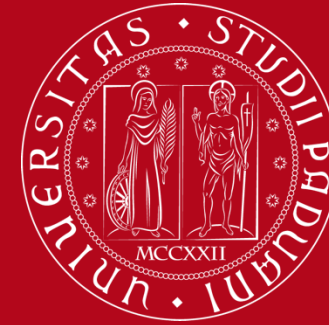


Corso di Fisica Generale – Pt1

Chimica Industriale 25/26



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

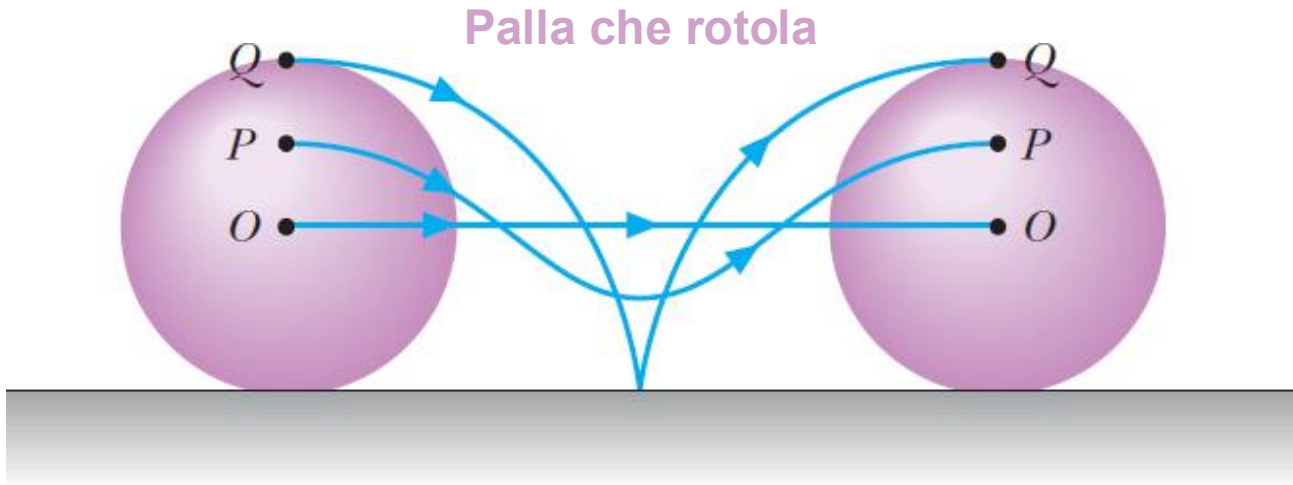
Lez 7. Dinamica del corpo rigido

Docente:

Alessandro Patelli
alessandro.patelli@unipd.it



- Definizione di corpo rigido. Prime proprietà
- Corpo continuo. Densità. Posizione del centro di massa
- Moto di un corpo rigido
- Equilibrio statico del corpo rigido
- Rotazioni rigide attorno a un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale
- Momento d'inerzia
- Teorema di Huygens- Steiner
- Moto di puro rotolamento
- Pendolo composto
- Impulso angolare. Momento dell'impulso
- Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido
- Cenni sulle proprietà elastiche dei solidi reali



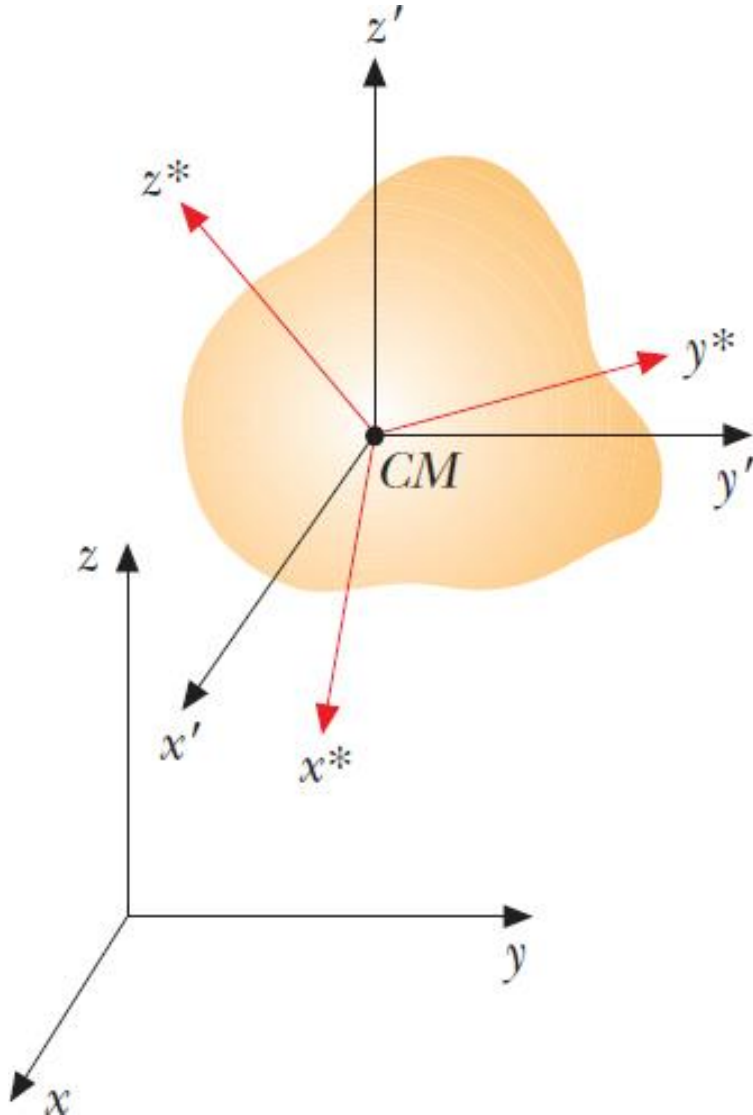
CORPO RIGIDO

sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare.

Le traiettorie dei singoli punti sono diverse ma le posizioni relative sono costanti.

Se le posizioni relative dei punti sono costanti allora lo è anche la loro posizione rispetto al centro di massa CM

Nel sistema del CM allora i punti possono solo essere in quiete o ruotare lungo una circonferenza.



O □ Il sistema O è inerziale

O' □ Il sistema O' non è inerziale, è il sistema del CM, ha gli assi paralleli a O

O* □ Il sistema O* non è inerziale, è il solidale al corpo e ha l'origine nel CM

Omettiamo le (E) che indicano le forze esterne. Possiamo dire che il moto del corpo deriva dalle seguenti equazione

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{\text{CM}}, \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad W = \Delta E_k,$$

1° eq. cardinale

2° eq. cardinale

Teorema energia cinetica



Dal sistema puntuale ai corpi continui

L'estensione ai sistemi continui di punti comporta:

1. la sostituzione di sommatorie con integrali
2. la sostituzione delle masse con la densità

la densità di
un corpo

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \text{la massa infinitesima e il volume da essa occupato.}$$

la massa di
un corpo

$$m = \int dm = \int_V \rho dV \xrightarrow{\text{se } \rho = \text{cost}} = \rho V \quad \text{corpo omogeneo, } \rho = \text{cost}$$

Se il corpo **non è omogeneo tri-dimensionale** 3D, allora posso definire una densità media $\bar{\rho} = m/V$

Se il corpo è **bi-dimensionale** 2D, allora posso definire una densità superficiale $\bar{\rho}_s = m/S$

Se il corpo è **uni-dimensionale** 1D, allora posso definire una densità lineare $\bar{\rho}_l = m/L$

TABELLA 6.1 Densità di alcune sostanze (kg/m³)

berillio	$1.85 \cdot 10^3$	ioduro di sodio	$3.67 \cdot 10^3$
carbonio (grafite pura)	$2.27 \cdot 10^3$	vetro comune	$2.4 \div 2.8 \cdot 10^3$
alluminio	$2.70 \cdot 10^3$	vetro Pyrex	$2.23 \cdot 10^3$
silicio	$2.33 \cdot 10^3$	quarzo	$2.64 \cdot 10^3$
ferro	$7.87 \cdot 10^3$	plexiglas	$1.18 \cdot 10^3$
rame	$8.96 \cdot 10^3$	ghiaccio	$0.92 \cdot 10^3$
argento	$10.5 \cdot 10^3$	legno (quercia)	$0.6 \div 0.9 \cdot 10^3$
oro	$19.3 \cdot 10^3$	cemento armato	$2.4 \div 2.5 \cdot 10^3$
tungsteno	$19.35 \cdot 10^3$	mercurio	$13.59 \cdot 10^3$
platino	$21.45 \cdot 10^3$	acqua a 4°C	$1.00 \cdot 10^3$
piombo	$11.35 \cdot 10^3$		

	$R(m)$	$V(m^3)$	$m(kg)$	$\bar{\rho}(kg/m^3)$
terra	$6.37 \cdot 10^6$	$1.08 \cdot 10^{21}$	$5.98 \cdot 10^{24}$	$5.54 \cdot 10^3$
sole	$6.96 \cdot 10^8$	$1.41 \cdot 10^{27}$	$1.98 \cdot 10^{30}$	$1.40 \cdot 10^3$
sole collassato	880	$2.85 \cdot 10^9$	$1.98 \cdot 10^{30}$	$6.95 \cdot 10^{20}$
nucleo del ferro	$5.60 \cdot 10^{-15}$	$7.36 \cdot 10^{-43}$	$9.27 \cdot 10^{-26}$	$1.26 \cdot 10^{17}$

Dalla definizione del CM allora possiamo scrivere

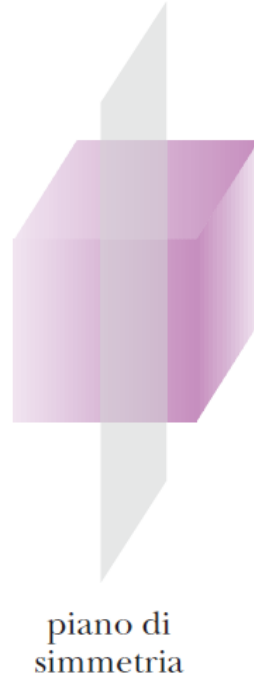
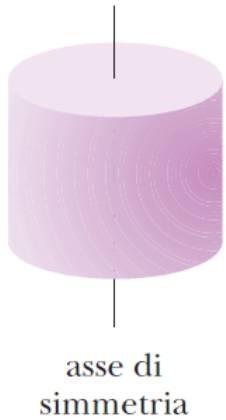
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV} = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \rho dV$$

Se il corpo è poi omogeneo $\rho = \text{costante}$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\rho}{m} \int_V \vec{r} dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$$

Se il corpo è omogeneo il centro di massa CM coincide con il centro geometrico del corpo.

Nel risolvere gli integrali si osservi che $\vec{r}$ e ρ sono funzioni delle coordinate e che anche dV è esprimibile in termini di coordinate: per esempio, in coordinate cartesiane, $dV = dx dy dz$. L'integrale è un integrale triplo.

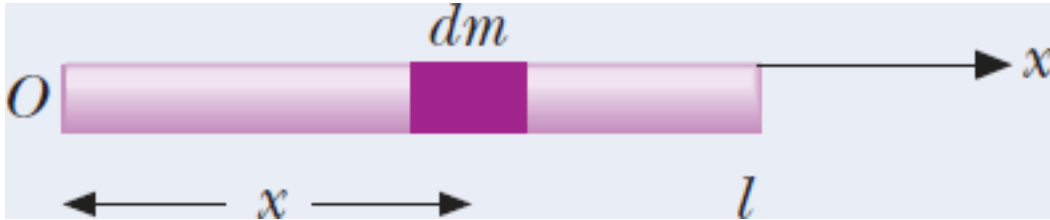


Se un corpo omogeneo
è simmetrico rispetto a

Il CM coincide con

un punto	→	centro di simmetria
un asse	→	un punto dell'asse
un piano	→	un punto del piano

Se esistono più assi o piani di simmetria, il centro di massa sta sulla loro intersezione. Ad esempio, in un triangolo equilatero ci sono tre assi di simmetria che sono le tre mediane; il centro di massa sta nel loro punto di intersezione.



$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int_l x \rho_l dx$$

Se il corpo è omogeneo $\rho_l = \text{costante}$

$$x_{CM} = \frac{\rho_l}{m} \int_l x dx = \frac{\rho_l}{m} \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{1}{l} \frac{l^2}{2} = \frac{l}{2}$$

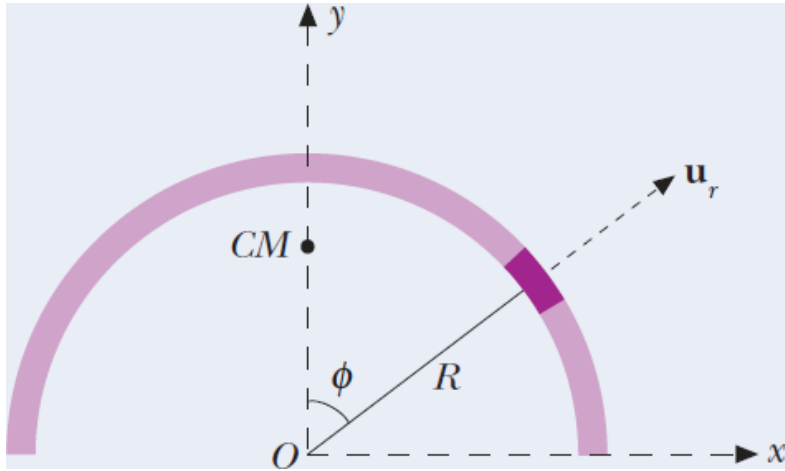
Se il corpo non è poi omogeneo $\rho_l = P_l \frac{x}{l}$

$$x_{CM} = \frac{P_l}{m} \int_l x \frac{x}{l} dx = \frac{2}{l} \frac{x^3}{3l} \Big|_0^l = \frac{2}{l} \frac{l^3}{3l} = \frac{2}{3} l$$

$$m = P_l \int_l \frac{x}{l} dx = P_l \frac{x^2}{2l} \Big|_0^l = P_l \frac{l^2}{2l} = \frac{P_l}{2} l$$

Se il corpo non è poi omogeneo $\rho_l = P_l e^{-2\frac{x^2}{l^2}}$

$$x_{CM} = \frac{P_l}{m} \int_l x e^{-2\frac{x^2}{l^2}} dx = \frac{P_l}{m} \frac{-l^2 e^{-2\frac{x^2}{l^2}}}{4} \Big|_0^l = \frac{P_l}{m} \frac{l^2}{4} (1 - e^{-2})$$



Se il corpo è omogeneo $\rho_l = \text{costante}$

$$\rho_l = \frac{m}{\pi R}$$

*Scompongo lungo gli assi.
E' una somma di vettori.*

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{\rho_l}{m} \int_V \vec{r} dV = \frac{1}{\pi R} \int_L \vec{r} dl = \frac{1}{\pi R} \int_L R \hat{u}_r R d\phi \\ &= \frac{R}{\pi} \int_L \hat{u}_r d\phi = \frac{R}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \phi d\phi \hat{u}_x + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi \hat{u}_y \\ &= \cancel{\frac{R}{\pi} \cos \phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{u}_x} - \frac{R}{\pi} \sin \phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{u}_y \\ &= \frac{R}{\pi} \sin \phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{u}_y = \frac{R}{\pi} (1 - (-1)) \hat{u}_y = \frac{2R}{\pi} \hat{u}_y \end{aligned}$$

*Del resto simmetrico
rispetto a x*



Come abbiamo già visto per il sistema di punti per un campo di forze parallelo

Per la forza
di gravità

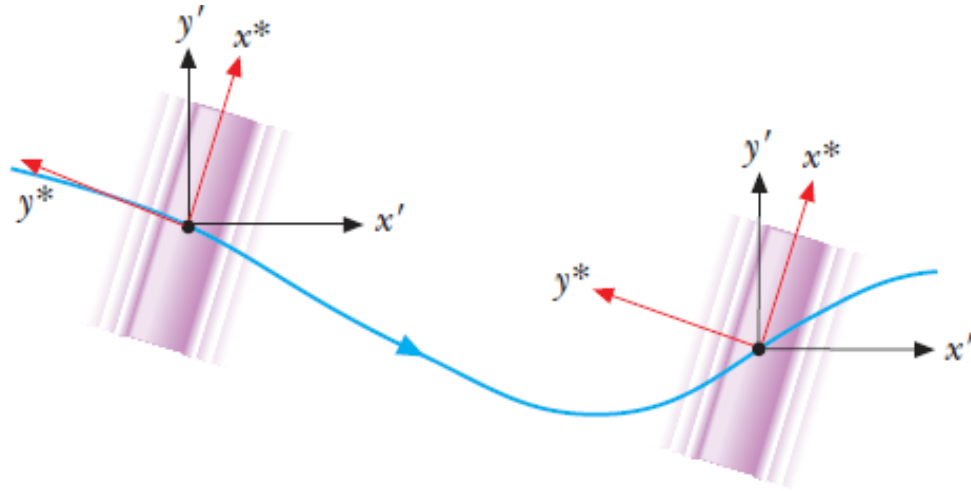
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = - \sum_i m_i g \hat{z} \rightarrow \vec{F} = g \int_V \rho dV \hat{z} = mg \hat{z}$$

Per il momento
della forza di gravità

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = g \sum_i m_i \vec{r}_i \times \hat{z} \rightarrow \vec{M} = g \int_V \rho \vec{r} dV \times \hat{z} = mg \vec{r}_{CM} \times \hat{z}$$

Per l'energia
potenziale

$$E_p = \sum_i m_i g z_i = g \sum_i m_i z_i \rightarrow E_p = g \int_V \rho z dV = mg \vec{z}_{CM}$$



Traslazione $\vec{L} = 0$ $E'_k = 0$

quantità di moto: $\mathbf{P} = m \mathbf{v}_{CM}$

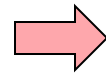
energia cinetica: $E_k = E_{k,CM} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$

Il moto è determinato dall'equazione

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_{CM}$$

Il momento angolare da'

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$$



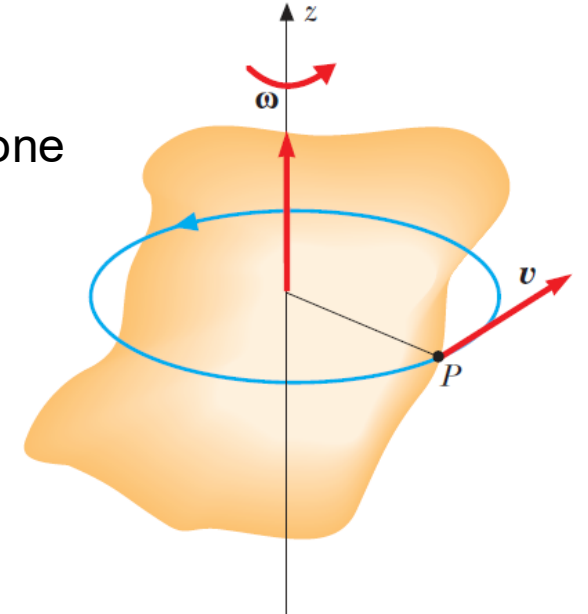
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \times m \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times m \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F} = \vec{M}_{CM}$$

$\vec{L}$ dipende da $\vec{P}$, la seconda equazione cardinale non aggiunge nessuna informazione

Rotazione

Il moto è determinato dall'equazione

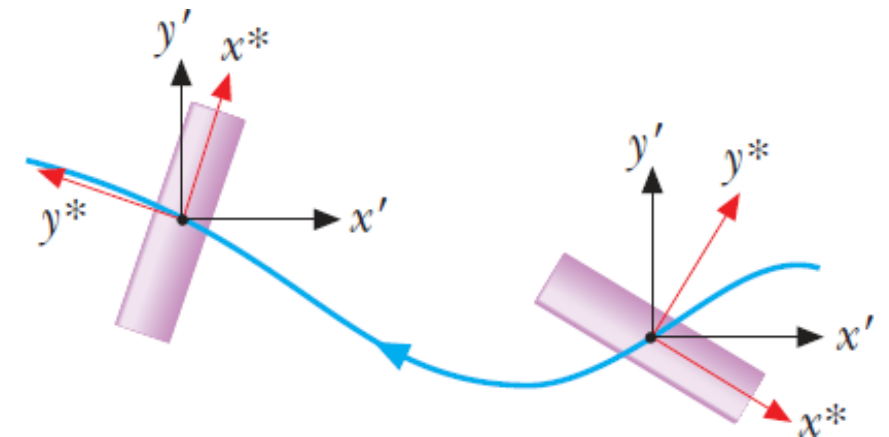
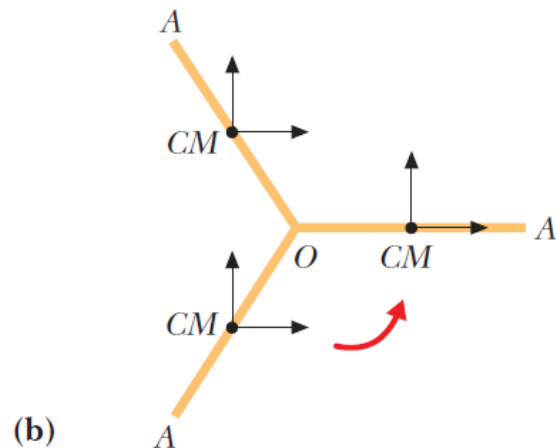
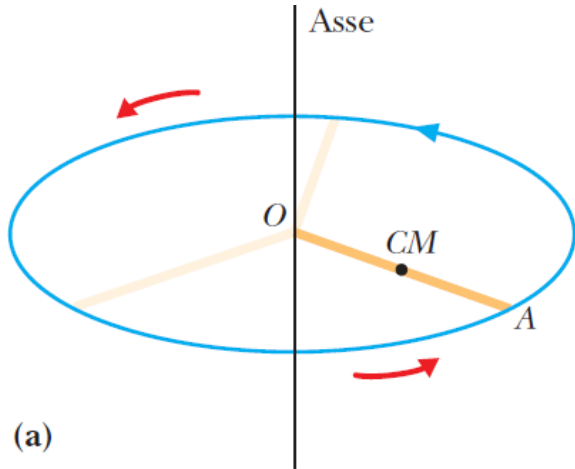
$$\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$$



Roto-traslazione

Il moto è determinato dalle equazioni cardinali ma si può vedere in modi diversi

- una rotazione pura attorno all'asse
- una rotazione attorno a un asse passante per il centro di massa e parallelo al precedente, una traslazione individuata dal moto circolare del centro di massa.

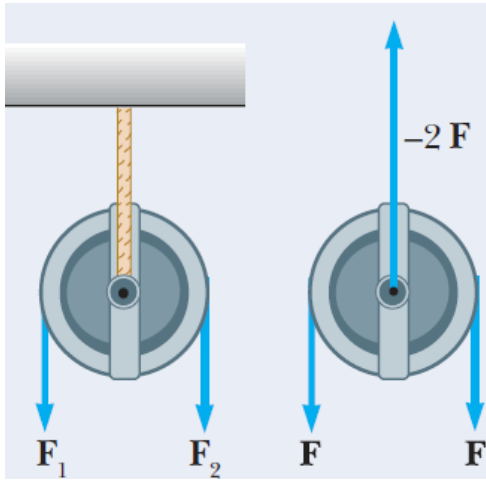


$$\sum \vec{F} = 0$$

1° eq cardinale

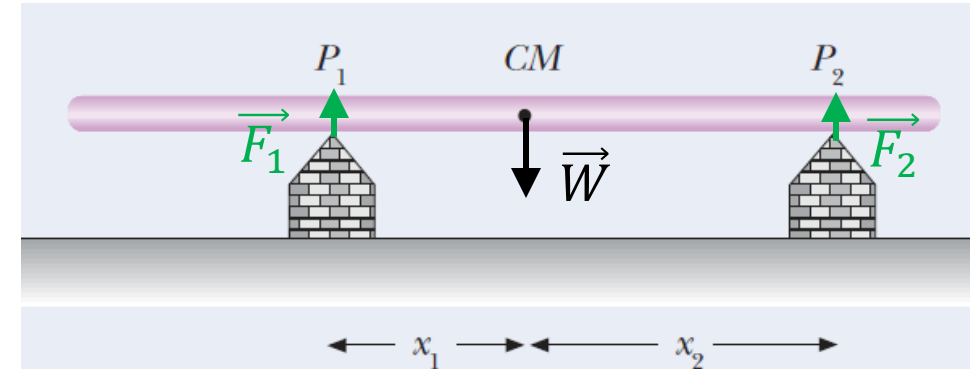
$$\sum \vec{M} = 0$$

2° eq cardinale



$$0 = T - F_1 - F_2$$

$$0 = F_1 R - F_2 R$$



$$0 = W - F_1 - F_2$$

$$0 = -F_1 x_1 + F_2 x_2$$

equilibrio stabile: se allontaniamo il corpo dalla posizione di equilibrio la risultante delle forze tende a riportarlo

equilibrio instabile: se il corpo è appena allontanato dalla posizione di equilibrio la risultante delle forze induce ad un moto che può portare ad una altra condizione di equilibrio.

equilibrio indifferente: se il corpo è allontanato dalla posizione di equilibrio resta in una posizione di equilibrio.

Rotazioni rigide attorno a un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

L'asse di rotazione può essere esterno al corpo e che il centro di massa non è detto sia un punto dell'asse stesso.

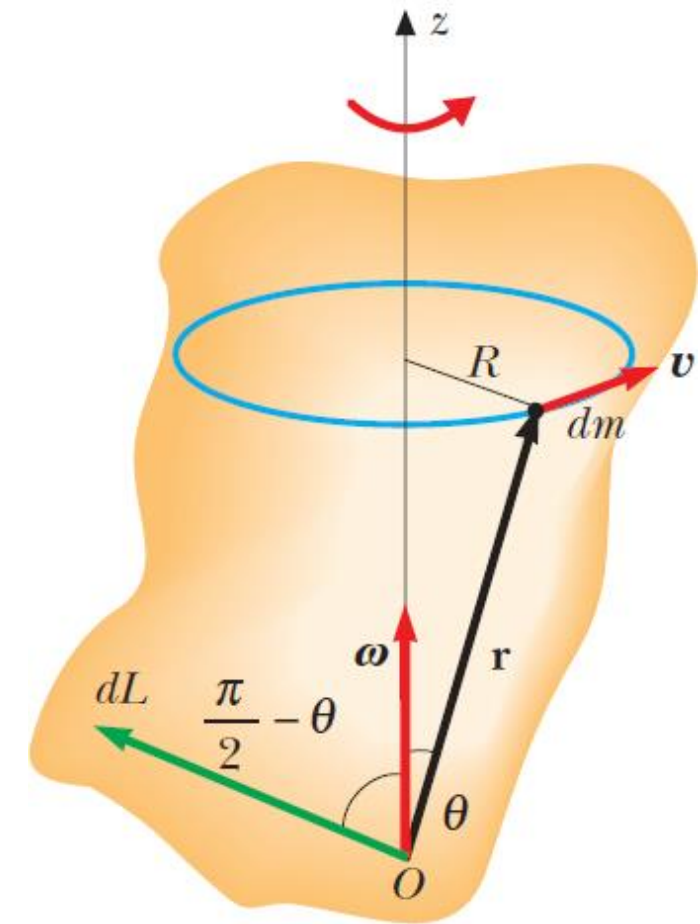
I punti dell'asse di rotazione sono punti fissi e quindi possono essere utilizzati come poli per il calcolo dei momenti.

Calcoliamo il momento angolare

$$d\vec{L} = \vec{r} \times (dm)\vec{v} \quad \text{è ortogonale a } \vec{r} \text{ e } \vec{v}$$

Il momento angolare del corpo è $\vec{L} = \int d\vec{L}$ e in generale non è parallelo all'asse di rotazione:

ciò vuol dire che in generale non esiste una relazione di proporzionalità tra $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$.



Proiezione del momento angolare lungo l'asse di rotazione

Se calcoliamo la proiezione del momento angolare lungo l'asse di rotazione $\hat{z}$

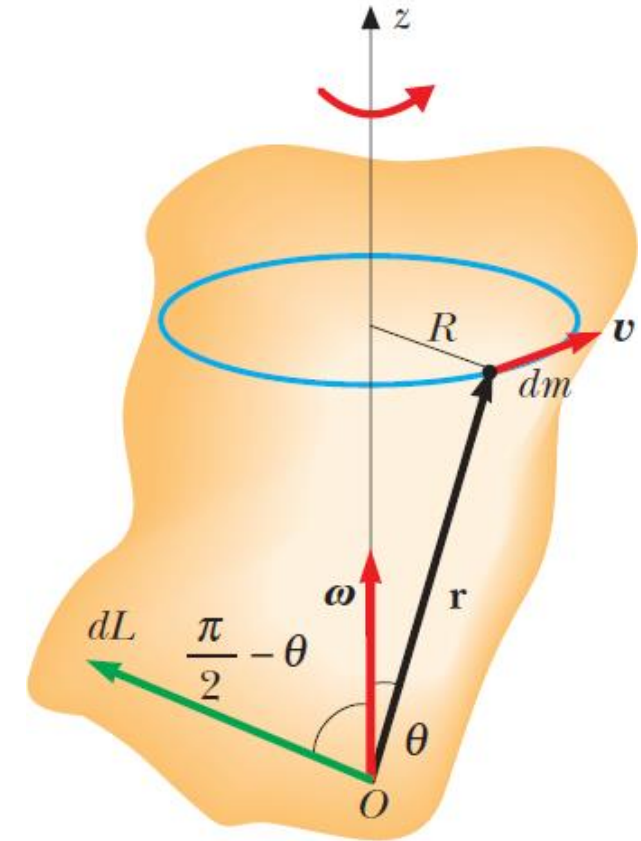
$$dL_z = \vec{r} \sin \theta \times (dm)\vec{v} = dmRv\hat{z} = dm\omega R^2\hat{z}$$

Allora la proiezione del momento angolare del corpo è proporzionale alla velocità angolare

$$L_z = \int dL_z = \int \omega R^2 dm = I_z \omega$$

Il coefficiente di proporzionalità I_z è detto momento d'inerzia rispetto all'asse $\hat{z}$

$$I_z = \int R^2 dm = \int (x^2 + y^2) \rho(V) dV$$



la componente del momento angolare rispetto all'asse di rotazione è proporzionale alla velocità angolare e dipende, tramite il coefficiente I_z , solo dalla forma del corpo e dalla posizione dell'asse rispetto al corpo.

Riassumendo:

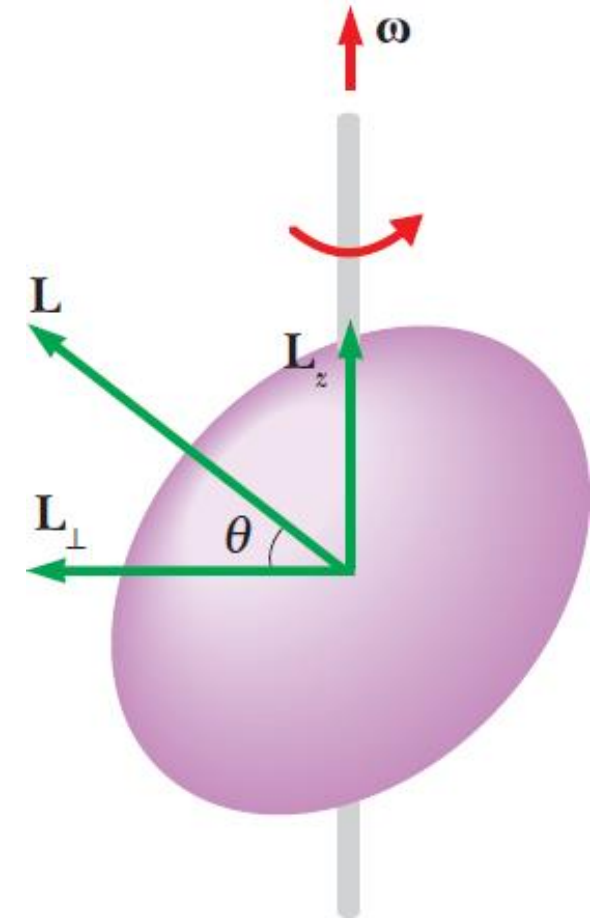
il momento angolare $\vec{L}$ di un corpo rigido che ruota rispetto a un asse $\hat{z}$ non è in generale parallelo all'asse di rotazione e ruota attorno a questo assieme al corpo.

La componente parallela all'asse L_z può variare solo in modulo, è proporzionale a ω e non dipende dalla scelta del polo lungo l'asse di rotazione $\hat{z}$.

$$L_z = \int d\vec{L} \sin \theta = I_z \omega$$

Invece la componente ortogonale all'asse $\vec{L}_\perp$ varia in direzione, può variare in modulo e dipende dalla scelta del polo lungo l'asse di rotazione $\hat{z}$.

$$\vec{L}_\perp = \int d\vec{L} \cos \theta \xrightarrow{\text{in modulo}} L_\perp = \int dm \omega R \cos \theta$$



Se la rotazione è lungo l'asse di simmetria

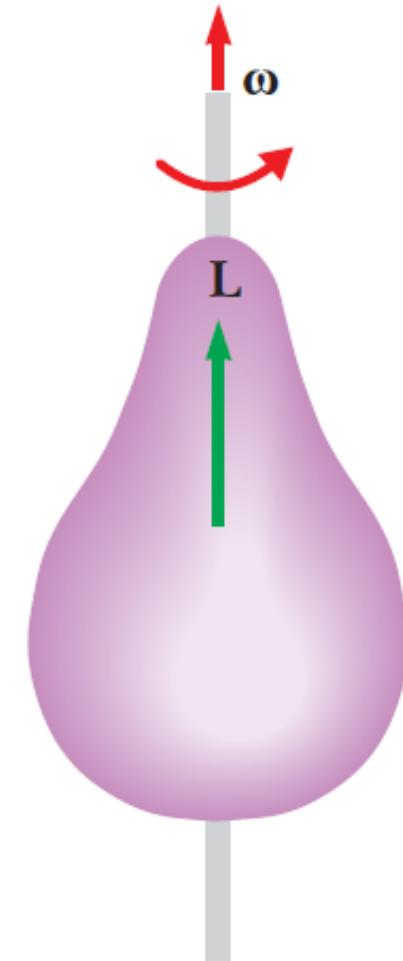
In questo caso per ogni $d\vec{L}_i$ c'è un $d\vec{L}_j$ simmetrico rispetto all'asse così che la loro somma vettoriale è parallela all'asse $\hat{z}$.

Si ha quindi

$$\vec{L} = L_z \hat{z} = I_z \omega \hat{z} = I_z \vec{\omega}$$
$$\vec{L}_\perp = 0$$

In questi casi si dice che l'asse di rotazione coincide con un asse principale d'inerzia

Se applico un momento di forze parallelo all'asse ho quindi solo variazioni in modulo e verso di $\vec{L}$ e di conseguenza anche di $\vec{\omega}$.





rotore a pale oscillanti
swing-bucket rotor



Si auto sistema per
ruotare lungo asse
d'inerzia



caso di L parallelo a ω : equazione del moto

Possiamo scrivere la seconda equazione cardinale dei sistemi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha} = \vec{M}$$

Da qui l'equazione del moto, essendo tutti vettori paralleli a $\hat{z}$

$$\alpha = \frac{M}{I_z} \rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt \rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega dt$$

Se $M = 0$ il corpo è in quiete o ruota a velocità angolare costante ω_0

Se $M = \text{costante}$ il corpo si muove di moto circolare uniformemente accelerato

$$\alpha = \text{costante} \rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$



caso di L parallelo a ω : energia e lavoro

Per il corpo in rotazione possiamo scrivere l'energia cinetica come

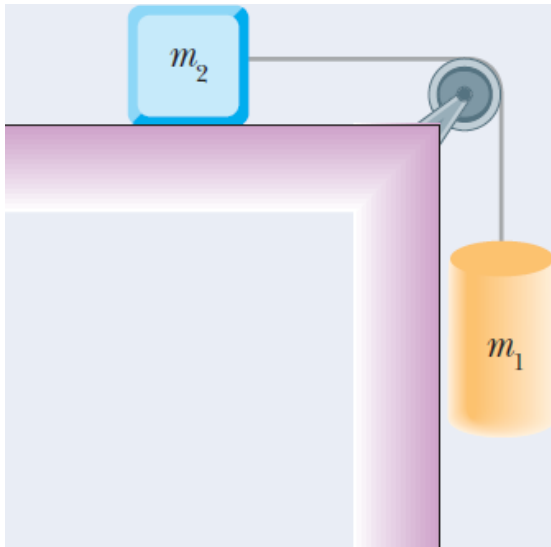
$$E_k = \int \frac{1}{2} (dm) v^2 = \frac{1}{2} \int R^2 \omega^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int R^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \rightarrow E_k = \frac{L^2}{2I_z}$$

Per quanto riguarda il teorema dell'energia cinetica che la lega al lavoro

$$dW = dE_k = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I_z \alpha d\theta = M d\theta$$

Da cui integrando

$$W = \int_{\theta_{\text{in}}}^{\theta_{\text{fin}}} M d\theta = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_{\text{fin}}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{\text{in}}^2$$



Un cilindro di massa $m_1 = 0.4\text{ kg}$ è collegato a una massa $m_2 = 0.2\text{ kg}$ tramite una fune sottile che passa attraverso una carrucola di raggio $R = 2.5\text{ cm}$ e momento di inerzia rispetto all'asse $I = 2.5 \cdot 10^{-4}\text{ kgm}^2$.

La massa m_2 scivola su un piano orizzontale senza attrito. Calcolare l'accelerazione a delle due masse.

Usando l'energia

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} + m_1gx = 0$$

$$[(m_1 + m_2)R^2v^2 + I]v^2 = -2m_1gR^2x$$

$$\Downarrow \quad v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

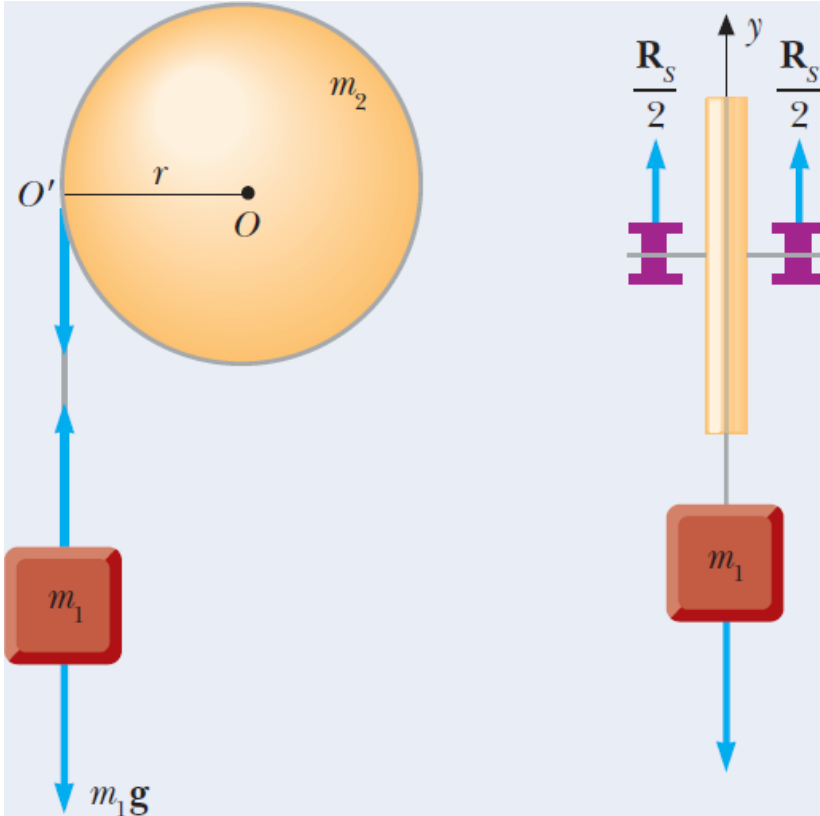
$$a = \frac{-m_1gR^2}{(m_1 + m_2)R^2 + I}$$

$$L = m_1Rv + m_2Rv + I\omega = (m_1 + m_2)Rv + I\frac{v}{R}$$

$$M = \frac{dL}{dt} \rightarrow -m_1gR = (m_1 + m_2)Ra + I\frac{a}{R}$$

**2° eq
cardinale**

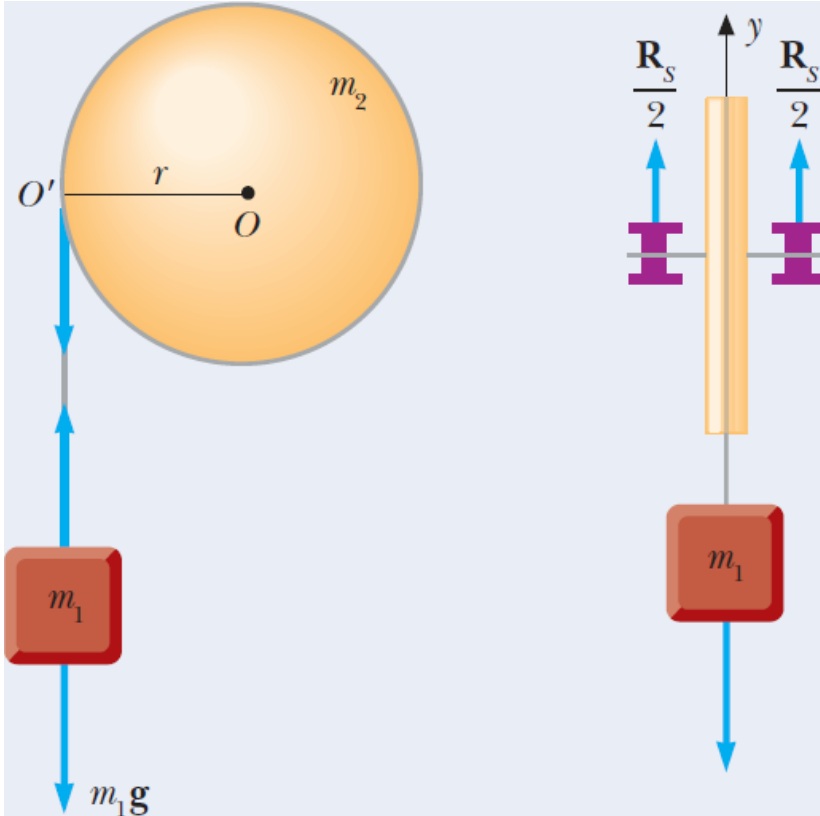
$$a = \frac{-m_1gR^2}{(m_1 + m_2)R^2 + I} = -3.92[m/s^{-2}]$$



Si consideri un disco omogeneo, di raggio r e massa m_2 , che può ruotare senza attrito attorno a un asse fisso orizzontale passante per il suo centro di massa O .

Sul bordo del disco è avvolto un filo inestensibile che non slitta rispetto al disco e sostiene un punto materiale di massa m_1 .

Si determini il moto del sistema, la tensione del filo e la reazione dei supporti che sostengono l'asse di rotazione. Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione vale $I = \frac{1}{2} m_2 r^2$.



1. Sulla massa m_1 $m_1 g - T = m_1 a$

2. Sulla ruota m_2

$$M = \frac{dL}{dt} \rightarrow T r = I \alpha = \frac{I}{r} a = \frac{m_2 r^2}{2r} \left(g - \frac{T}{m_1} \right) = \frac{m_2 r}{2} \left(g - \frac{T}{m_1} \right)$$

$$\left(\frac{2}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) T = g$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{2m_1 + m_2} g \quad a = \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} g$$

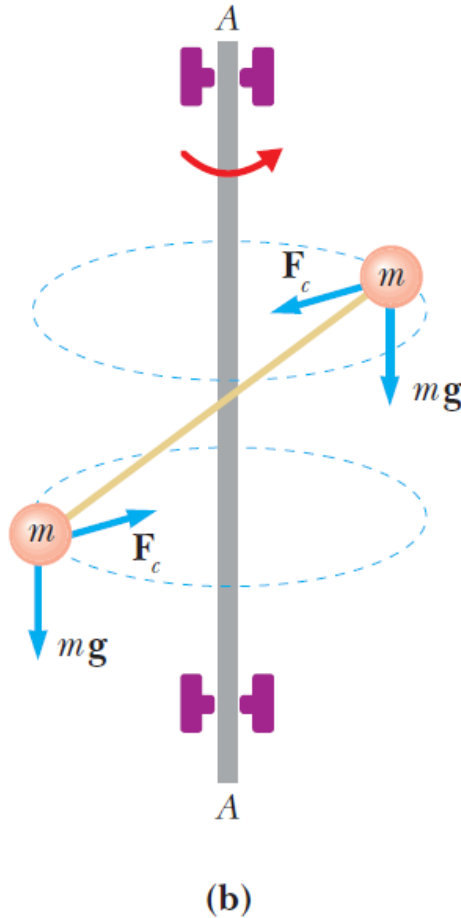
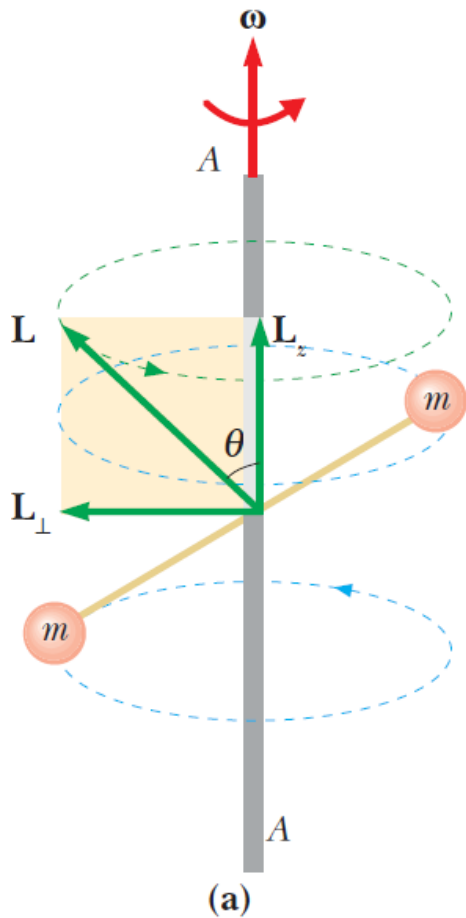
3. Sui supporti

$$m_2 g + T - R_s = 0$$

$$R_s = m_2 g + T = \frac{m_2 (2m_1 + m_2) + m_1 m_2}{2m_1 + m_2} g = \frac{m_2 + 3m_1}{2m_1 + m_2} m_2 g$$

caso di L **NON** parallelo a ω : equazione del moto

Possiamo scrivere la seconda equazione cardinale dei sistemi proiettando il momento angolare lungo la direzione parallela e lungo la perpendicolare all'asse di rotazione $\hat{z}$



$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha} = \vec{M}_z \quad \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{M}_\perp$$

Quindi lungo $\hat{z}$ tutto come prima e stessa legge oraria. Invece $\vec{L}_\perp$ ruota insieme al corpo.

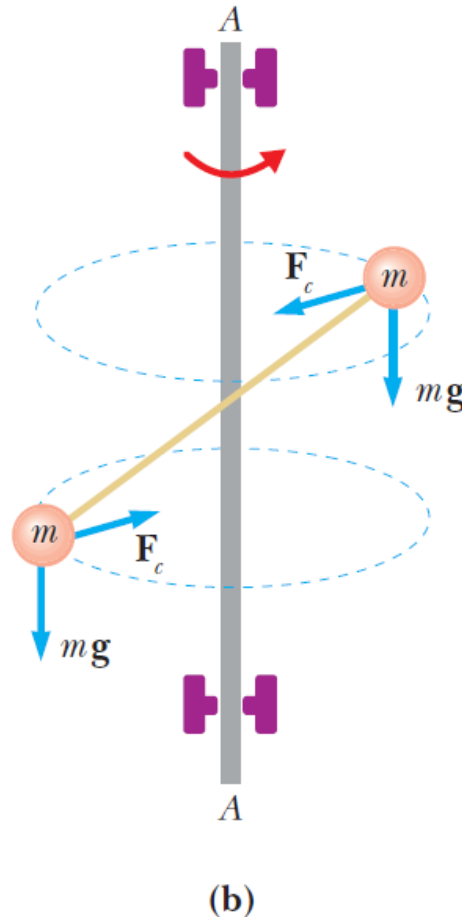
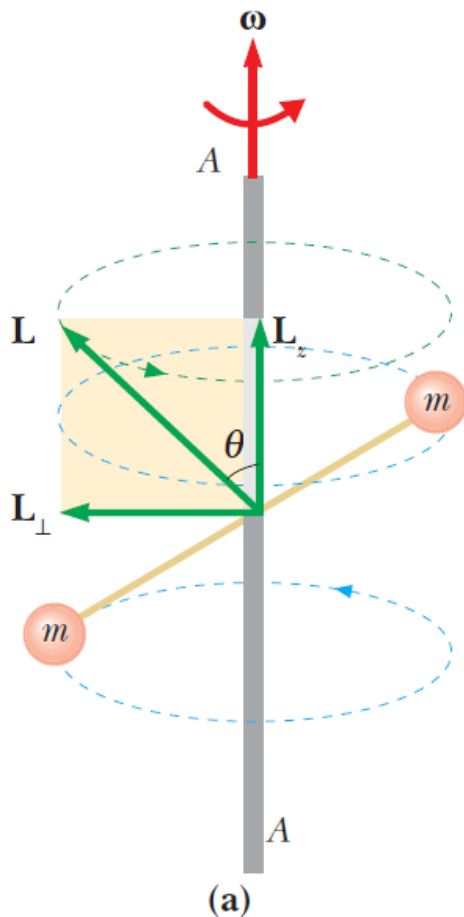
$$\text{Se } \omega = \text{cost} \rightarrow \vec{M}_z = 0$$

*Le forze di coesione $\rightarrow$ la **barra** applica la forza centripeta $\vec{F}_c$*

Sono coppie di forze !!

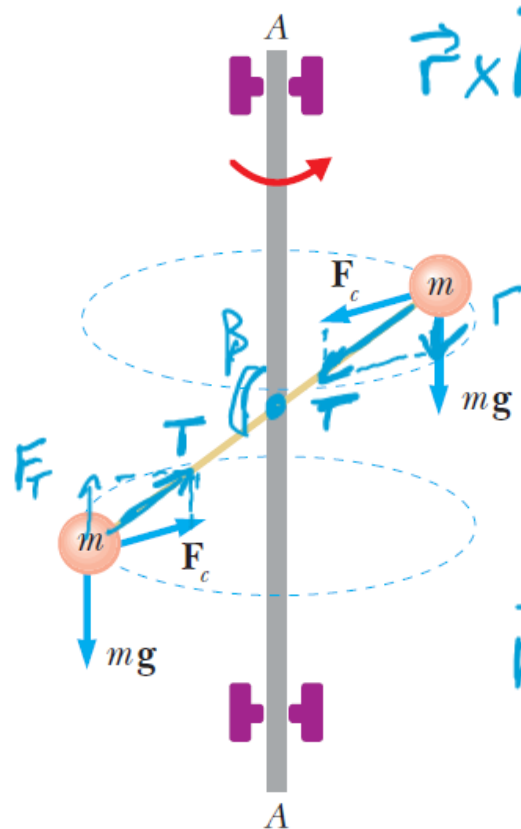
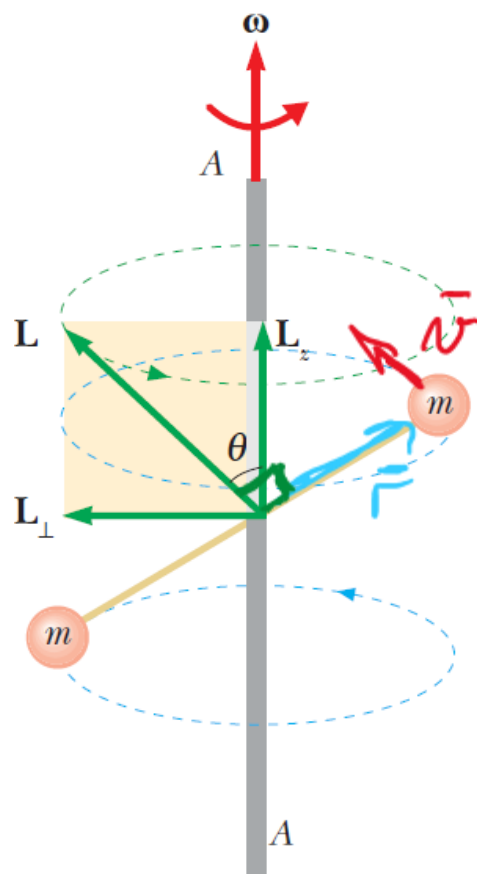
caso di L **NON** parallelo a ω : equazione del moto

Il momento di queste coppie di forze è proprio quello che fa ruotare $\vec{L}_\perp$. Le due forze peso hanno momento nullo rispetto a qualsiasi polo sull'asse di rotazione $\hat{z}$.



Un effetto del momento delle forze centripete è quello di far cambiare direzione all'asse di rotazione e quindi occorrono opportuni supporti per mantenere l'asse nella posizione verticale.

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha} = \vec{M}_z \quad \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{M}_\perp$$



$\vec{r} \times \vec{F}_T \Rightarrow$ momento che tende a portare $\perp$ a $\vec{\omega}$ l'asta

$\vec{r} \times \vec{F}_T \rightarrow$ tende a far ruotare sull'asse principale d'inertia

$\vec{r} \times \vec{F}_c \rightarrow$ momento che fa ruotare $\vec{L}$ non sforza su supporti
 $\vec{F}_c$ è sull'asse

Forza peso ha momento nullo

caso di L **NON** parallelo a ω : energia e lavoro

Per il corpo in rotazione possiamo scrivere l'energia cinetica come

$$E_k = \int \frac{1}{2} (dm) v^2 = \frac{1}{2} \int R^2 \omega^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

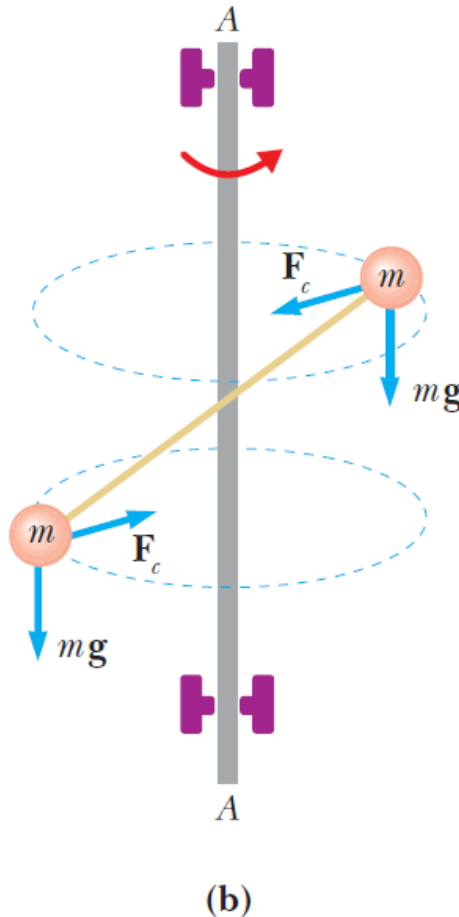
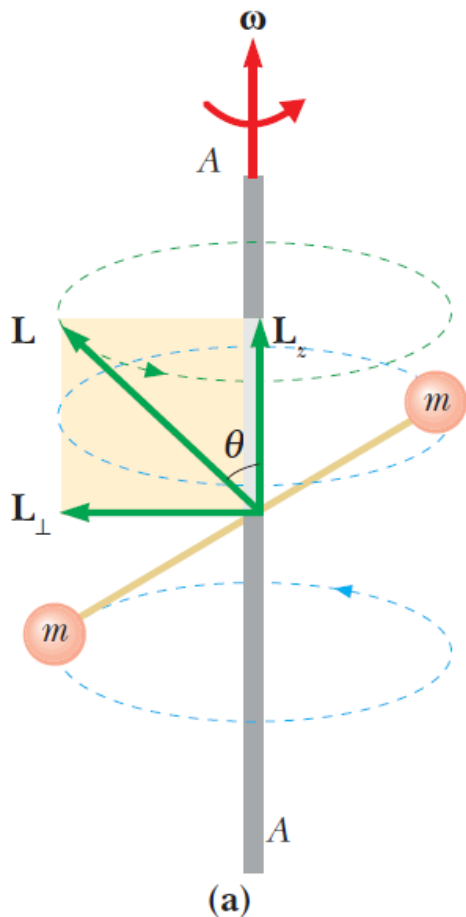
$$\rightarrow E_k = \frac{L_z^2}{2I_z} \quad \text{dipende solo dalla componente } z$$

Per quanto riguarda il teorema dell'energia cinetica che la lega al lavoro

$$dW = dE_k = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I_z \alpha d\theta = M_z d\theta$$

*Momento delle
forze esterne* ↑

$$W = \int_{\theta_{\text{in}}}^{\theta_{\text{fin}}} M_z d\theta = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_{\text{fin}}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{\text{in}}^2$$



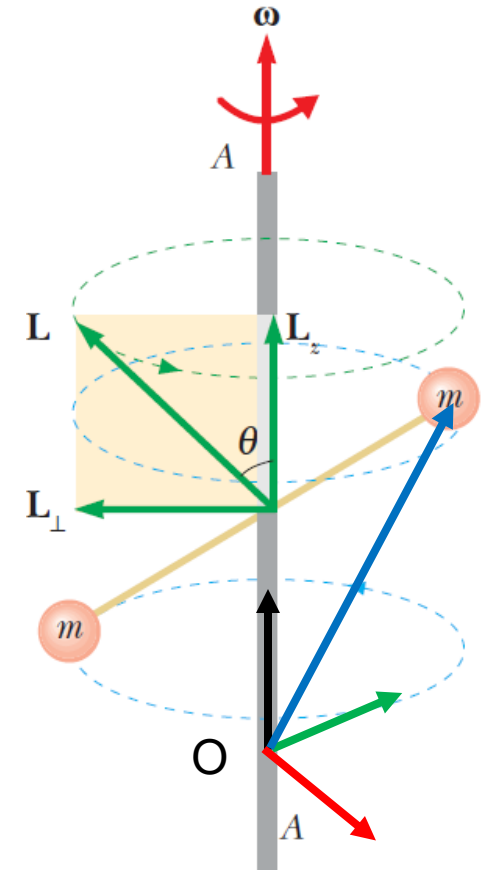
Se ho un sistema di punti, ognuno con massa dm , che ruota intorno a un asse generico e un polo O sull'asse e la massa dm ha una posizione $\vec{r}$ rispetto al polo.

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \int [(\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}] dm$$

Dove si è utilizzata l'uguaglianza $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \left(\omega_x \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm - \int_m (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) x dm \right) \hat{i} \\ &+ \left(\omega_y \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm - \int_m (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) y dm \right) \hat{j} \\ &+ \left(\omega_z \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm - \int_m (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) z dm \right) \hat{k} \end{aligned}$$

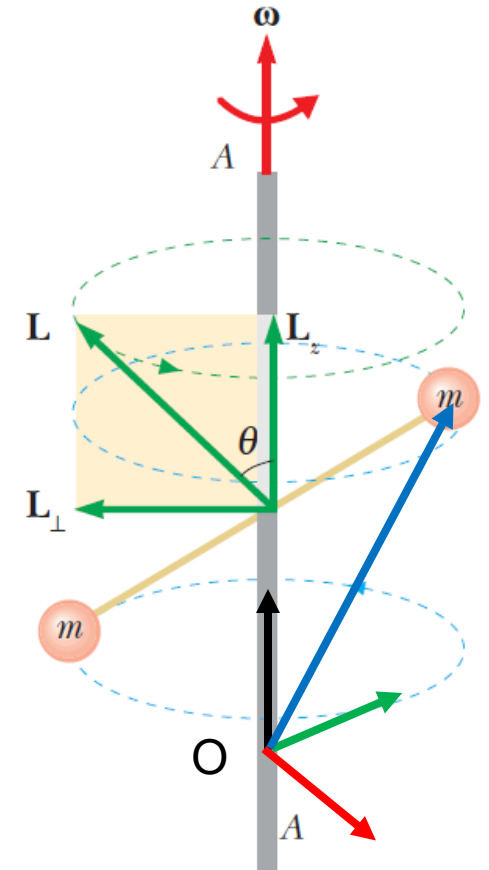
$$\vec{L} = (I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\hat{i} + (-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)\hat{j} + (-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\hat{k}$$



$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \int_m (y^2 + z^2) dm & -\int_m xy dm & -\int_m xz dm \\ -\int_m xy dm & \int_m (x^2 + z^2) dm & -\int_m yz dm \\ -\int_m xz dm & -\int_m yz dm & \int_m (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\exists \text{ un sistema } x', y', z' \text{ tale che } \bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{pmatrix}$$

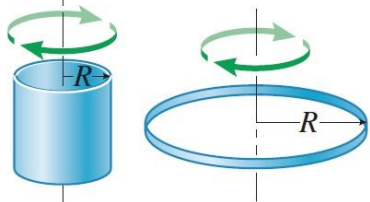
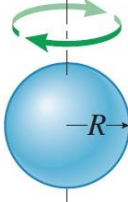
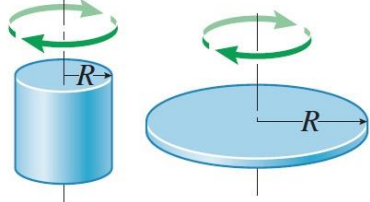
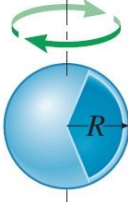
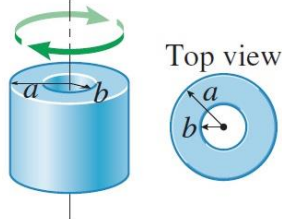
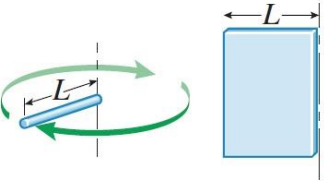
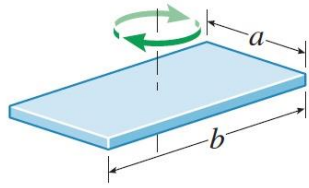
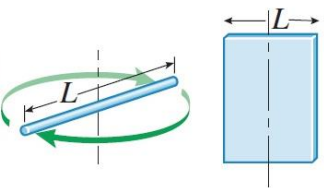


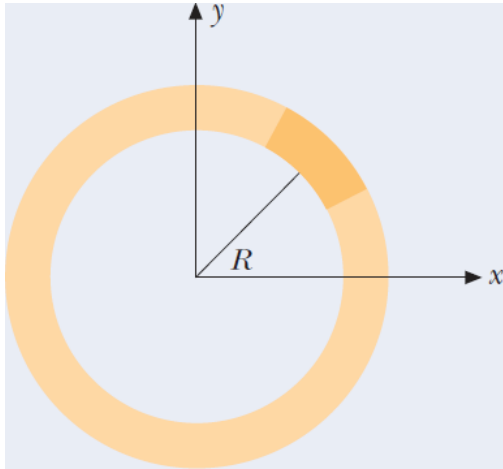


Momento d' Inerzia per oggetti uniformi

$$I_z = \int R^2 dm$$

$$= \int (x^2 + y^2) \rho(V) dV$$

Shape		Axis of Rotation	Rotational Inertia	Shape		Axis of Rotation	Rotational Inertia
Thin hollow cylindrical shell (or hoop)		Central axis of cylinder	MR^2	Solid sphere		Through center	$\frac{2}{5}MR^2$
Solid cylinder (or disk)		Central axis of cylinder	$\frac{1}{2}MR^2$	Thin hollow spherical shell		Through center	$\frac{2}{3}MR^2$
Hollow cylindrical shell or disk		Central axis of cylinder	$\frac{1}{2}M(a^2 + b^2)$	Thin rod (or rectangular plate)		Perpendicular to rod through end (or along edge of plate)	$\frac{1}{3}ML^2$
Rectangular plate		Perpendicular to plate through center	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$	Thin rod (or rectangular plate)		Perpendicular to rod through center (or parallel to edge of plate through center)	$\frac{1}{12}ML^2$



Momento di inerzia di un anello

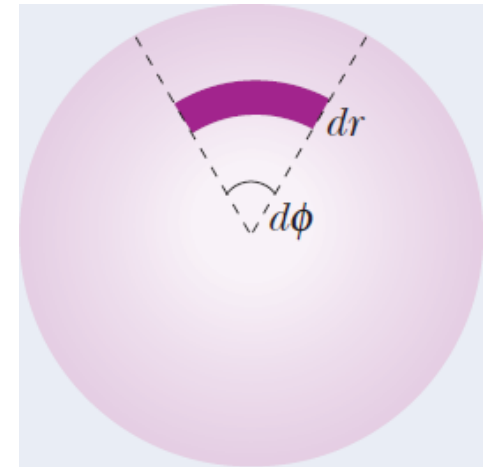
$$I_z = \int R^2 dm = \rho \int (x^2 + y^2) dl = \rho R^2 \int R d\theta = R^2 (\rho 2\pi R)$$

$$I_z = mR^2$$

Momento di inerzia di un disco

$$I_z = \int R^2 dm = \rho \int (x^2 + y^2) dS = \rho \int r^2 r dr d\theta = \frac{1}{4} R^2 2(\rho \pi R^2)$$

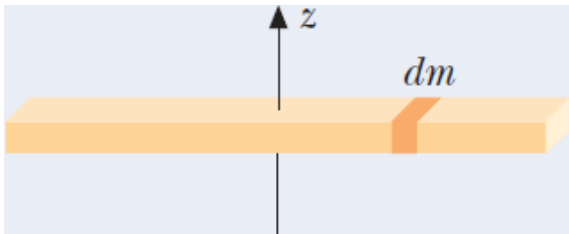
$$I_z = \frac{1}{2} mR^2$$



Momento di inerzia di un'asta

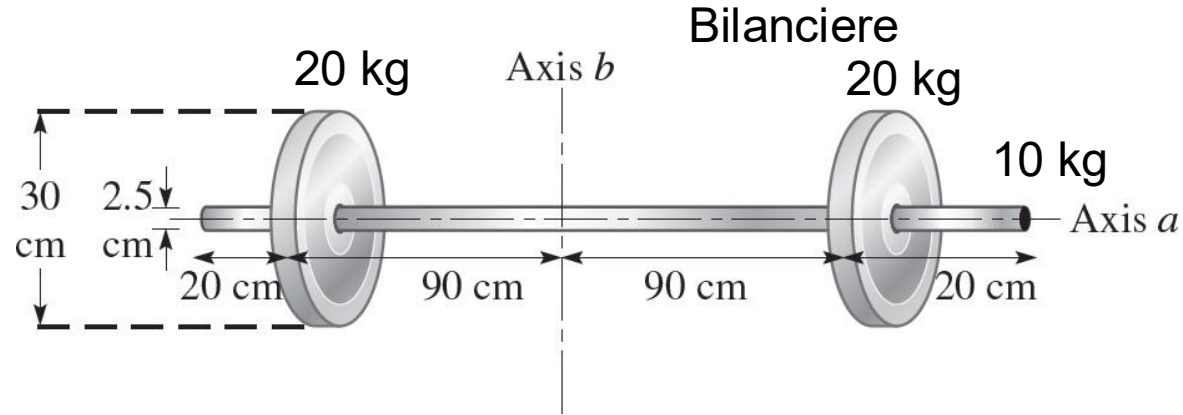
$$I_z = \int R^2 dm = \rho \int x^2 dx = \frac{1}{3} \rho \left[\left(\frac{d}{2} \right)^3 - \left(-\frac{d}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{12} m d^2$$

$$I_z = \frac{1}{2} mR^2$$





Momento d'Inerzia per oggetti uniformi



Axis *a*

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 \\ &= 2 \times \left[\frac{1}{2} \times 20 \text{ kg} \times (0.15 \text{ m})^2 \right] + \frac{1}{2} \times 10 \text{ kg} \times (0.0125 \text{ m})^2 \\ &= 2 \times 0.225 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 0.00078 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0.45 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Come massa puntuale
unica a distanza *d*

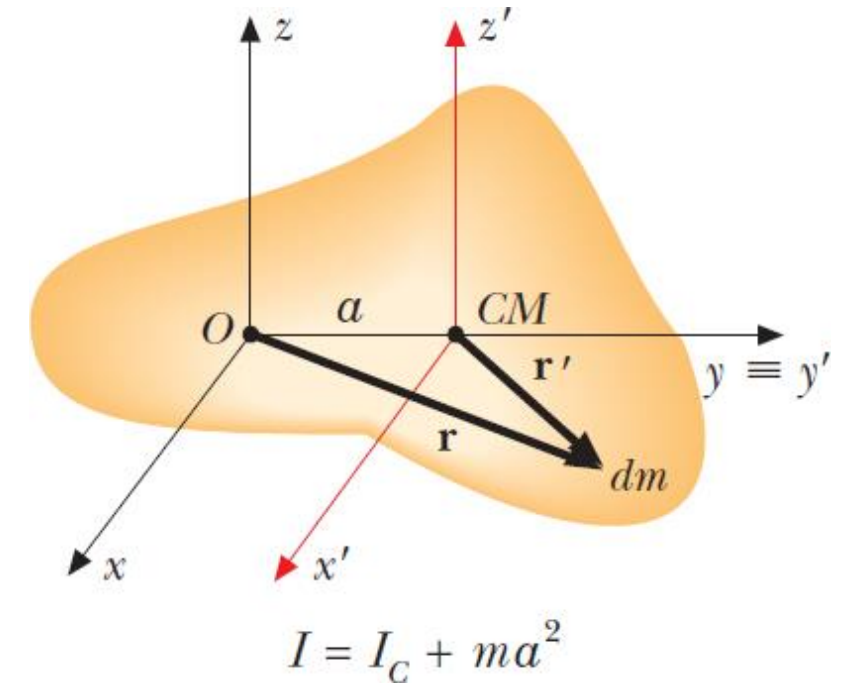
Axis *b*

$$\begin{aligned} I &= Md^2 + Md^2 + \frac{1}{12}mL^2 \\ &= 2 \times [20 \text{ kg} \times (0.90 \text{ m})^2] + \frac{1}{12} \times 10 \text{ kg} \times (2.20 \text{ m})^2 \\ &= 2 \times 16.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 4.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 36 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto a un asse che si trova a una distanza a dal **centro di massa** del corpo è dato da

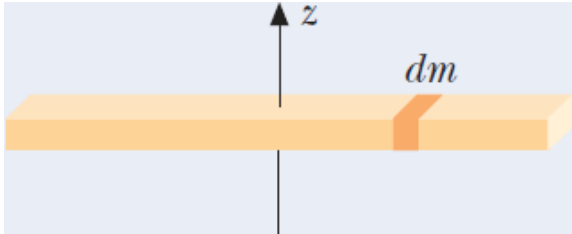
$$I = ma^2 + I_{CM}$$

dove I_{CM} è il momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.



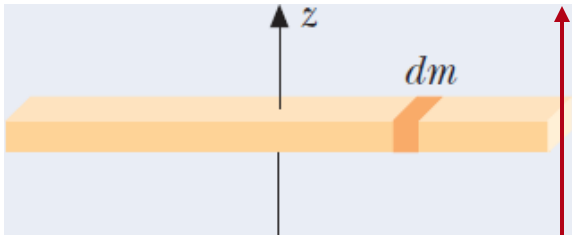
$$\begin{aligned} I_z &= \rho \int (x^2 + y^2) dV = \rho \int (x'^2 + (y' + a)^2) dV' \\ &= \rho \int (x'^2 + y'^2) dV' + a^2 \rho \int dV' + \cancel{2a\rho \int y' dV'} = I'_z + ma^2 \\ &\quad = 0 \text{ nel sistema del CM} \end{aligned}$$

Momento di inerzia di un'asta nel CM



$$I_z^{CM} = \int R^2 dm = \rho \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x^2 dx = \frac{1}{3} \rho \left[\left(\frac{d}{2} \right)^3 - \left(-\frac{d}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{12} md^2$$

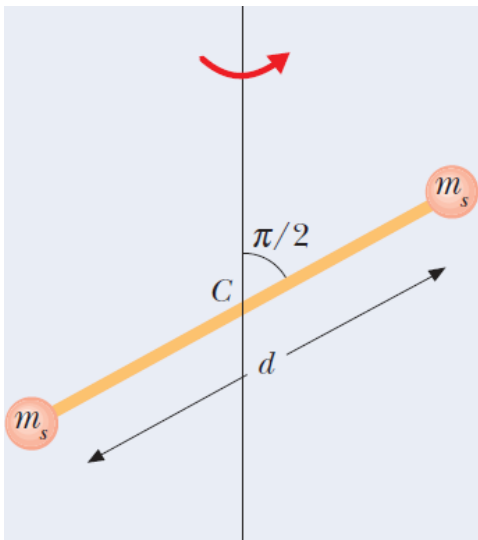
Momento di inerzia di un'asta che **ruota a una estremità**



$$I_z = \int R^2 dm = \rho \int_0^d x^2 dx = \frac{1}{3} \rho d^3 = \frac{1}{3} md^2$$

$$I_z = \frac{1}{3} md^2 = \frac{1}{12} md^2 + m \left(\frac{d}{2} \right)^2 = I_z^{CM} + m \left(\frac{d}{2} \right)^2$$

Momento di inerzia di due sfere di raggio R



$$I_z = \underbrace{2 \frac{2}{5} m_s R^2}_{\text{sfere}} + \underbrace{2 m_s \left(\frac{d}{2} + R \right)^2}_{\text{spostamento sfere dall'asse}} + \underbrace{\frac{1}{12} m \left(\frac{d}{2} \right)^2}_{\text{asta}}$$



2° teorema di Koenig

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}$$

1° teorema di Koenig

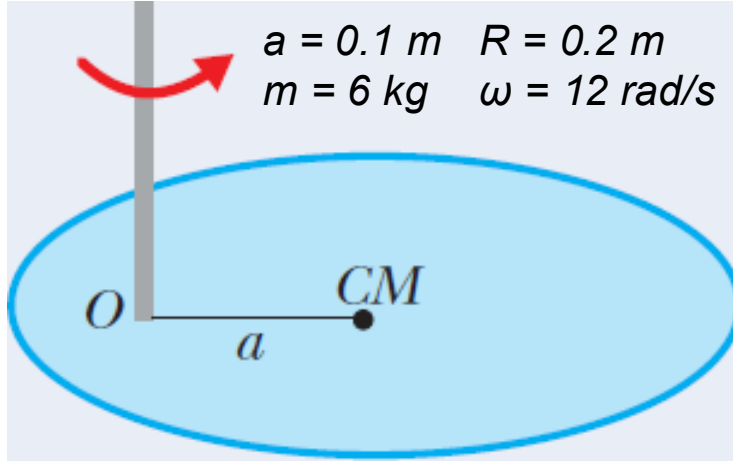
$$E_k = E'_k + E_{CM,k}$$

2° teorema di Koenig

I teoremi di Koenig trovati per i sistemi di punti sono validi anche per i corpi rigidi

$$a = |\vec{r}_{CM}|$$

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (I'_z + m a^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I'_z \omega^2 + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 = E'_k + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E'_k + E_{CM,k}$$



Calcolare:

1. la forza orizzontale che deve essere esercitata dai supporti sull'asse per permettere la rotazione,
2. il momento della forza peso rispetto al punto O,
3. l'energia cinetica del disco.
4. Se, partendo da fermo, il disco deve raggiungere la velocità di regime in 4 s, che momento costante bisogna applicare?
5. Quanto vale durante la fase di accelerazione l'accelerazione tangente del centro di massa?

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 + m a^2$$

$$L_z = I_z \omega$$

$$\vec{F}_c = m a \omega^2$$

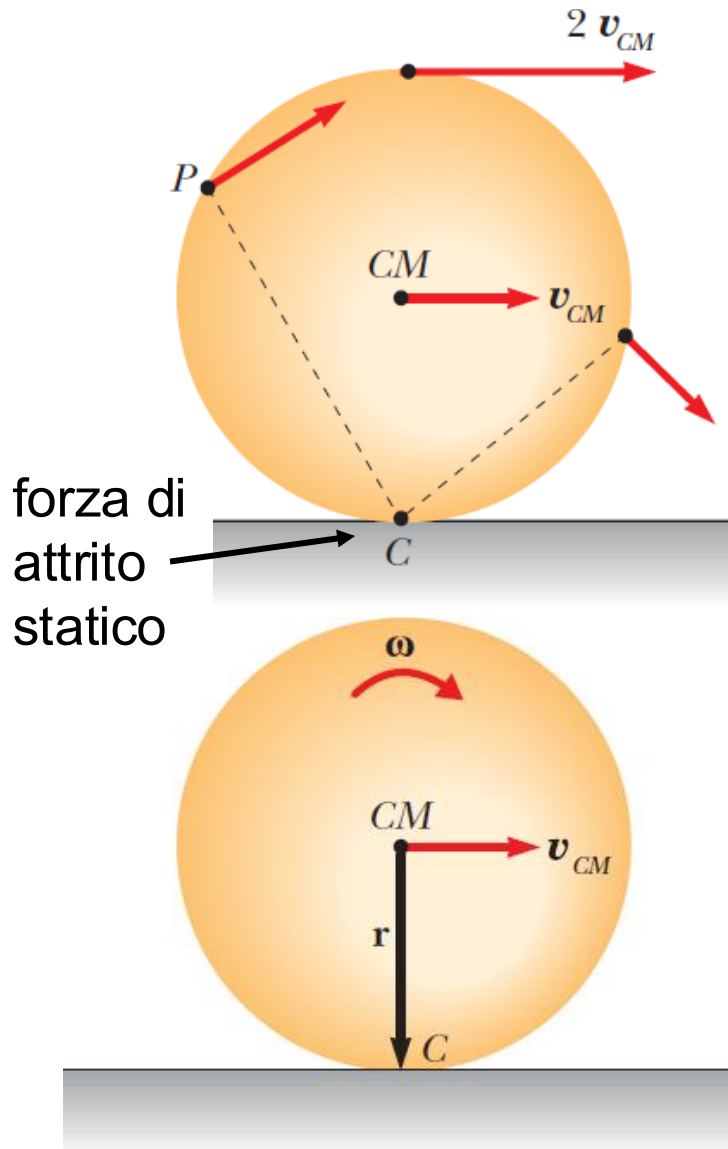
$$\vec{M}_G = m g a$$

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 + m a^2 \right) \omega^2$$

$$\omega_f = \alpha \bar{t}$$

$$\vec{M} = I_z \alpha = \left(\frac{1}{2} m R^2 + m a^2 \right) \frac{\vec{\omega}_f}{\bar{t}}$$

$$a_T^{CM} = a \alpha = a \frac{\vec{\omega}_f}{\bar{t}}$$



Puro rotolamento = la velocità del punto di contatto è nulla

In questo caso l'asse di rotazione non è un asse materiale, bensì un asse geometrico che si sposta insieme al corpo rigido.

In ogni intervallo di tempo dt il corpo che rotola senza strisciare può venire considerato come se ruotasse con velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto a un asse, fisso durante dt , passante per il punto di contatto C e ortogonale al piano della figura.

Si può quindi scrivere

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{CM} = 0$$

Da cui risulta

$$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{r}$$

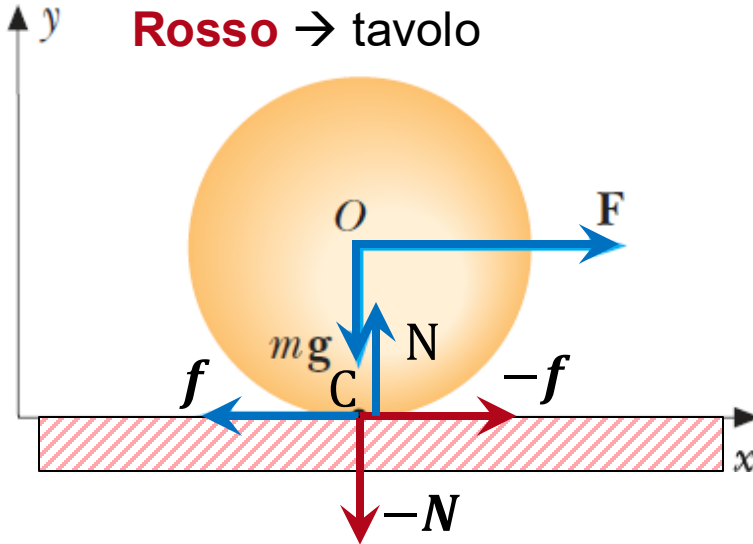
E quindi in modulo

$$v_{CM} = \omega r \quad a_{CM} = \alpha r$$

v_{CM} e ω non sono indipendenti

Puro rotolamento: sfera spinta

Blu → sfera
Rosso → tavolo



1° eq. cardinale

Lungo l'asse $\hat{x}$

$$F - f = ma_{CM} \quad f \leq \mu_s mg$$

Lungo l'asse $\hat{y}$

$$N - mg = 0 \quad \rightarrow \quad F \leq m(a_{CM} + \mu_s g)$$

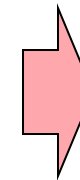
2° eq. cardinale

Polo O

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f} = I\vec{\alpha} \quad \rightarrow \quad rf = I\alpha = I \frac{a_{CM}}{r}$$

$$f = \left(\frac{2}{5} mr^2 \right) \frac{a_{CM}}{r^2} = \frac{2}{5} ma_{CM}$$

$$F = \frac{7}{5} ma_{CM}$$



$$ma_{CM} = \frac{5}{7} F$$

$$f = \frac{2}{7} F$$

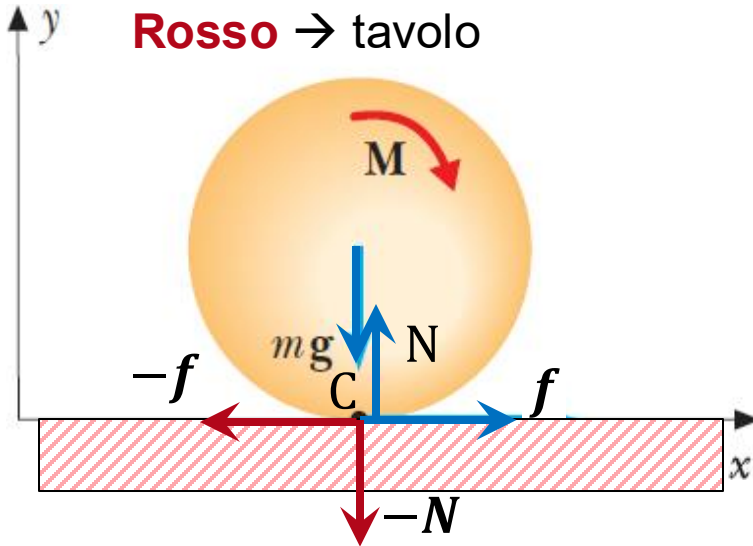


Condizione di puro rotolamento $\frac{2}{7} F \leq \mu_s mg ; \frac{2}{5} a_{CM} \leq \mu_s g$

Puro rotolamento: motore su asse

Blu → sfera

Rosso → tavolo



1° eq. cardinale

Lungo l'asse $\hat{x}$

$$f = ma_{CM}$$

Lungo l'asse $\hat{y}$

$$N - mg = 0$$

$$\rightarrow f \leq \mu_s mg$$

2° eq. cardinale

Polo 0

$$M - fr = I\alpha = I \frac{a_{CM}}{r}$$

$$M - ma_{CM}r = \left(\frac{2}{5}mr^2\right) \frac{a_{CM}}{r} \rightarrow f = ma_{CM} = \frac{5}{7r}M$$



Condizione di puro rotolamento

$$a_{CM} \leq \mu_s g$$

$$M \leq \frac{7}{5}r\mu_s mg$$

Motrice



Vagone



L'attrito statico non fa lavoro, ma per esperienza sappiamo che anche nel rotolamento viene dissipata energia.

L'energia viene dissipata dalla deformazione dei corpi nel punto di contatto.

Si tiene conto di questa dissipazione introducendo l'attrito volvente. Considerando il caso precedente si manifesta come **un momento sull'asse di rotazione** pari a

$$M_v = hN = hmg$$

Dove ***h*** è il coefficiente d'attrito volvente e ha la dimensione di una lunghezza [m].

Esempio: Cilindro di acciaio che rotola su un piano di acciaio

$$m = 10^3 [\text{kg}]$$

$$r = 0.2 [\text{m}]$$

$$\mu_s = 0.2$$

$$h = 5 \cdot 10^{-5} [\text{m}]$$

Se striscia

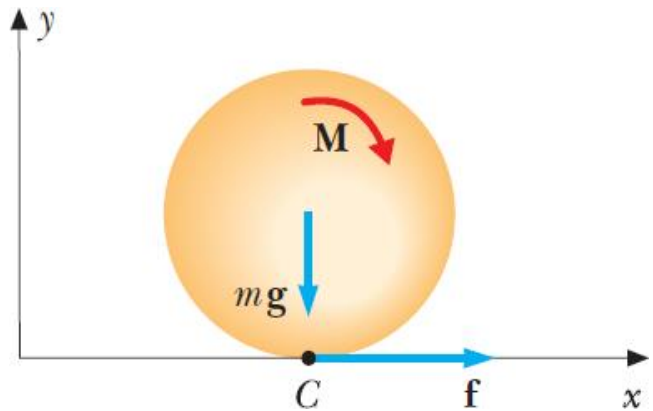
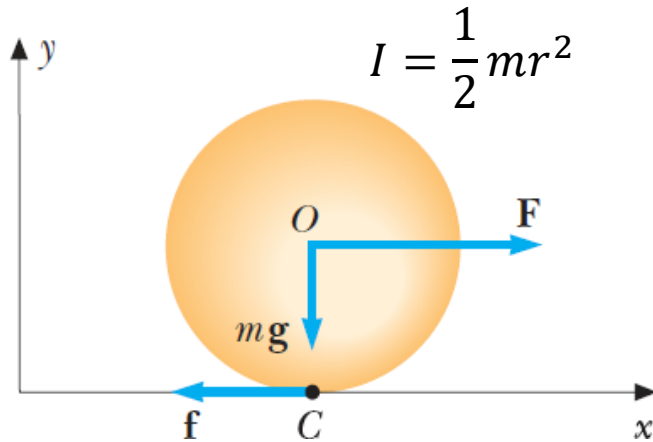
$$F_1 \leq \mu_s mg = 1960 [\text{N}]$$

Se rotola

$$F_2 \leq \frac{1}{r} hmg = 2.5 [\text{N}]$$



*Ecco perché Babbo
Natale vola*



Un disco rigido rotola senza strisciare su un piano orizzontale; la sua massa è $m = 5 \text{ kg}$, il raggio è $r = 0.2 \text{ m}$, il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0.3$. Al disco è applicata la forza $F = 21 \text{ N}$.

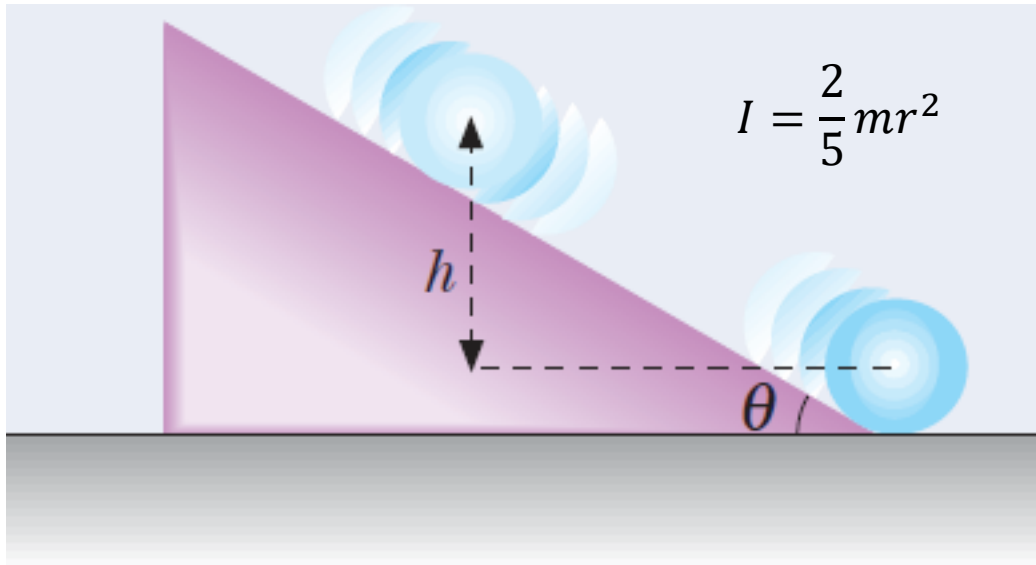
Calcolare il valore del momento che bisogna applicare alla ruota per avere la stessa accelerazione del centro di massa e il valore della forza di attrito statico nei due casi.

$$F - f_1 = ma_{CM} \quad rf_1 = I \frac{a_{CM}}{r} \quad \rightarrow \quad F = \left(m + \frac{I}{r^2} \right) a_{CM}$$

$$f_2 = ma_{CM} \quad M - f_2 r = I \frac{a_{CM}}{r} \quad \rightarrow \quad M = \left(m + \frac{I}{r^2} \right) r a_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{2}{3m} F = 2.8 [\text{m/s}^2] \quad f_1 = F - ma_{CM} = \frac{1}{3} F = 7 [\text{N}]$$

$$M = rF = 4.2 [\text{Nm}] \quad f_2 = ma_{CM} = \frac{2}{3} F = 14 [\text{N}] = 2f_1$$

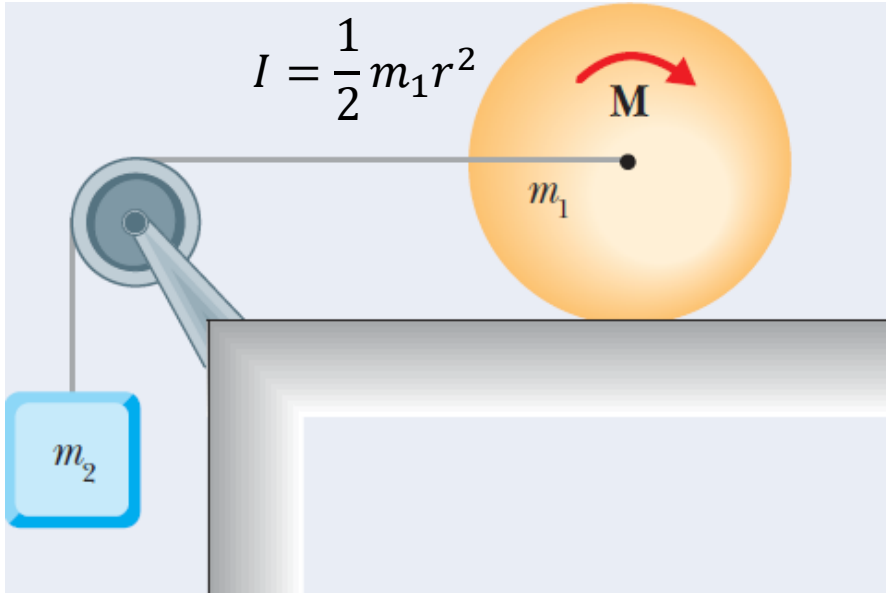


Determinare la velocità che raggiunge alla fine del percorso un corpo rigido che rotola senza strisciare lungo un piano inclinato

2° Teorema di Koenig

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_{CM}^2}{r^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(m + \frac{2}{5}m\right)v_{CM}^2 = \frac{7}{10}mv_{CM}^2 \rightarrow v_{CM}^2 = \frac{10}{7}gh \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} mg \sin \theta - f_1 &= ma_{CM} \\ rf_1 &= I \frac{a_{CM}}{r} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} mg \sin \theta &= \left(m + \frac{2}{5}m\right)a_{CM} \rightarrow a_{CM} = \frac{5}{7}g \sin \theta \\ \rightarrow f_1 &= \frac{2}{7}mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta \rightarrow \operatorname{tg} \theta \leq \frac{7}{2}\mu_s \end{aligned}$$



Un cilindro pieno, di massa $m_1 = 20\text{ kg}$ e raggio $r = 0.25\text{ m}$, rotola senza strisciare su un piano orizzontale.

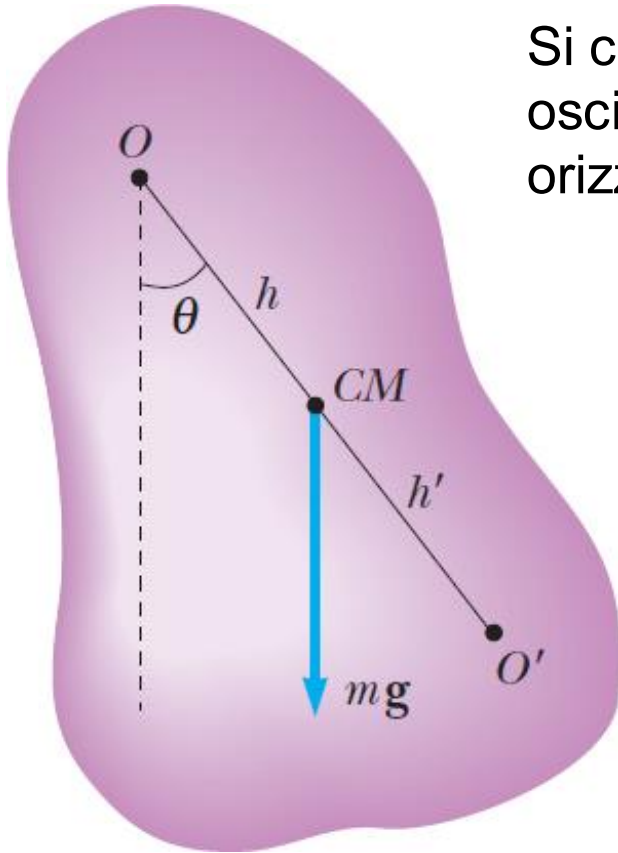
All'asse del cilindro è applicato il momento costante $M = 30\text{ N m}$ ed è appeso, tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile, un corpo di massa $m_2 = 10\text{ kg}$.

Calcolare l'accelerazione del centro di massa del cilindro, la tensione del filo e il minimo valore ammesso per il coefficiente di attrito.

$$\left. \begin{aligned} f_1 - m_2 g &= (m_1 + m_2) a_{CM} \\ M - f_1 r &= I \frac{a_{CM}}{r} \end{aligned} \right\} \quad M = m_2 r g + \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2} \right) r a_{CM} \quad a_{CM} = \frac{\frac{M}{r} - m_2 g}{\frac{3}{2} m_1 + m_2}$$

$$T - m_2 g = m_2 a_{CM} \quad T = m_2 (a_{CM} + g)$$

$$f_1 = m_2 g + (m_1 + m_2) a_{CM} \leq \mu_s m_1 g$$



Si chiama pendolo composto, o pendolo fisico, ogni corpo rigido che possa oscillare, per azione del suo peso, in un piano verticale attorno a un asse orizzontale non passante per il centro di massa.

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha = I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -h m g \sin \theta$$

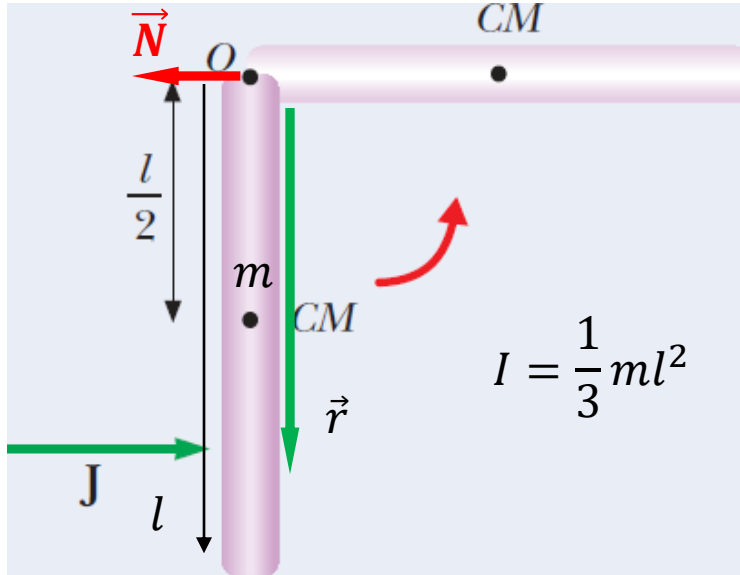
$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \frac{mgh}{I_z} \sin \theta \approx - \frac{mgh}{I_z} \theta$$

E' quindi un moto armonico $\theta(t) = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi)$

E il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

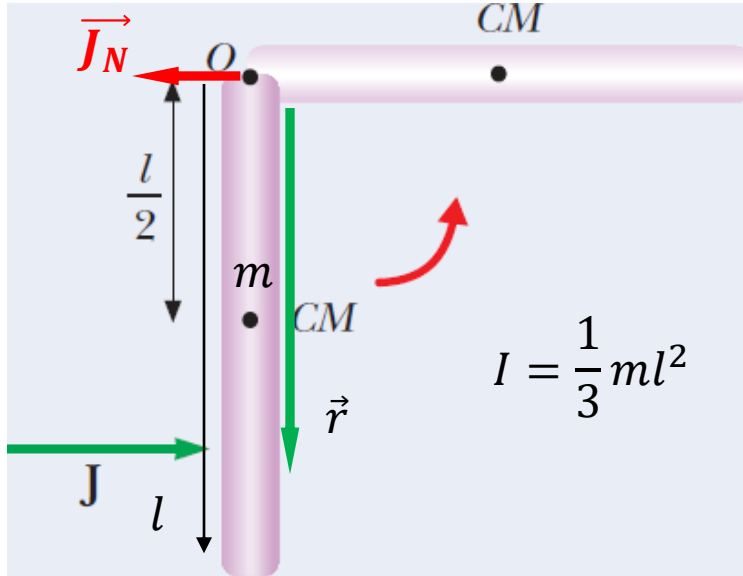
Dove l è la lunghezza ridotta del pendolo composto



Supponiamo di applicare una forza $\vec{F}$ per un certo tempo dt , a una distanza $\vec{a}$ rispetto al polo O ad una asta appesa al polo O . La forza genererà un momento $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ che farà ruotare l'asta attorno al polo O .

Possiamo scrivere che la variazione di momento angolare della barra sarà

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \vec{F} dt = \vec{r} \times \vec{J}$$



Inizialmente l'asta è ferma in posizione verticale. Si determini l'impulso $\vec{J}$, ortogonale all'asta, che si deve applicare a distanza $r \leq l$ da O per far compiere all'asta una rotazione di 90° .

$$\Delta L = I\omega = rJ$$

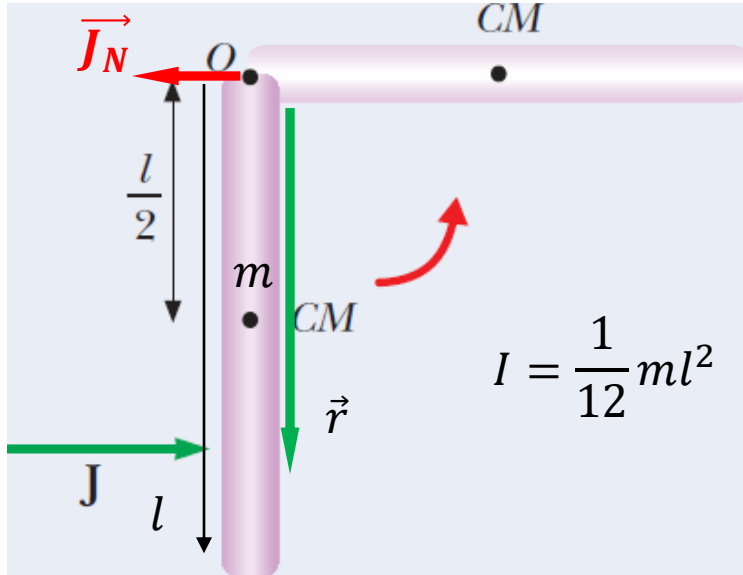
Teorema dell'impulso

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = mg\frac{l}{2}$$

Conservazione dell'energia

$$J = \frac{I}{r}\omega = \frac{I}{r}\sqrt{\frac{mgl}{I}} = \frac{\sqrt{Imgl}}{r} = \frac{m}{r}\sqrt{\frac{l^3 g}{3}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = \frac{l}{2}\omega = \sqrt{3gl}$$

$$J - J_N = mv_{CM}^f - \cancel{mv_{CM}^i} \quad J_N = J - m\sqrt{3gl}$$



Se la barra non fosse vincolata in O avrei

$$J = mv'_{CM}$$

Il moto del CM

$$\Delta L' = I'\omega' = rJ$$

Il moto rispetto il CM

$$E'_k = \frac{1}{2}I'\omega'^2 + \frac{1}{2}mv'^2_{CM}$$

$$v'_{CM} = \frac{J}{m} = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{l^3 g}{3}} = 2 \sqrt{\frac{lg}{3}} = \frac{2}{3} v_{CM}$$

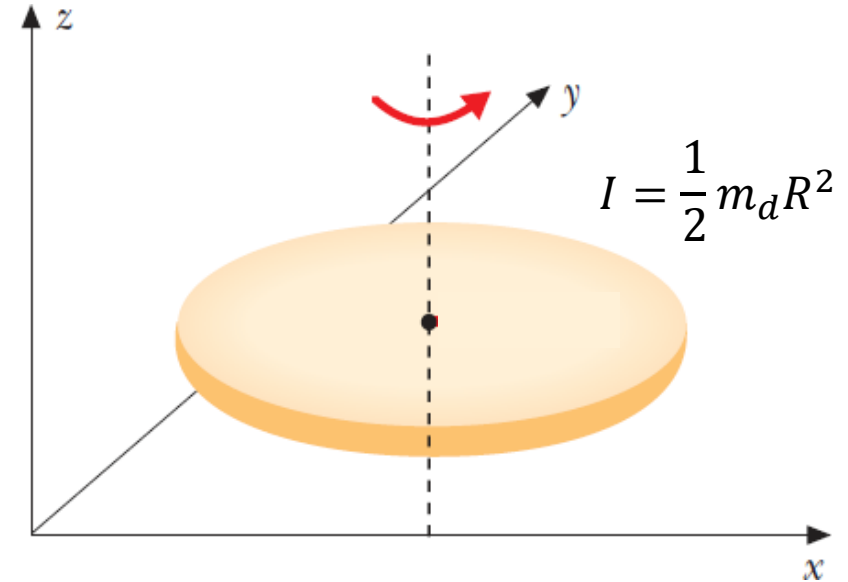
Una piattaforma, costituita da un disco di massa $m_d = 200\text{kg}$ e raggio $R = 2\text{ m}$, ruota senza attrito attorno a un asse verticale passante per il suo centro.

Una persona di massa $m = 60\text{ kg}$ si sposta radialmente dal bordo verso il centro. Quando la persona è sul bordo la velocità angolare è $\omega_0 = 5\text{rad/s}$.

Calcolare la velocità angolare ω quando la persona è a distanza $r = \frac{R}{4} = 50\text{cm}$ dall'asse e la variazione di energia cinetica ΔE_k del sistema.

$$\Delta L = 0 = (I + mr^2)\omega_f - (I + mR^2)\omega_0$$

$$\omega_f = \frac{I + mR^2}{I + mr^2} \omega_0 = \frac{\frac{1}{2}m_d R^2 + mR^2}{\frac{1}{2}m_d R^2 + \frac{1}{16}mR^2} \omega_0 = 7.7[\text{rad/s}]$$



$$\Delta E_k = \frac{1}{2} (I + mr^2) \omega_f^2 - \frac{1}{2} (I + mR^2) \omega_0^2$$

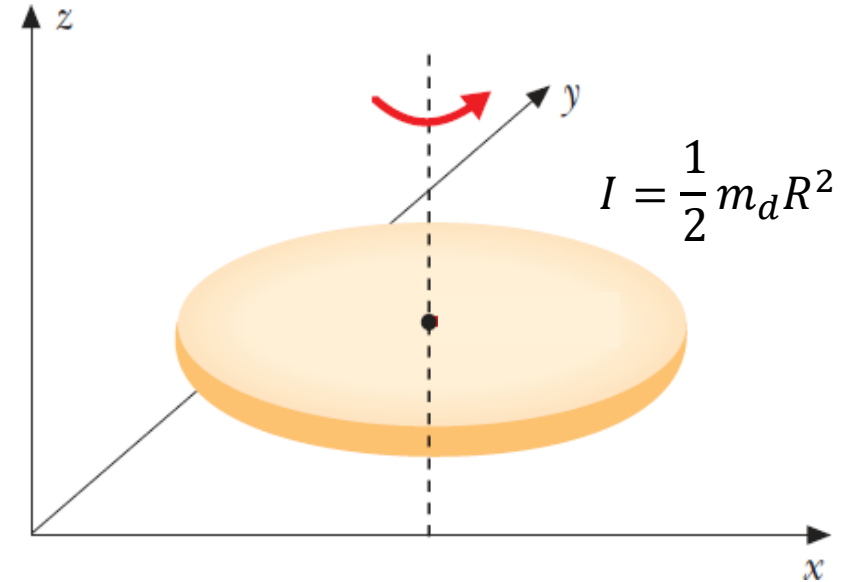
Le forze interne fanno un lavoro
E' la forza centripeta (la forza d'attrito) che agisce sulla persona

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= \frac{1}{2} (I + mr^2) \omega_f^2 - \frac{1}{2} (I + mR^2) \omega_0^2 \\ &= W = - \int m \omega^2(r) r dr\end{aligned}$$

$\omega(r)$ si ricava dalla conservazione del momento angolare

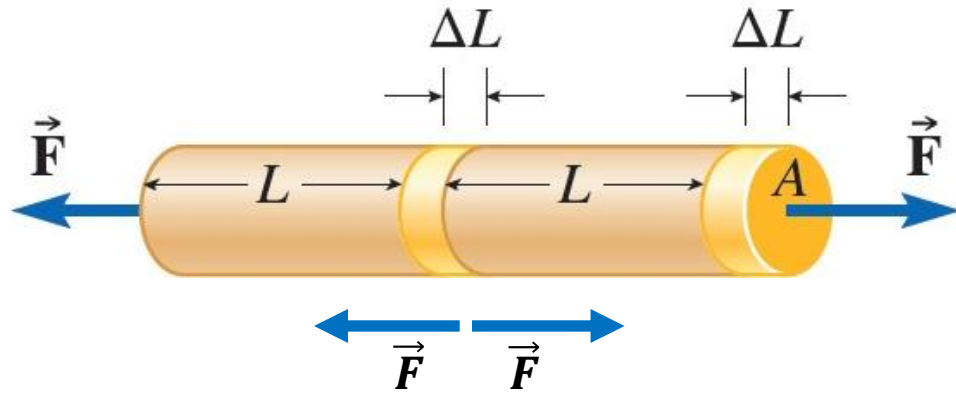
$$L = (I + mR^2) \omega_0 = (I + mr^2) \omega(r) = I'(r) \omega(r)$$

$$\begin{aligned}W &= - \int m \omega^2(r) r dr = - \int m \left(\frac{L}{I + mr^2} \right)^2 r dr \\ &= - \frac{1}{2} L^2 \int \left(\frac{1}{I'(r)} \right)^2 2mr dr \\ &= - \frac{1}{2} L^2 \int \left(\frac{1}{I'(r)} \right)^2 dI'(r) = \frac{1}{2} L^2 \frac{1}{I'(r)} \Big|_{I_0}^{I(r)} \\ &= \frac{1}{2} I'_0 \omega_0^2 \left(\frac{I'_0}{I'(r)} - 1 \right) = \Delta E_k\end{aligned}$$





Le proprietà elastiche dei materiali



Se una data forza di trazione $\vec{F}$ **allunga un tendine** di una quantità ΔL , quanto la solita forza allungherebbe un tendine il **doppio** ma identico in spessore e composizione?

Pensa al tendine di lunghezza $2L$ come a due tendini di lunghezza L posizionati da un capo all'altro. Con la stessa tensione, ciascuno dei due tendini si allunga di una quantità L , quindi la deformazione totale del tendine lungo è di $2\Delta L$.

Legge di Hooke

$$\Rightarrow |\vec{F}| \propto \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{2\Delta L}{2L} \text{ strain} \quad [\text{adimensionale}]$$

Possiamo anche pensare che allungare un tendine più spesso richiederebbe una forza maggiore

$$\Rightarrow \frac{|\vec{F}|}{A} = \sigma \text{ stress} \quad [\text{Pa}]$$



Legge di Hooke

La deformazione è proporzionale allo stress

stress $\propto$ *strain*

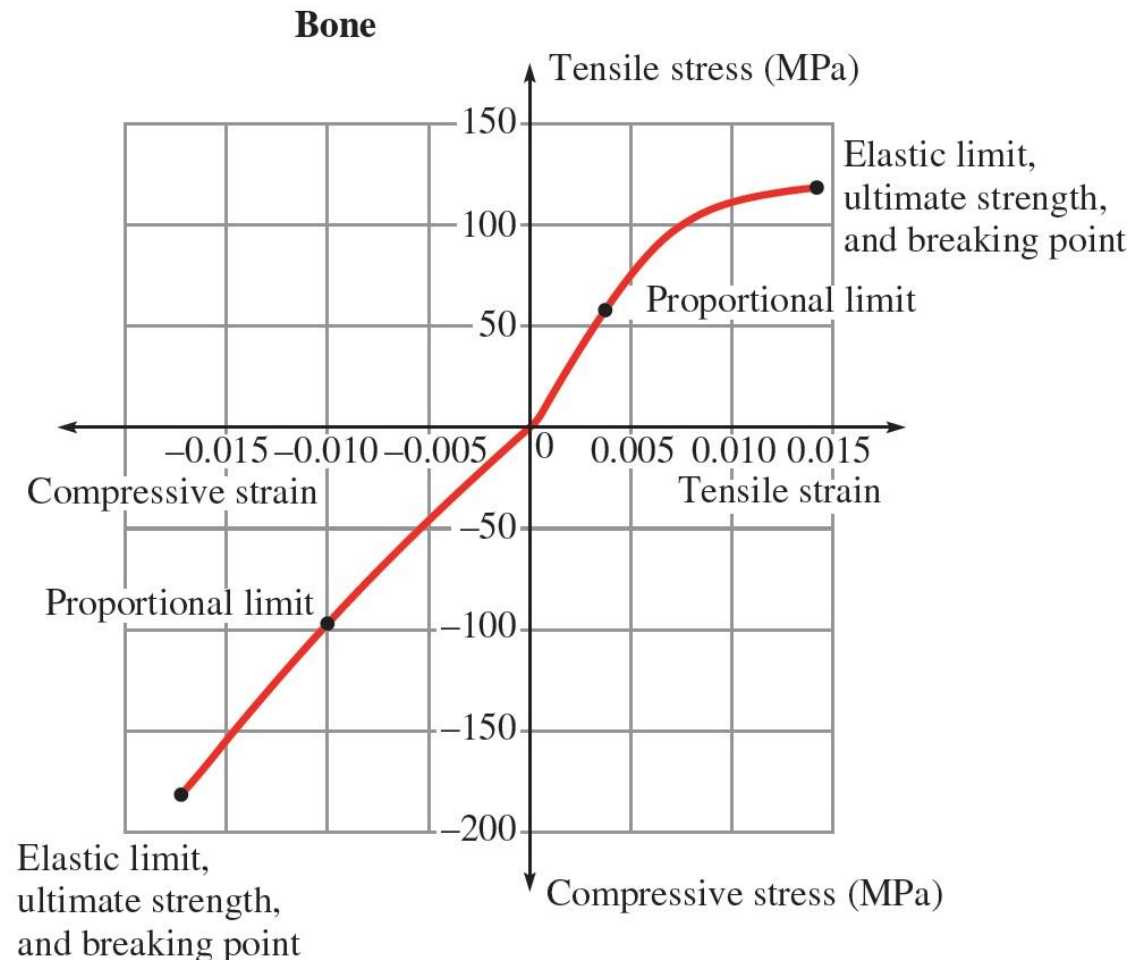
$$\sigma = \frac{|\vec{F}|}{A} = E \frac{\Delta L}{L} = E \varepsilon$$

$$|\vec{F}| = k \Delta L$$

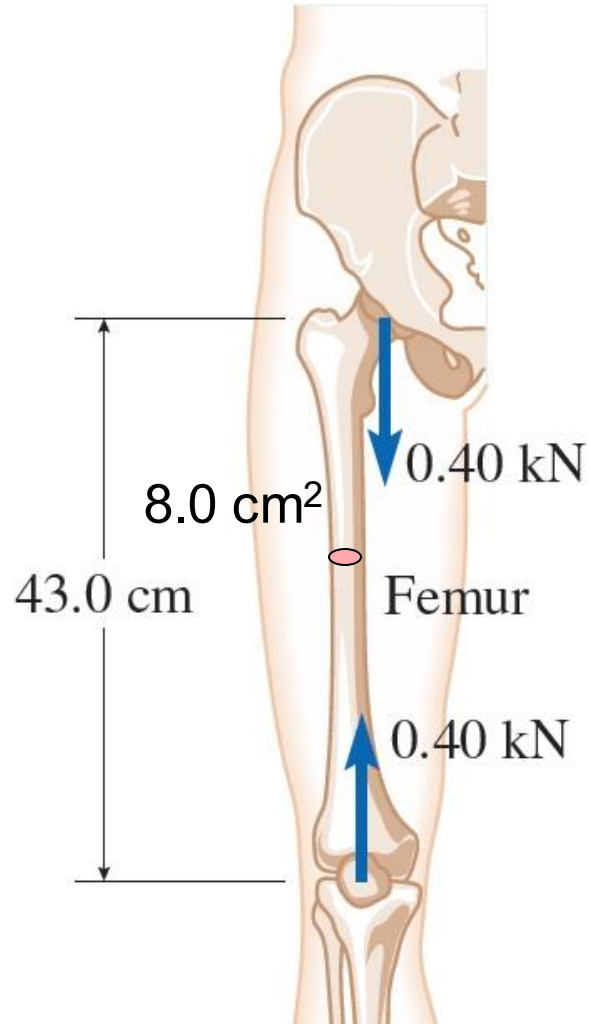
$$k = \frac{EA}{L}$$

E è il modulo elastico o modulo di Young

- La legge è valida fino a una tensione massima (limite elastico)
- E può essere diverso per compressione e tensione
- Quando il solido si frattura, lo stress ha raggiunto il punto di rottura
- La massima sollecitazione che può essere sopportata senza rompersi è chiamata resistenza suprema



Di quanto il suo femore (osso della coscia) è più corto rispetto a quando è sdraiato?



$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \xrightarrow{Y=9.4 \times 10^9 \text{ Pa}} \Delta L = \frac{F/A}{E} L = 0.0023 \text{ cm}$$

Substance	Young's Modulus (GPa)	Substance	Young's Modulus (GPa)
Rubber	0.002–0.008	Wood, along the grain	10–15
Human cartilage	0.024	Brick	14–20
Human vertebra	0.088 (compression); 0.17 (tension)	Concrete	20–30 (compression)
Collagen, in bone	0.6	Marble	50–60
Human tendon	0.6	Aluminum	70
Wood, across the grain	1	Cast iron	100–120
Nylon	2–6	Copper	120
Spider silk	4	Wrought iron	190
Human femur	9.4 (compression); 16 (tension)	Steel	200
		Diamond	1200

TABELLA 6.2 Modulo di Young

Materiale	E (N/m ²)
acciaio	$2.1 \cdot 10^{11}$
alluminio	$7.0 \cdot 10^{10}$
argento	$7.5 \cdot 10^{10}$
ferro	$2.0 \cdot 10^{11}$
gomma	$5-80 \cdot 10^6$
ottone	$9.1 \cdot 10^{10}$
piombo	$1.4 \cdot 10^{10}$
platino	$1.5 \cdot 10^{11}$
polietilene	$1-14 \cdot 10^8$
rame	$1.1 \cdot 10^{11}$
tungsteno	$3.5 \cdot 10^{11}$
vetro per finestre	$7.0 \cdot 10^{10}$

Per effetto della trazione la sbarra non solo si allunga, ma subisce anche una variazione di sezione.

Se r è una dimensione trasversale, ad esempio il raggio per una sbarra cilindrica, si trova la legge di Poisson

$$\frac{\Delta r}{r} = -\nu \frac{\Delta l}{l} = -\nu \varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E}$$

Nella trazione il volume della sbarra non diminuisce. Consideriamo infatti una sbarra cilindrica di volume iniziale $V = \pi r^2 l$. Dopo la trazione il volume diventa

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= \pi(r + \Delta r)^2(l + \Delta l) \\ &= \pi r^2 l + \pi r^2 \Delta l + 2\pi r l \Delta r + \dots o(2^o \text{ ordine}) \\ &\geq \end{aligned}$$



$$\frac{\Delta l}{l} \geq -2 \frac{\Delta r}{r}$$



$$\nu \leq 0.5$$

TABELLA 6.3 Coefficiente di Poisson

Materiale	ν
acciaio	0.30
alluminio	0.33
caucciù	0.50
ferro	0.30
ottone	0.35
piombo	0.40
platino	0.38
rame	0.34
vetro per finestre	0.25

shear stress $\propto$ shear strain

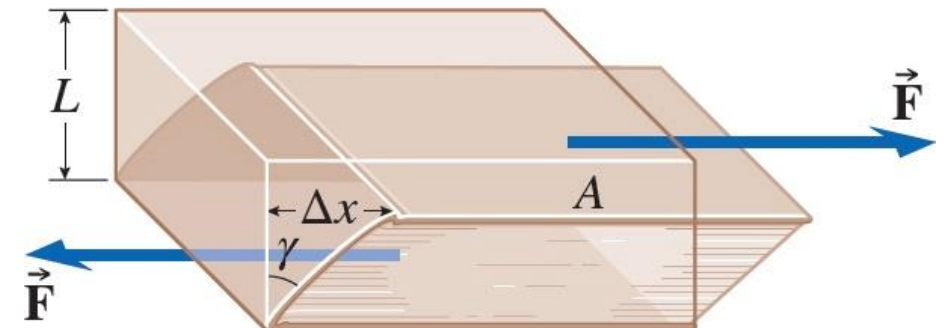
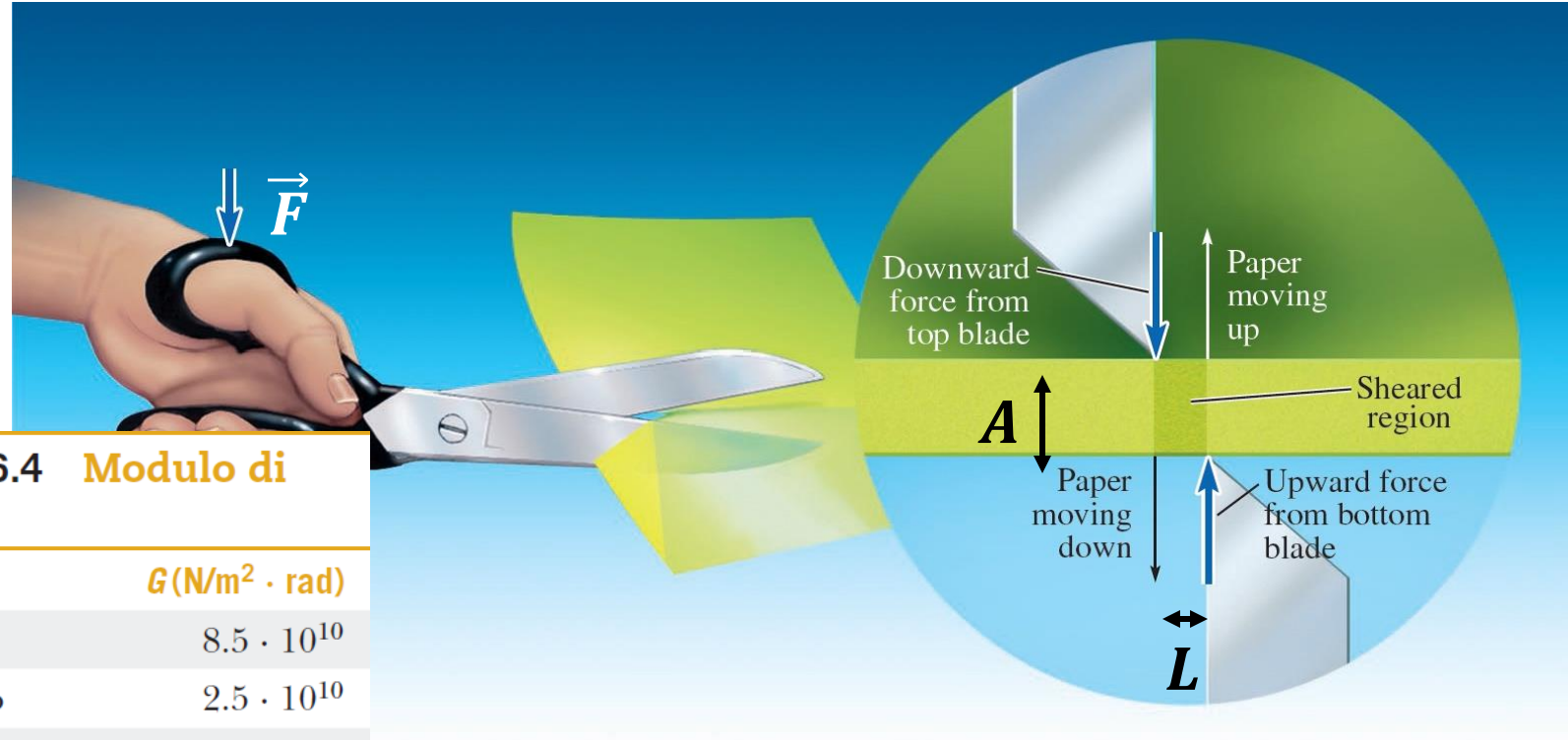
$$\frac{|\vec{F}|}{A} = G \frac{\Delta x}{L} = G\gamma$$

G è il modulo di taglio

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

TABELLA 6.4 Modulo di rigidità

Materiale	$G(\text{N/m}^2 \cdot \text{rad})$
acciaio	$8.5 \cdot 10^{10}$
alluminio	$2.5 \cdot 10^{10}$
ferro	$8.0 \cdot 10^{10}$
ottone	$3.0 \cdot 10^{10}$
piombo	$5.0 \cdot 10^9$
platino	$6.0 \cdot 10^{10}$
rame	$4.0 \cdot 10^{10}$
tungsteno	$1.4 \cdot 10^{11}$
vetro	$2.5\text{-}3.2 \cdot 10^{10}$





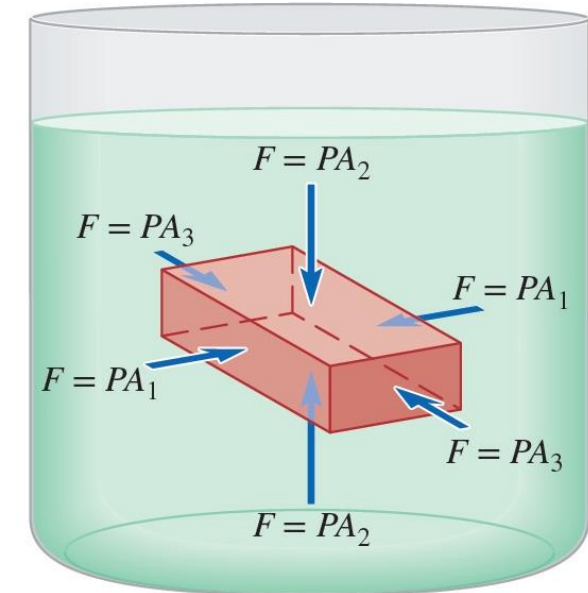
Modulo di massa

Material	Shear Modulus S (GPa)	Bulk Modulus B (GPa)
Gases		
Air*		0.000 10
Air†		0.000 14
Liquids		
Ethanol		0.9
Water		2.2
Mercury		25
Solids		
Cast iron	40–50	60–90
Marble		70
Aluminum	25–30	70
Copper	40–50	120–140
Steel	80–90	140–160
Diamond		620

*At 0°C and 1 atm; constant temperature expansion or compression

†At 0°C and 1 atm; no heat flow during expansion or compression

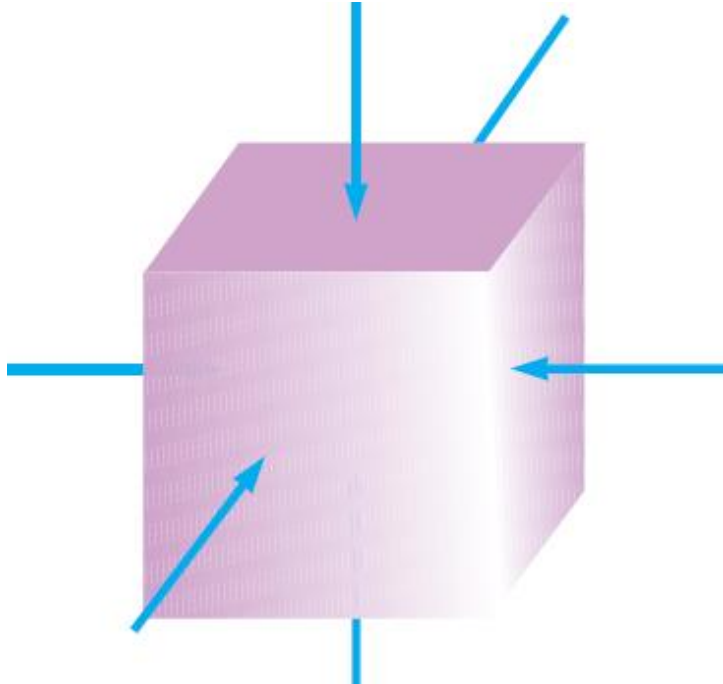
Sforzo di taglio solo nei solidi



volume stress $\propto$ volume strain

$$\Delta P = B \frac{\Delta V}{V}$$

B è il modulo di compressibilità isoterma



$$\beta = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Il rapporto F/S per la forza agente F normale alla superficie S si chiama pressione e si misura in pascal Pa , unità pari a N/m^2 .

TABELLA 6.5 Modulo di compressibilità isoterma

Materiale	β (N/m²)
acciaio	$1.6 \cdot 10^{11}$
acqua	$2.1 \cdot 10^9$
alluminio	$7.0 \cdot 10^{10}$
ferro	$1.7 \cdot 10^{11}$
mercurio	$2.8 \cdot 10^{10}$
ottone	$6.1 \cdot 10^{10}$
rame	$1.4 \cdot 10^{11}$
tungsteno	$2.0 \cdot 10^{11}$
vetro per finestre	$5.0-5.5 \cdot 10^{10}$