

**Compito di Fisica Generale, II Semestre
Chimica Industriale
Padova - Dipartimento di Chimica - 21 Maggio 2026**

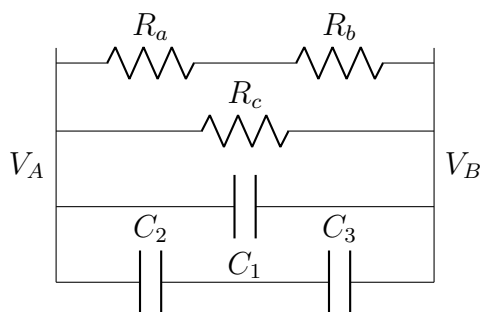
Problema 1

Si consideri una sfera conduttrice piena, senza cavità, di raggio R_1 e carica positiva q_1 . La sfera è concentrica a una superficie sferica di raggio $R_2 > R_1$, sulla quale è presente una distribuzione uniforme di carica superficiale di carica totale positiva q_2 . Indicando con r la distanza dal centro comune O , determinare

1. il campo elettrostatico in tutto $\mathbb{R}^3$,
2. il potenziale elettrostatico $V(r)$ in tutto $\mathbb{R}^3$, tale che $V(R_2) = 0$,
3. assumendo che l'aggiunta della carica non modifichi le distribuzioni di carica assegnate nei punti precedenti, il campo elettrostatico totale in $\mathbb{R}^3$ nel caso sia aggiunta una carica puntiforme positiva q_3 in un punto distante $R_3 = 2R_2$ da O .

Problema 2

Tra i morsetti A e B del circuito mostrato in figura, con $V_A \neq V_B$, sono collegati un blocco resistivo e un blocco capacitivo. Il blocco resistivo contiene due resistenze in serie, poste in parallelo con una terza resistenza. Il blocco capacitivo contiene un condensatore in parallelo con due condensatori in serie. Si riscriva il circuito equivalente usando una sola resistenza equivalente R_{eq} e un solo condensatore equivalente C_{eq} . Non si richiede lo studio dell'evoluzione temporale del circuito, cioè della fase di carica o scarica dei condensatori.



Domanda: si descriva la legge di Coulomb.

Problema 1

Poiché la configurazione dei primi due punti è sfericamente simmetrica, il campo elettrostatico ha la forma

$$\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r .$$

La sfera di raggio R_1 è conduttrice. Quindi, in condizioni elettrostatiche, il campo al suo interno è nullo:

$$\vec{E}(r) = 0 , \quad 0 \leq r < R_1 .$$

Per $R_1 \leq r < R_2$, una superficie gaussiana sferica di raggio r racchiude la carica q_1 . Dalla legge di Gauss,

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q_1}{\epsilon_0} ,$$

perciò

$$\vec{E}(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r , \quad R_1 \leq r < R_2 .$$

Per $r \geq R_2$, la superficie gaussiana racchiude la carica totale $q_1 + q_2$. Quindi

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0} ,$$

da cui

$$\vec{E}(r) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r , \quad r \geq R_2 .$$

In sintesi,

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 , & 0 \leq r < R_1 , \\ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r , & R_1 \leq r < R_2 , \\ \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r , & r \geq R_2 . \end{cases}$$

In particolare,

$$\vec{E}(R_1) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \vec{u}_r , \quad \vec{E}(R_2) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \vec{u}_r .$$

Calcoliamo ora il potenziale, imponendo la condizione

$$V(R_2) = 0 .$$

Per $R_1 \leq r \leq R_2$ si ha

$$V(r) - V(R_2) = - \int_{R_2}^r \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' ,$$

e quindi

$$V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) , \quad R_1 \leq r \leq R_2 .$$

All'interno della sfera conduttrice il potenziale è costante e coincide con il valore assunto sulla superficie del conduttore:

$$V(r) = V(R_1) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) , \quad 0 \leq r \leq R_1 .$$

Per $r \geq R_2$ si deve invece usare il campo generato dalla carica totale $q_1 + q_2$:

$$V(r) - V(R_2) = - \int_{R_2}^r \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' ,$$

da cui

$$V(r) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) , \quad r \geq R_2 .$$

In sintesi,

$$V(r) = \begin{cases} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) , & 0 \leq r \leq R_1 , \\ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) , & R_1 \leq r \leq R_2 , \\ \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) , & r \geq R_2 . \end{cases}$$

Si noti che il potenziale è continuo in $r = R_1$ e in $r = R_2$, mentre il campo elettrostatico presenta le discontinuità associate alle cariche superficiali.

Consideriamo ora il terzo punto. Sia $\vec{a}$ il vettore posizione della carica puntiforme q_3 , con

$$|\vec{a}| = R_3 = 2R_2 .$$

Indichiamo con $\vec{x}$ il vettore posizione del punto generico dello spazio:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z), \quad r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

La carica q_3 rompe la simmetria sferica, per cui il campo totale non dipende più soltanto da r , ma dal punto $\vec{x}$ dello spazio. Per sovrapposizione, mantenendo assegnate le distribuzioni di carica dei punti precedenti, si ha

$$\vec{E}_{\text{tot}}(\vec{x}) = \vec{E}_{12}(\vec{x}) + \vec{E}_3(\vec{x}),$$

dove

$$\vec{E}_{12}(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R_1, \\ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{x}, & R_1 \leq r < R_2, \\ \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{x}, & r \geq R_2, \end{cases}$$

mentre, per $\vec{x} \neq \vec{a}$,

$$\vec{E}_3(\vec{x}) = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{a}}{|\vec{x} - \vec{a}|^3}.$$

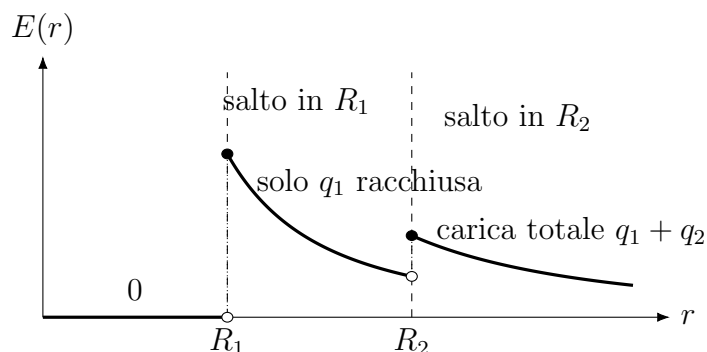
Quindi

$$\boxed{\vec{E}_{\text{tot}}(\vec{x}) = \vec{E}_{12}(\vec{x}) + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{a}}{|\vec{x} - \vec{a}|^3}}, \quad \vec{x} \neq \vec{a}.$$

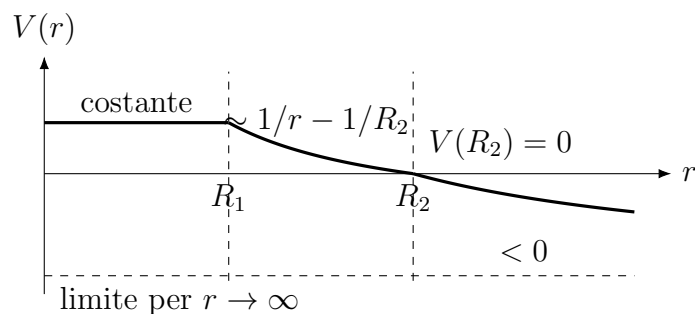
Nel punto $\vec{x} = \vec{a}$ il campo della carica puntiforme diverge.

Grafici qualitativi di $E(r)$ e $V(r)$

Nei grafici seguenti le scale verticali sono scelte solo per rendere visibili gli andamenti. Le formule indicate nella soluzione precedente sono quelle generali.



Il campo è nullo per $0 \leq r < R_1$, vale $q_1/(4\pi\epsilon_0 R_1^2)$ sulla superficie $r = R_1$, decresce come $1/r^2$ per $R_1 < r < R_2$ e assume il valore $(q_1 + q_2)/(4\pi\epsilon_0 R_2^2)$ sulla superficie $r = R_2$. Per $r > R_2$ la carica racchiusa è $q_1 + q_2$.



Il potenziale è continuo in R_1 e in R_2 . Con la convenzione $V(R_2) = 0$, esso è positivo per $0 \leq r < R_2$, vale zero in R_2 , è negativo per $r > R_2$ e tende al valore

$$V(\infty) = -\frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Problema 2

Il blocco resistivo si riduce usando prima la serie R_a, R_b :

$$R_{ab} = R_a + R_b .$$

Poiché R_{ab} è in parallelo con R_c , si ha

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_a + R_b} + \frac{1}{R_c} , \quad R_{\text{eq}} = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} .$$

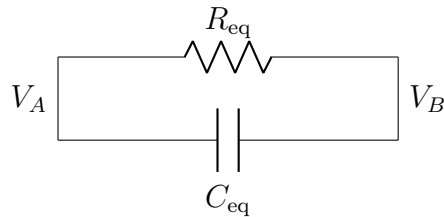
Il blocco capacitivo si riduce usando prima la serie C_2, C_3 :

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} , \quad C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} .$$

Poiché C_{23} è in parallelo con C_1 , si ha

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_{23} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} .$$

Il circuito equivalente tra i morsetti A e B è quindi il seguente:



In sintesi,

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} , \quad C_{\text{eq}} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} .$$