

Spiegazione di un errore molto frequente

Nonostante sia stato spiegato più volte a lezione, nelle note e nelle esercitazioni, alcun* student* non hanno tuttora capito come mai l'integrale di una distribuzione di carica a simmetria sferica, quindi $\rho(r)$, non corrisponda al volume per la densità di carica, cioè $4\pi\rho(r)r^3/3$. Questo accade quando ρ non dipende da r ! In altre parole, è come chiedersi come mai non vale l'uguaglianza

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x) .$$

L'eguaglianza sarebbe corretta se $f(x) = \text{costante}$, ma è generalmente falsa se $f(x)$ dipende da x .

Consideriamo la carica racchiusa dalla superficie sferica di raggio r di una distribuzione sferica $\rho(r)$ che è zero per $r > R$, cioè $\rho(r > R) = 0$,

$$q(r) = \int_{V_r} \rho(r')d\tau ,$$

dove V_r è il volume di una sfera di raggio r . Poiché l'integrando dipende solo da r , è conveniente utilizzare le coordinate sferiche:

$$x = r \sin \theta \cos \phi , \quad y = r \sin \theta \sin \phi , \quad z = r \cos \theta ,$$

con $\theta \in [0, \pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $r \geq 0$. Inoltre si dimostra che

$$d\tau := dxdydz = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr .$$

L'integrale è quindi equivalente a

$$q(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^r r'^2 \rho(r') \sin \theta d\theta d\phi dr' .$$

Poiché $\rho(r')$ non dipende né da θ né da ϕ , segue che l'integrale in θ e ϕ si può calcolare direttamente. Come mostrato a lezione, si ha

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi ,$$

quindi

$$q(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' .$$

Si noti che, essendo $\rho(r) = 0$ per $r > R$, si ha che per $r \geq R$

$$q(r \geq R) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' = 4\pi \int_0^R r'^2 \rho(r') dr' = q(R) ,$$

come ovvio visto che

$$\int_0^r r'^2 \rho(r') dr' = \int_0^R r'^2 \rho(r') dr' + \int_R^r r'^2 \rho(r') dr' = \int_0^R r'^2 \rho(r') dr' + 0 = \frac{q(R)}{4\pi} ,$$

dove abbiamo usato il fatto che l'integrando nel secondo integrale al secondo membro è nullo, poichè $\rho(r > R) = 0$.

Nel caso in cui $\rho(r)$ è costante in due regioni, quindi $\rho(r) = \rho$ per $r \leq R$ e $\rho(r) = 0$ per $r \geq R$, si ha

$$q(r \leq R) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho dr' = 4\pi \rho \int_0^r r'^2 dr' = \frac{4}{3} \rho \pi r^3 ,$$

e

$$q(r \geq R) = 4\pi \rho \int_0^R r'^2 dr' = \frac{4}{3} \rho \pi R^3 .$$

Si presti quindi la dovuta attenzione al fatto che solo in questo caso particolare, cioè in cui $\rho(r) = \rho$ è costante, è stato possibile estrarlo dall'integrale.