$.

³In proposito è bene tener in mente che la funzione integranda va valutata nell'intervallo d'integrazione.

Nel caso di più dimensioni c'è invece una sostanziale differenza. Supponiamo di avere una funzione $f(x, y)$. Mentre in tal caso si ha ancora

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} , \quad \frac{df(x, y)}{dy} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} ,$$

la situazione cambia se si considera f ristretta ad uno spazio unidimensionale. Tale restrizione la si può imporre, per esempio, introducendo una dipendenza di y da x . In tal caso si ha

$$\frac{df(x, y(x))}{dx} = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} . \quad (5)$$

Come esplicito esempio, consideriamo la funzione

$$f(x, y) = x + y^2 ,$$

che è una mappa da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. Supponiamo di restringerla ad un sottospazio unidimensionale di $\mathbb{R}^2$, per esempio ponendo $y = x$. In tal caso si ha la funzione di una sola variabile

$$g(x) = f(x, y(x)) = x + x^2 .$$

Si noti che

$$\frac{dg(x)}{dx} = 1 + 2x . \quad (6)$$

D'altronde, utilizzando (5), si ha

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{df(x, y(x))}{dx} = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} , \quad (7)$$

ed osservando che

$$\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} = 1 , \quad \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} = 2y , \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 1 ,$$

e ricordando che $y = x$, si ha

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{df(x, y(x))}{dx} = 1 + 2x ,$$

che è in accordo con la (6). Risultato del tutto analogo lo si ha se invece di porre la condizione $y = x$, si introduce una nuova variabile, per esempio t , considerata come variabile indipendente, da cui dipendono x e y . Questo è il caso considerato nel trattare il precedente integrale. In proposito si noti che $f(x, y(x))$ corrisponde a $f(x(t), y(t))$ quando $x = t$.

Torniamo ora all'integrale (4). In proposito si noti che l'integrando del secondo membro è il prodotto scalare tra un campo vettoriale, funzione di $\vec{r}$, a sua volta funzione di t , e la derivata di $\vec{r}$ rispetto a t . Ne segue che, in generale, l'integrando non dipende solamente da $\vec{r}(t)$, bensì anche dalla sua derivata. Quindi, sebbene tale integrale corrisponda comunque alla differenza di una stessa funzione calcolata in $t = 1$ e $t = 0$, la struttura di tale funzione dipende, in generale, dal contorno d'integrazione γ_{ab} , descritto da $\vec{r}(t)$, $t \in [0, 1]$.

Supponiamo ora che $\vec{F}$ sia un campo vettoriale molto particolare, cioè che dipenda da una sola funzione G e nel seguente modo

$$\vec{F} \equiv (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right) := \vec{\nabla} G . \quad (8)$$

Va osservato che da tre gradi di libertà, cioè dalle tre funzioni F_x , F_y e F_z , si passa ad un solo grado di libertà, dato dal campo scalare $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Il vettore $\vec{\nabla} G$ è detto gradiente di G , ed è anche denotato $\text{grad } G$. Il simbolo

$$\vec{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) ,$$

è detto “operatore nabla”.

La rilevanza della stringente condizione (8) segue dal fatto che questa implica la semplice ma importante relazione

$$\frac{dG(\vec{r}(t))}{dt} = \vec{\nabla} G(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} ,$$

dalla quale segue immediatamente

$$\int_{\gamma_{ab}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^1 \frac{dG(\vec{r}(t))}{dt} dt = G(\vec{r}(1)) - G(\vec{r}(0)) , \quad (9)$$

cosicchè, grazie alla (3), si ha

$$\int_{\gamma_{ab}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = G(b) - G(a) . \quad (10)$$

Va sottolineato che l'argomento di G corrisponde a tre coordinate. Come vedremo, tra le forze conservative, vi sono quelle centrali e la dipendenza dal punto appare solo come dipendenza su r non su $\vec{r}$. Il motivo è dovuto al fatto che nel caso delle forze centrali, r stesso funge, come t , da parametro della curva. D'altronde, anche $G(a)$ e $G(b)$ possono essere interpretate come funzioni di una singola variabile. Per questo basta considerare la funzione composta $f = G \circ \vec{r}$, cosicchè $f(t) = G(\vec{r}(t))$; in particolare $G(a) = f(0)$ e $G(b) = f(1)$.

È utile osservare che, come nel caso dell'integrando nel secondo membro della (4), anche l'integrando nel terzo membro della (9) è una funzione che dipende dalla curva. D'altronde, come abbiamo visto, è una proprietà dell'integrale definito di corrispondere all'area delimitata dalla funzione integranda nell'intervallo in considerazione, informazione assai più ristretta che non la conoscenza della funzione integranda nell'intero intervallo d'integrazione, conoscenza necessaria se si vuole calcolare l'integrale (4) nel caso non valga la (8). A riprova di ciò, è utile menzionare che la relazione (10) vale anche nella direzione opposta. Ovvero, se $\vec{F}$ soddisfa la relazione (10), allora $\vec{F}$ corrisponde al gradiente di un campo scalare, cioè $\vec{F}$ soddisfa anche la (8).

Le relazioni (8) e (10) corrispondono al cosiddetto teorema del gradiente. Come visto, si tratta della generalizzazione a 3 dimensioni, banalmente estendibile ad un numero arbitrario di dimensioni, del teorema fondamentale del calcolo.

Dal teorema del gradiente segue immediatamente che una forza è conservativa se e solo se la forza è esprimibile come il gradiente di un campo scalare

$$\vec{F} = \vec{\nabla}G . \quad (11)$$

Infatti, dato un contorno chiuso γ possiamo sempre esprimerlo come l'unione di due curve con bordi

$$\gamma = \gamma_{ab}^1 \cup \gamma_{ba}^2 ,$$

dove γ_{ab}^1 è orientata da a a b , mentre γ_{ba}^2 è orientata da b ad a . D'altronde, dalla (10) segue

$$\oint_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_{ab}^1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_{ba}^2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = (G(b) - G(a)) + (G(a) - G(b)) = 0 ,$$

che coincide con la (1).

Come detto, ci sono due forze fondamentali in Natura che corrispondono a forze conservative. Una è la forza gravitazionale⁴

$$\vec{F}_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r , \quad (12)$$

dove γ è la costante di gravitazione universale, indicata anche con G . L'altra forza è quella elettrostatica, o di Coulomb,

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r ,$$

dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto e q_1 e q_2 le cariche elettriche. Entrambe le forze decrescono con l'inverso dell'area della sfera di raggio r . Poiché le cariche possono essere sia negative che positive, ne segue che la forza elettrostatica è sia attrattiva che repulsiva. Un'altra caratteristica che differenzia la forza gravitazionale da quella elettrostatica, sta nel fatto che le cariche elettriche hanno valori quantizzati, cioè, a parte il segno, le cariche direttamente osservabili in Natura sono sempre multipli della carica dell'elettrone. Sebbene esistano delle particelle con carica frazionaria, cioè i quarks, queste particelle non sono rivelabili separatamente come singole particelle, fenomeno noto come confinamento (ancora da dimostrare teoricamente).

Il fatto che la forza gravitazionale sia conservativa, implica che esiste un campo scalare, che denotiamo $-m_2 V_G$, tale per cui

$$\vec{F}_G = -m_2 \vec{\nabla} V_G . \quad (13)$$

⁴La forza gravitazionale è sempre attrattiva. Si noti che nella (12) seguiamo la convenzione per cui se il verso di $\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \vec{u}_r$ è diretto verso l'esterno rispetto alla massa che esercita la forza (la cui posizione è detta centro della forza), allora $F(r) > 0$, viceversa, si ha $F(r) < 0$ se $\vec{F}(\vec{r})$ è diretta verso il centro della forza. Con la convenzione opposta, (12) è riportata senza il segno meno. In tal caso il versore $\vec{u}_r$ originerebbe dalla base sulla massa rispetto alla quale si considera la forza esercitata dall'altra massa, e la sua freccia sarebbe rivolta verso la massa che esercita la forza. Si noti che, in entrambi i casi, in accordo con la terza legge della dinamica, si ha $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

La (12) implica che una massa M genera il potenziale scalare⁵

$$V_G = -\gamma \frac{M}{r} .$$

L'energia potenziale gravitazionale U_G , non è altro che il potenziale V_G moltiplicato per la massa m soggetta a tale potenziale

$$U_G = mV_G = -\gamma \frac{mM}{r} . \quad (14)$$

Segue da (13) che la forza rimane invariante se al potenziale viene aggiunta una costante. Poiché la grandezza fisica rilevante è la forza, ne segue che di per sé il potenziale gravitazionale, come anche quello elettrostatico, non è una grandezza fisica misurabile. Dalla (14) segue che la stessa energia potenziale gravitazionale non è una quantità fisicamente misurabile. D'altronde, poiché l'integrale di F_G lungo un cammino fornisce una grandezza⁶ osservabile, come il lavoro fatto dalla forza, e questo risulta proporzionale alla differenza di potenziale, si ha che sia la differenza di potenziale che di energia potenziale sono quantità osservabili.

Condizione necessaria ma non sufficiente perché una forza sia conservativa è che questa dipenda solamente dalle coordinate e non, per esempio, dalla velocità. Le due forze fondamentali conservative, forniscono esempi di forze centrali. Una forza è detta centrale se è diretta verso un punto fisso detto centro, ed inoltre il suo modulo dipende solo dalla distanza da tale centro, quindi

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{u}_r . \quad (15)$$

Si presti attenzione al fatto che taluni autori considerano $\vec{F}(\vec{r}) = F(\vec{r})\vec{u}_r$ forza centrale, mentre la definizione standard di forza centrale, cioè $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{u}_r$, è detta forza centrale a simmetria sferica. Un altro esempio di forza centrale è la forza elastica $\vec{F}(x) = -k\vec{x} = -kx\hat{x}$, $k > 0$, dove $\hat{x} = \vec{x}/x$ è il versore di $\vec{x}$. Si mostra immediatamente che una forza centrale è conservativa. Dimostriamo questa affermazione considerando per semplicità il caso di una forza in uno spazio bidimensionale. L'invarianza di $F(r)$ sotto rotazione del punto di coordinate $\vec{r} = (x, y)$ rispetto al centro degli assi, suggerisce di calcolare il lavoro utilizzando le coordinate polari

$$x = r \cos \theta , \quad y = r \sin \theta .$$

Si noti che

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta , \quad dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta . \quad (16)$$

D'altronde, $\vec{u}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$, come segue osservando che $\vec{r} = (x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$ e $\vec{u}_r = \vec{r}/r$. Si ricordi che $\vec{u}_x = (1, 0)$ e $\vec{u}_y = (0, 1)$ e $d\vec{r} = (dx, dy) = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y$. Anche all'angolo θ è associato un versore. Questo è determinato dalla richiesta che anche il nuovo sistema di riferimento sia ortogonale, quindi con i rispettivi versori ortogonali tra loro,

⁵Ciò si verifica facilmente esprimendo il gradiente in coordinate sferiche ed osservando che V_G può dipendere solamente da r .

⁶Per grandezza osservabile si intende una quantità fisica che sia misurabile sperimentalmente.

quindi $\vec{r} \cdot \vec{\theta} = 0$. Si verifica facilmente che il versore $\vec{u}_\theta = \vec{\theta}/\theta$ corrisponde al vettore unità tangente alla circonferenza di raggio r nel punto $\vec{r} = (x, y)$ e diretto in senso antiorario (gli angoli si considerano positivi se percorsi in senso antiorario). Trasportando parallelamente tale versore nell'origine delle coordinate, si vede facilmente che $\vec{u}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Come verifica, si noti che $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) = 0$. Eq.(16) implica

$$d\vec{r} = (dx, dy) = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta .$$

Si ha quindi

$$\int_{\gamma_{ab}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_{ab}} F(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = \int_{r_a}^{r_b} F(r) dr ,$$

dove si è utilizzato $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = 0$, cosicché

$$\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta) = dr . \quad (17)$$

Quest'ultima relazione la si può ottenere più direttamente differenziando $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$

$$d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2\vec{r} \cdot d\vec{r} = 2r dr ,$$

che, divisa per r , riproduce (17).

Spesso i problemi trattati possiedono delle simmetrie sotto rotazioni. Per questo motivo è utile lavorare in coordinate cilindriche o sferiche. Le coordinate cartesiane espresse in termini di coordinate cilindriche sono

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi , \quad z = z ,$$

$r \geq 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$ mentre per le coordinate sferiche si ha

$$x = r \sin \theta \cos \phi , \quad y = r \sin \theta \sin \phi , \quad z = r \cos \theta ,$$

$r \geq 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi)$. Generalizzando l'analisi precedentemente fatta per il cambio di variabili nel calcolo differenziale, si può mostrare che l'operatore $\vec{\nabla}$ in coordinate cilindriche è

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} ,$$

mentre in coordinate sferiche si ha

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{u}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} .$$

Un modo per ricordarsi l'espressione di $\vec{\nabla}$ in coordinate cilindriche e sferiche, è osservare che ogni termine deve avere le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. Questo fissa i termini dove compare il termine $1/r$. L'unico sforzo di memoria è ricordarsi il termine $1/\sin \theta$ che moltiplica il versore $\vec{u}_\phi$.

È utile osservare che per esprimere un vettore arbitrario

$$\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z , \quad (18)$$

in coordinate curvilinee (le coordinate polari, cilindriche e sferiche hanno basi ortogonali) è necessario prima esprimere i versori cartesiani $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$, in termini dei rispettivi versori curvilinei. Nel caso delle coordinate cilindriche si ha

$$\vec{u}_x = \cos \phi \vec{u}_r - \sin \phi \vec{u}_\phi + 0 \vec{u}_z ,$$

$$\vec{u}_y = \sin \phi \vec{u}_r + \cos \phi \vec{u}_\phi + 0 \vec{u}_z ,$$

$$\vec{u}_z = 0 \vec{u}_r + 0 \vec{u}_\phi + \vec{u}_z .$$

Nel caso delle coordinate sferiche

$$\vec{u}_x = \sin \theta \cos \phi \vec{u}_r + \cos \theta \cos \phi \vec{u}_\theta - \sin \phi \vec{u}_\phi ,$$

$$\vec{u}_y = \sin \theta \sin \phi \vec{u}_r + \cos \theta \sin \phi \vec{u}_\theta + \cos \phi \vec{u}_\phi ,$$

$$\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta + 0 \vec{u}_\phi .$$

Per determinare le componenti del vettore $\vec{A}$, per esempio in coordinate sferiche, basta esprimere $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ e $\vec{u}_z$ in (18) in termini delle loro versioni sferiche e quindi identificare i coefficienti di $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ e $\vec{u}_\phi$, con i coefficienti A_r, A_θ e A_ϕ in

$$\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\phi \vec{u}_\phi .$$

Un'interessante proprietà del gradiente di una campo scalare $f(x, y, z)$ è che ∇f risulta un vettore ortogonale alle superfici definite dalla relazione $f(x, y, z) = c$, dove c è una costante. Il fatto che $f(x, y, z) = c$ determini una superficie risulta chiaro se si osserva che $f(x, y, z)$ è una mappa da $\mathbb{R}^3$ ad $\mathbb{R}$. Il porre $f(x, y, z) = c$ determina una relazione tra le tre coordinate di $\mathbb{R}^3$, il che riduce i gradi di libertà da tre a due, che sono i gradi di libertà di una superficie. Nel caso del potenziale elettrostatico V , le superfici determinate da $V(x, y, z) = c$, sono dette equipotenziali. Per mostrare che $\vec{\nabla} f$ è ortogonale alle superfici dove $f(x, y, z)$ è costante, si osservi che il differenziale totale di f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz , \quad (19)$$

è esprimibile in termini di $\vec{\nabla} f$

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = |\vec{\nabla} f| \cos \theta dr , \quad (20)$$

dove θ è l'angolo tra $\vec{\nabla} f$ e $\vec{r}$. Si ha quindi

$$\frac{df}{dr} = |\vec{\nabla} f| \cos \theta ,$$

il che implica

1. se $\vec{r}$ è parallelo e concorde a $\vec{\nabla} f$, allora $\cos \theta = 1$, da cui segue che in questo caso la variazione di f è la massima possibile. Questo significa che spostandosi nella direzione di $\vec{\nabla} f$ si ha la massima variazione possibile di f .

2. Se $\vec{r}$ è ortogonale a $\vec{\nabla}f$, cioè $\cos\theta = 0$, allora $df = 0$. Il che significa che lungo la direzione di $\vec{r}$ la variazione di f è nulla, cioè f è costante lungo la direzione ortogonale a $\vec{\nabla}f$.

La (19) e la (20) mostrano che l'origine delle proprietà del gradiente risiedono nel fatto che questo definisce il differenziale totale df . Infatti, integrando la (19) si ha

$$\int_{f_a}^{f_b} df = \int_{\gamma_{ab}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) . \quad (21)$$

D'altronde il primo membro è calcolabile direttamente

$$\int_{f_a}^{f_b} df = f_b - f_a ,$$

mentre il secondo corrisponde a $f(b) - f(a)$. Prestando attenzione al cambio delle variabili di integrazione, è chiaro che $f_a = f(a)$ e $f_b = f(b)$.

Esiste un modo univoco di stabilire se una forza è conservativa, cioè se è esprimibile in termini di un gradiente di un campo scalare. Benché il modo ovvio sia verificare che il suo integrale sia nullo per ogni curva chiusa, esiste un modo molto più rapido, basato sulla seguente identità⁷

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}G = \vec{0} , \quad (22)$$

dove $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ è il “prodotto vettoriale” tra l'operatore nabla $\vec{\nabla}$ e il vettore $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) .$$

Tale quantità è detta rotore di $\vec{A}$, ed è anche denotata come $\text{rot } \vec{A}$. L'identità (22) si verifica immediatamente. Per esempio, per la componente x si ha⁸

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}G)_x = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y} = 0 .$$

Utilizzando il rotore si mostra immediatamente che le forze centrali sono conservative. Infatti, si noti che

$$F(\vec{r}) = F(r)\vec{u}_r ,$$

è un vettore già espresso in coordinate sferiche. Senza dover esprimere il rotore in coordinate sferiche, basta osservare che essendo le coordinate sferiche, coordinate ortogonali, risulta che le componenti del rotore corrispondono a derivate di una componente del vettore rispetto alle altre componenti. Questo significa che non vi è alcuna componente del rotore in cui compaia la derivata rispetto ad r di $F(r)$. Quindi le uniche derivate di $F(r)$ che compaiono in $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ sono

$$\frac{\partial F(r)}{\partial \theta} , \quad \frac{\partial F(r)}{\partial \phi} ,$$

⁷L'utilizzo del simbolo di vettore in $\vec{0}$ segnala il fatto che il secondo membro è il vettore nullo.

⁸Si noti che in questo calcolo stiamo assumendo che le derivate miste commutino. Ovviamente ciò dipende dalla proprietà di derivabilità della funzione G , proprietà che negli aspetti di interesse fisico è generalmente soddisfatta.

che sono entrambe nulle in quanto $F(r)$ non dipende né da θ né da ϕ .

Un'altra applicazione dell'operatore $\vec{\nabla}$, riguarda la divergenza di un vettore $\vec{A}$. Questo è dato dal prodotto scalare tra $\vec{\nabla}$ e $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} .$$

Come vedremo durante il corso, anche la divergenza di un vettore gioca un ruolo importante nelle equazioni di Maxwell. L'ultima tra le applicazioni più note dell'operatore $\vec{\nabla}$, riguarda il laplaciano, corrispondente al prodotto scalare di $\vec{\nabla}$ con se stesso

$$\Delta := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Tale operatore differenziale si applica sia a campi scalari che vettoriali. Per esempio

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} .$$

Terminiamo questa parte riguardante l'introduzione dell'operatore $\vec{\nabla}$ menzionando l'utile tabella dove sono riportate, tra l'altro, le espressioni di gradiente, divergenza e rotore in coordinate cilindriche e sferiche.

Le forze si distinguono in tre classi: resistenti, nulle e motrici, a seconda che l'angolo formato tra la forza e lo spostamento elementare o con la velocità del punto materiale sia ottuso, retto oppure acuto.

Una forza resistente è anche detta dissipativa, corrispondente al caso in cui la sua potenza è negativa. Esempi sono le forze di attrito e le forze di resistenza nel mezzo, dove nel riferimento solidale col fluido la resistenza del mezzo ha sempre orientamento opposto alla velocità.

Forze la cui potenza è sempre nulla, perché ortogonali alla velocità del punto, sono le cosiddette forze di deviazione. Il tipico esempio è la forza magnetica, o di Lorentz,

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} ,$$

dove q è la carica della particella, $\vec{v}$ la sua velocità e $\vec{B}$ il campo magnetico a cui è soggetta. Poiché $\vec{F}$ è proporzionale al prodotto vettoriale tra la velocità e il campo magnetico, si ha che $\vec{F}_L$ è perpendicolare sia a $\vec{v}$ che a $\vec{B}$. D'altronde, poiché la velocità è sempre parallela allo spostamento, segue che, lungo la traiettoria, l'angolo tra $\vec{F}_L$ e $d\vec{s}$ è sempre nullo, da cui

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 .$$

Da quanto detto sembrerebbe che $\vec{F}_L$ sia una forza conservativa: se l'integrando in

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} ,$$

è nullo, a maggior ragione sarà nullo l'integrale lungo una curva chiusa. Questo fraintendimento è il motivo per cui all'inizio di queste note è stato sottolineato che la condizione necessaria e sufficiente affinché una forza sia conservativa è che l'integrale (1) sia nullo

per qualsiasi contorno chiuso γ . Questo significa che in generale γ non corrisponde alla traiettoria fisica della carica. Segue che in generale il differenziale $d\vec{s}$ in (1) **non corrisponde allo spostamento infinitesimo della particella.** Va sottolineato che nel bilancio energetico si devono considerare tutti i tipi di energia, inclusa quella termica e quella dovuta a fenomeni chimici, energie di natura ben distinta rispetto all'energia meccanica, data dalla somma dell'energia cinetica e di quella potenziale. Mentre ogni forma di energia può non conservarsi, l'energia totale si conserva sempre. Quindi, il termine “conservativo” ha implicazioni diverse quando lo si considera nell'ambito dell'energia o nell'ambito delle proprietà delle forze.

Un altro tipo di forze che non compiono lavoro sono le forze vincolari esplicitate da vincoli bilateri lisci. Un esempio è il caso di una massa che scivola senza attrito su un piano inclinato. Infine, la forza di Coriolis fornisce un altro esempio di forza che non compie lavoro.