UNIVERSITÀ DI PADOVA · 1222

Corso di Fisica Generale – Pt1
Chimica Industriale 25/26

Lez 6. Dinamica dei sistemi di punti materiali

Docente:
Alessandro Patelli
alessandro.patelli@unipd.it



Sommario

- Sistemi di punti. Forze interne e forze esterne
- Centro di massa
- Conservazione della quantità di moto
- Teorema del momento angolare
- Sistema di riferimento del centro di massa
- Teorema di Koenig
- Teorema dell’energia cinetica
- Proprietà dei sistemi di forze applicate a punti diversi

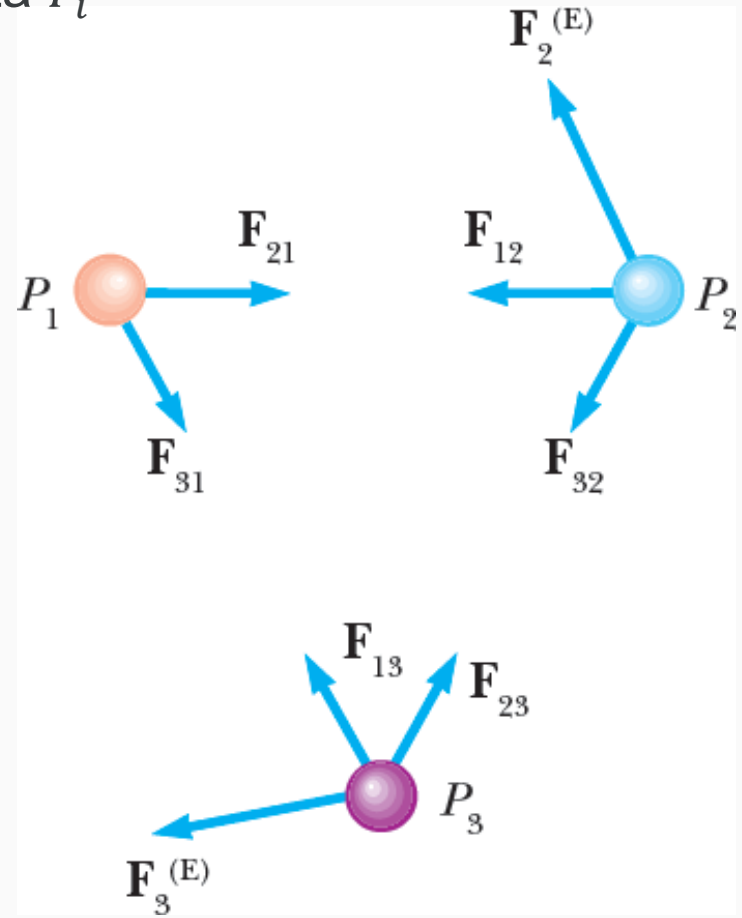
Posso pensare che su ogni punto materiale agisca una forza $\vec{F}_i$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

$\vec{F}_i^{(E)}$ □ forze esterne dovute all'interazione con un corpo esterno al sistema di punti

$\vec{F}_i^{(I)}$ □ forze interne al sistema di punti, dovute alle interazioni fra i punti stessi

□ **coppie di forze**

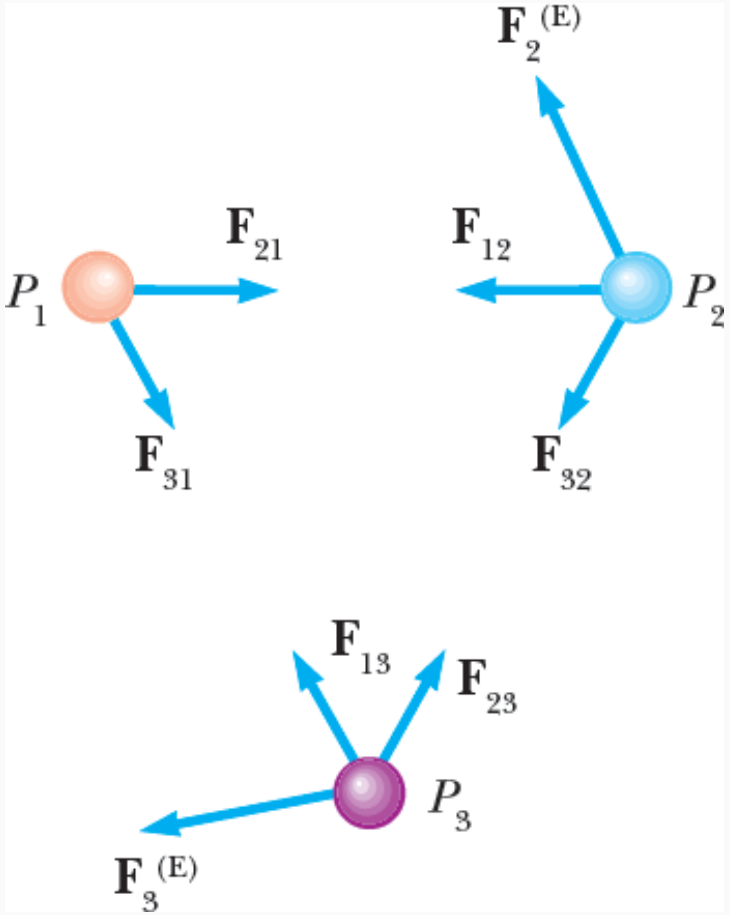


Forze interne

Essendo le forze interne coppie di forze ne risulta che la somma è **nulla**

$$\overrightarrow{F^{(I)}} = \sum_i \overrightarrow{F_i^{(I)}} = \sum_{i,j} \overrightarrow{F_{i,j}} = 0$$

con $i = 1,2,\dots,n\ ;\ j = 1,2,\dots,n\ ;\ j \neq i$



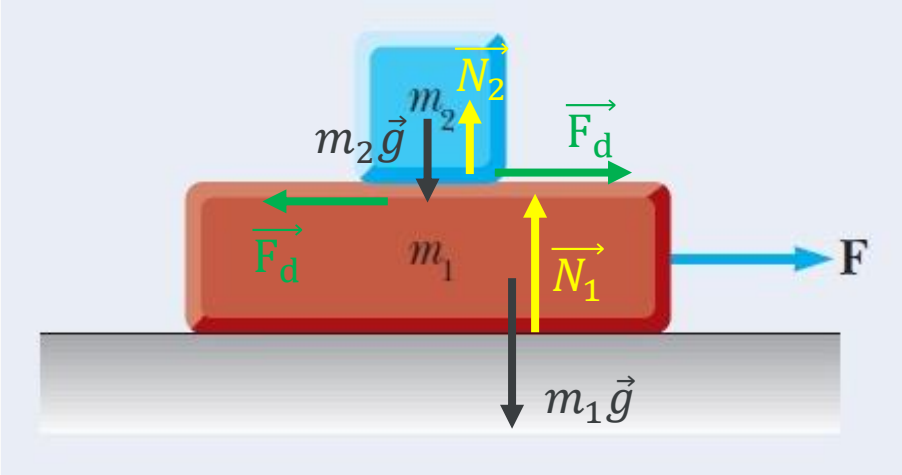
Quantità caratteristiche del Sistema di Punti

Per ogni **singolo punto** possiamo definire:

posizione	$\mathbf{r}_i$	**velocità**	$\boldsymbol{v}_i$
accelerazione	$\boldsymbol{a}_i = \mathbf{F}_i / m_i$	**quantità di moto**	$\mathbf{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i,$
momento angolare	$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$	**energia cinetica**	$E_{k,i} = \frac{1}{2} m v_i^2.$

Per il **Sistema di Punti** nella sua totalità invece possiamo definire:

quantità di moto totale	$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i,$
momento angolare totale	$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i),$
energia cinetica totale	$E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2.$



Quali sono le forze interne e le forze esterne?

Un corpo di massa m_1 scivola su un piano orizzontale liscio sotto l'azione della forza esterna $\vec{F}$; sul corpo è poggiato un secondo corpo di massa m_2 che scivola rispetto a m_1.
Tra m_1 e m_2 esiste una forza di attrito radente con coefficiente μ_d.
Calcolare le accelerazioni dei due corpi.

$$\vec{F} - \mu_d m_2 \vec{g} = m_1 \overrightarrow{a_1} \qquad \overrightarrow{a_1} = \frac{\vec{F} - \mu_d m_2 \vec{g}}{m_1}$$

$$\mu_d m_2 \vec{g} = m_2 \overrightarrow{a_2} \qquad \overrightarrow{a_2} = \mu_d \vec{g}$$

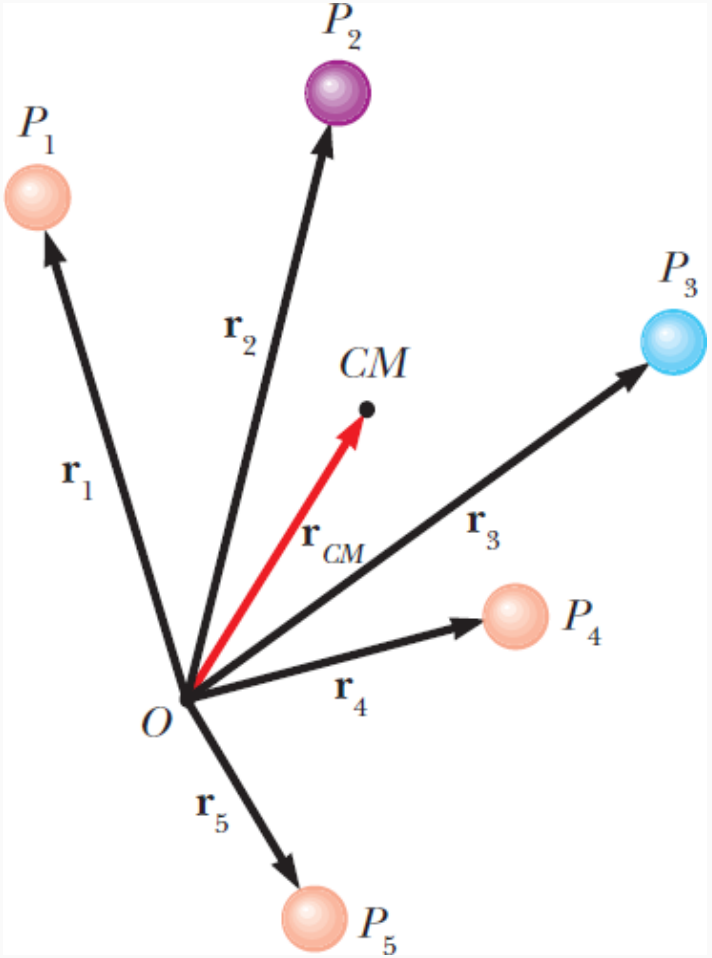
Centro di massa

Il **centro di massa** di un sistema di punti materiali è il **punto geometrico** la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + \cdots + m_n\vec{r_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

Somma di vettori che può essere scomposta come al solito lungo gli assi

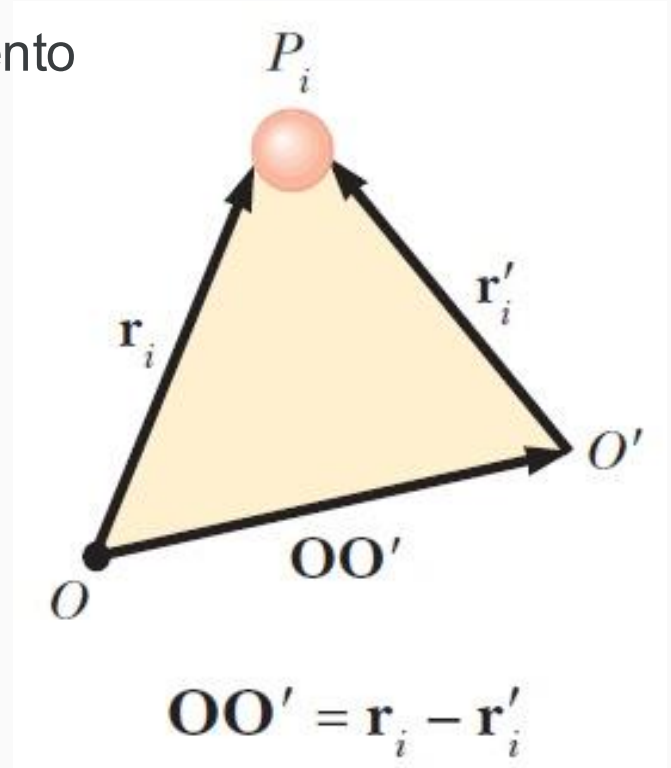
$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \; ; \; y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \; ; \; z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$



Velocità del CM

Il centro di massa è ovviamente indipendente dal sistema di riferimento

$$\overrightarrow{r'_{CM}} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{r'_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\vec{r_i} - \overrightarrow{OO'})}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i} - \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{r_{CM}} - \overrightarrow{OO'}$$



Per quanto riguarda la velocità

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v_{CM}} = \frac{d\overrightarrow{r_{CM}}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r_i}}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{m}}$$

la quantità di moto di un sistema di punti materiali è eguale alla quantità di moto $m\overrightarrow{v_{CM}}$ che avrebbe il centro di massa se considerato come un punto materiale che abbia la posizione $\overrightarrow{r_{CM}}$, la velocità $\overrightarrow{v_{CM}}$ e massa pari alla massa totale m del sistema.

Quantita' di moto nel Sistema CM

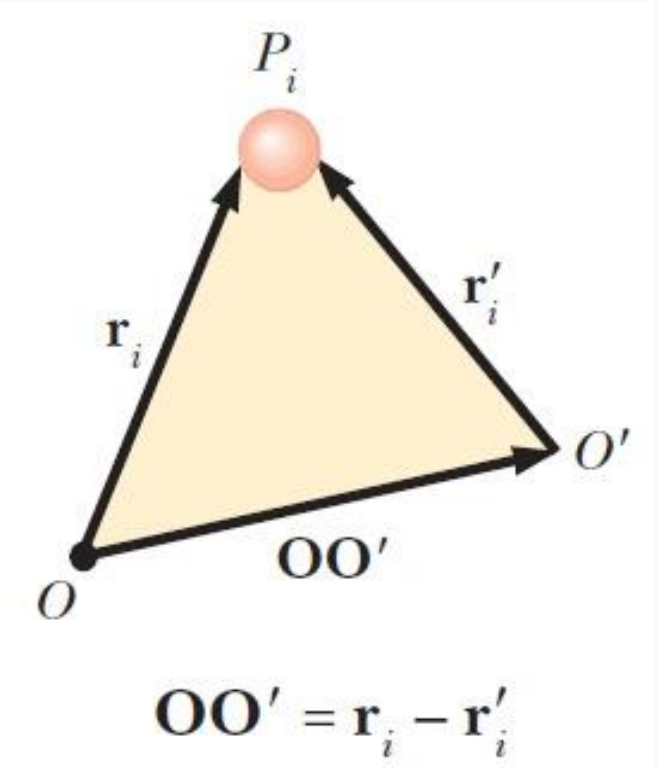
Nel Sistema del centro di massa, mettendo quindi O' nel CM si ha

$$\overrightarrow{v'}_{CM} = \frac{d\overrightarrow{r'}_{CM}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{v}_{CM} - \vec{v}_{CM} = 0$$

Nel Sistema CM il centro di massa è in quiete

Nel Sistema CM la quantità di moto del Sistema è nulla

$$\overrightarrow{\mathrm{P}'}_{CM} = 0$$



Accelerazione del CM

Analogamente possiamo ricavare l'accelerazione del centro di massa

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{d\overrightarrow{v_{CM}}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{a_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{a_i}}{m} = \frac{\sum_i \overrightarrow{F_i}}{m}$$

Sappiamo che possiamo dividere le forze agenti sul punto in forze interne ed esterne

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{\sum_i \overrightarrow{F_i^{(E)}} + \sum_i \overrightarrow{F_i^{(I)}}}{m} = \frac{\sum_i \overrightarrow{F_i^{(E)}}}{m} = \frac{\overrightarrow{F_{net}^{(E)}}}{m}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{F_{net}^{(E)}} = m\overrightarrow{a_{CM}}}$$

il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.

1° equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$\overrightarrow{F_{net}^{(E)}} = m\overrightarrow{a_{CM}} = m\frac{d\overrightarrow{v_{CM}}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\overrightarrow{v_{CM}}) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

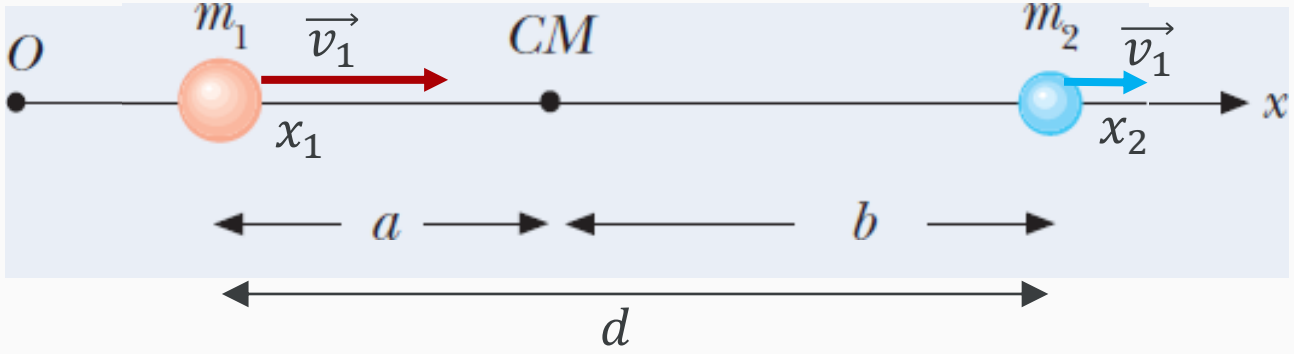
la risultante delle forze esterne è eguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.

Proprietà del CM:

- la sua velocità è eguale alla quantità di moto totale divisa per la massa totale, ovvero la sua quantità di moto $m\overrightarrow{v_{CM}}$ è eguale alla quantità di moto totale $\vec{P}$;
- la sua accelerazione è determinata dalla risultante delle sole forze esterne agenti sul sistema;
- $\overrightarrow{r_{CM}}$, $\overrightarrow{v_{CM}}$ e $\overrightarrow{a_{CM}}$ sono le medie pesate sulle masse dei raggi vettori, velocità, accelerazioni dei singoli punti e pertanto forniscono informazioni di **proprietà medie** e non sul moto dei singoli punti.

Esempio

Troviamo posizione e velocità del CM



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \xrightarrow{\text{se } m_1 = m_2} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Sono valori medi pesati dalla massa

Guardiamo adesso non rispetto al sistema di riferimento ma rispetto ai punti stessi

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_2 x_1 - m_2 x_1}{m_1 + m_2} = x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \qquad b = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1}}$$

Conservazione della quantità di moto

Consideriamo un sistema di punti interagenti isolato

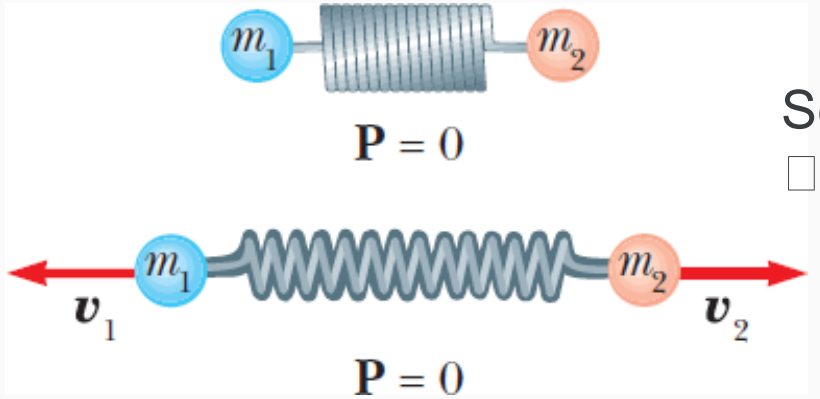
$$\overrightarrow{F_{net}^{(E)}} = null$$

Ma allora $\overrightarrow{a_{CM}} = \mathbf{0}$; $\overrightarrow{v_{CM}} = costante$; $\vec{P} = costante$

Conservazione della quantità di moto lineare

1° legge di Newton

quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete.



Sono solo forze interne

□ solo coppie di forze

Se agisce una forza …

Se è una **forza interna** $\frac{\Delta\vec{p_i}}{\Delta t} = \overrightarrow{F_{ij}}$ ma essendo a coppie $\overrightarrow{F_{ij}} = -\overrightarrow{F_{ji}}$ $\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{\sum_i \Delta\vec{p_i}}{\Delta t} = 0$

Se è una **forza esterna** $\frac{\Delta\vec{p_i}}{\Delta t} = \overrightarrow{F_i^{(\mathrm{E})}}$ ➡ $\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{\sum_i \Delta\vec{p_i}}{\Delta t} = \frac{\sum_i \overrightarrow{F_i^{(\mathrm{E})}}}{\Delta t} = \overrightarrow{F_{\mathrm{net}}^{(\mathrm{E})}}$

E’ la nostra 1° equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Per familiarizzare con la quantità di moto….

Ricordiamo che l’**impulso** è $\boldsymbol{\Delta\vec{p} = \vec{J} = \vec{F}\Delta t}$

Significato fisico di "Impulso"



Quale causa la maggiore variazione di quantità di moto di un oggetto?

Caso 1 : forza media di 5 N che agisce per 4s
Caso 2 : forza media di 2 N che agisce per 10s

Caso 1 $\quad |\vec{J}_1| = 5\times4 = 20\ Ns$

Caso 2 $\quad |\vec{J}_2| = 10\times2 = 20\ Ns$

Il cambiamento di slancio è lo stesso, ma la minore forza superficiale e di solito la maggiore superficie di contatto consentono di prevenire lesioni agli stuntman.

Significato fisico di "Impulso"



Un saltatore con l'asta salta l'asticella e cade su una spessa imbottitura.

Atterra con una velocità di 9,8 m/s; L'imbottitura lo porta poi a fermarsi in un tempo di 0.40 s. Il suo peso è W.

Qual è la forza media sul suo corpo dovuta all'imbottitura durante quell'intervallo di tempo?

Significato fisico di "Impulso"



v_i = 9.8 m/s
Δt = 0.40 s
m

y

$$\left(\vec{F}_{pad} + \vec{W}\right) = \frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\left(F_{pad,y} - mg\right) = m\frac{[0-(-9.8)]}{0.40} \approx \frac{mg}{0.40}$$

$$F_{pad,y} \approx \frac{2}{5}mg + mg = \frac{7}{5}mg$$

Pensandoci un po' …

Una forza esercitata lungo un percorso genera lavoro *e fa variare energia cinetica*

$$\boldsymbol{L = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \Delta E_K}$$

Una forza esercitata per un tempo genera impulso *e va variare la quantità di moto*

$$\boldsymbol{\vec{I} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\, dt = \Delta\vec{p}}$$

Variazione della quantità di moto

Energia si conserva

$$\frac{1}{2}m\left(v^2{}_{f,x}+v^2{}_{f,\mathrm{y}}\right)=\frac{1}{2}m\left(v^2{}_{\mathrm{i},x}+v^2{}_{\mathrm{i,y}}\right)$$

$$\boldsymbol{v_{f,y}=v_{i,y}}\ \rightarrow \Delta p_y=0$$
$$\boldsymbol{v_{f,x}=-v_{i,x}}\rightarrow \Delta p_x=2mv_x$$

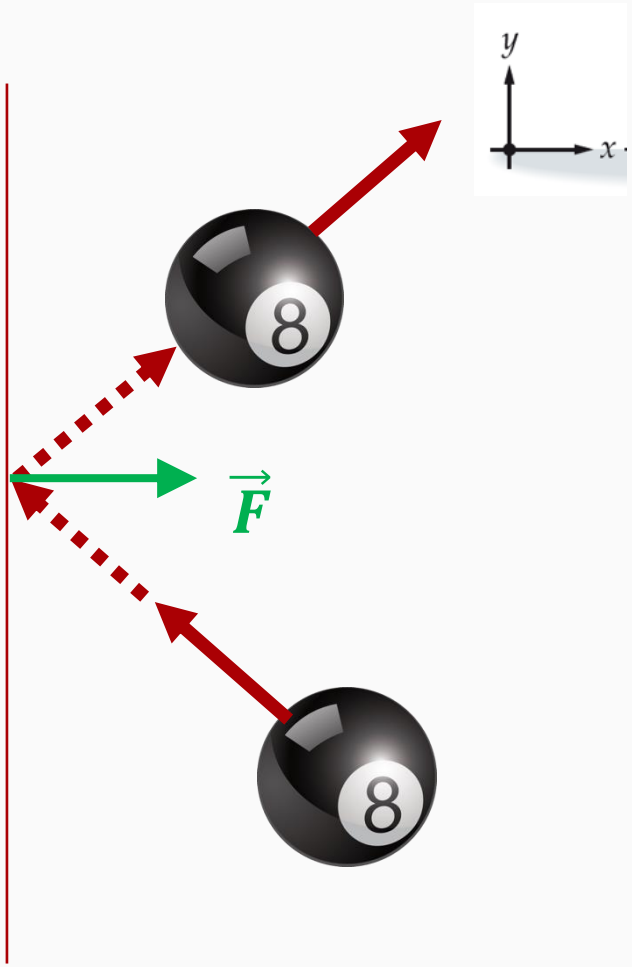
$$\vec{F}\Delta t=m\overrightarrow{v_f}-m\overrightarrow{v_i}=\Delta\vec{p}$$

Quindi la quantità di moto è una grandezza vettoriale $\vec{p}=m\overrightarrow{v_f}$

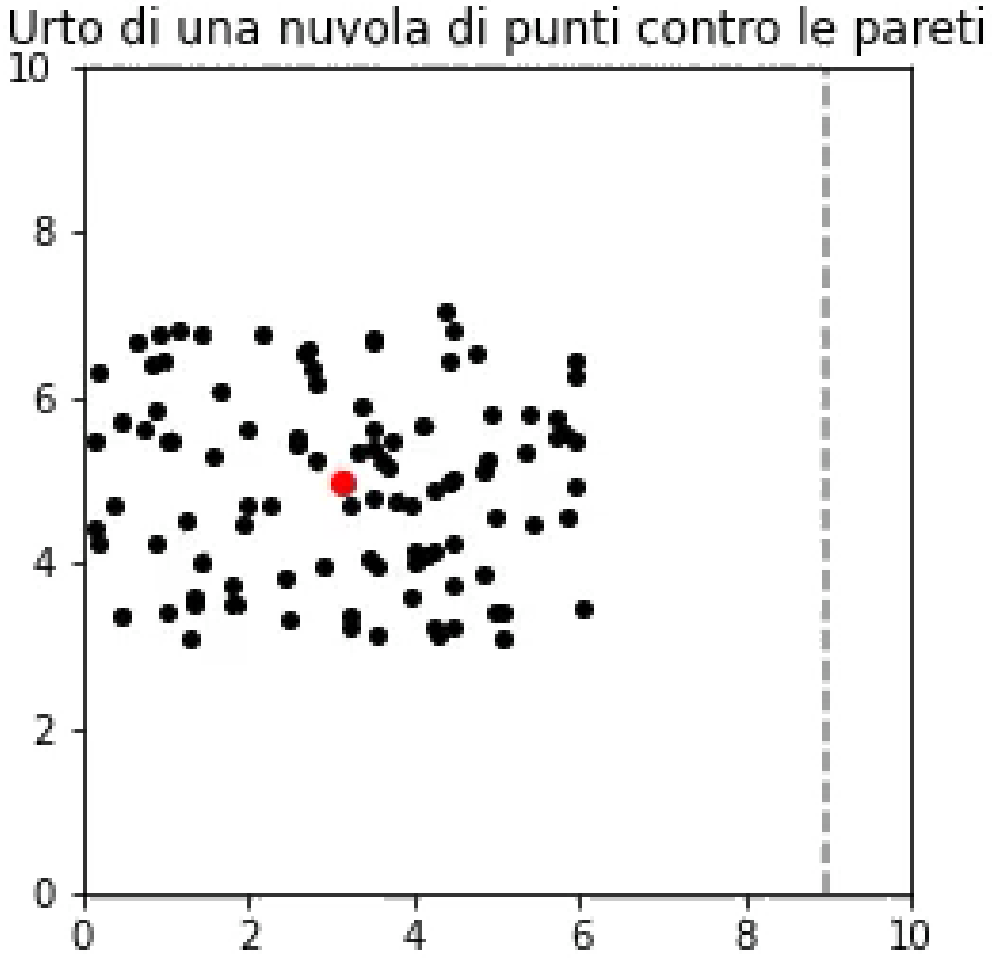
La formula sopra è valida solo se la forza è costante nell'intervallo di tempo Δt

Nel caso più generale vale

$$\vec{F}dt=m\overrightarrow{v_f}-m\overrightarrow{v_i}=d\vec{p}$$



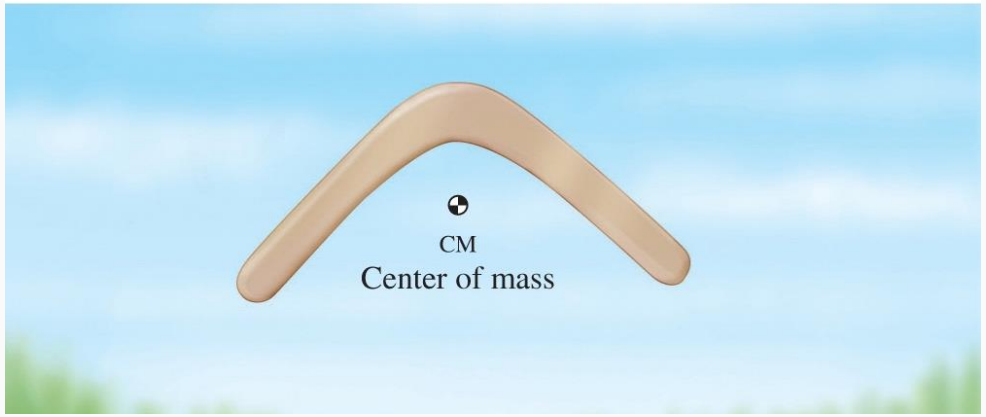
Esempio la pressione

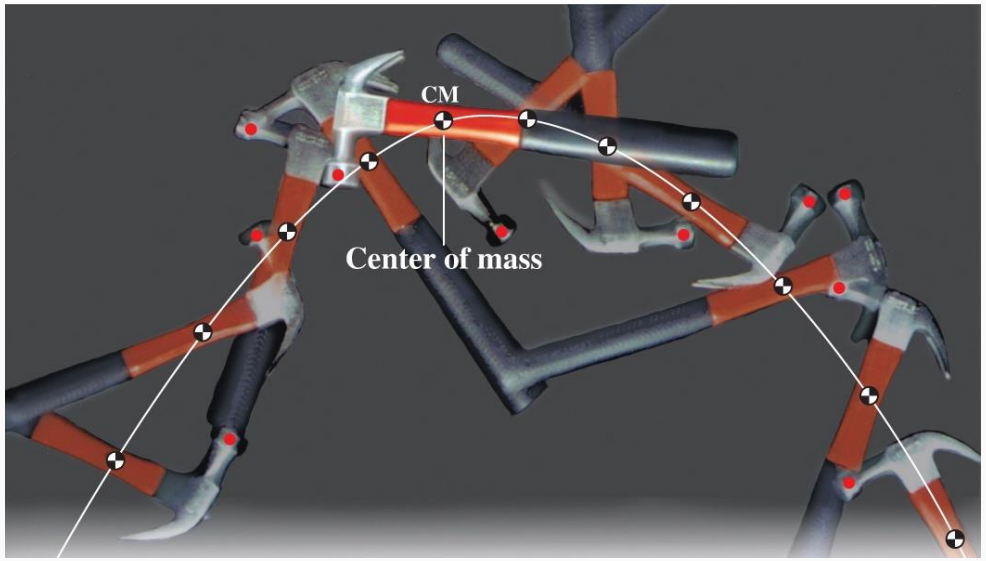


Moto del CM e rispetto il CM

Il moto di un sistema di punti materiali può essere descritto dalla somma di 2 moti:

- ✓ Il moto del centro di massa (forze esterne)
  Il moto relativo al centro di massa (forze interne)





3° legge di Newton

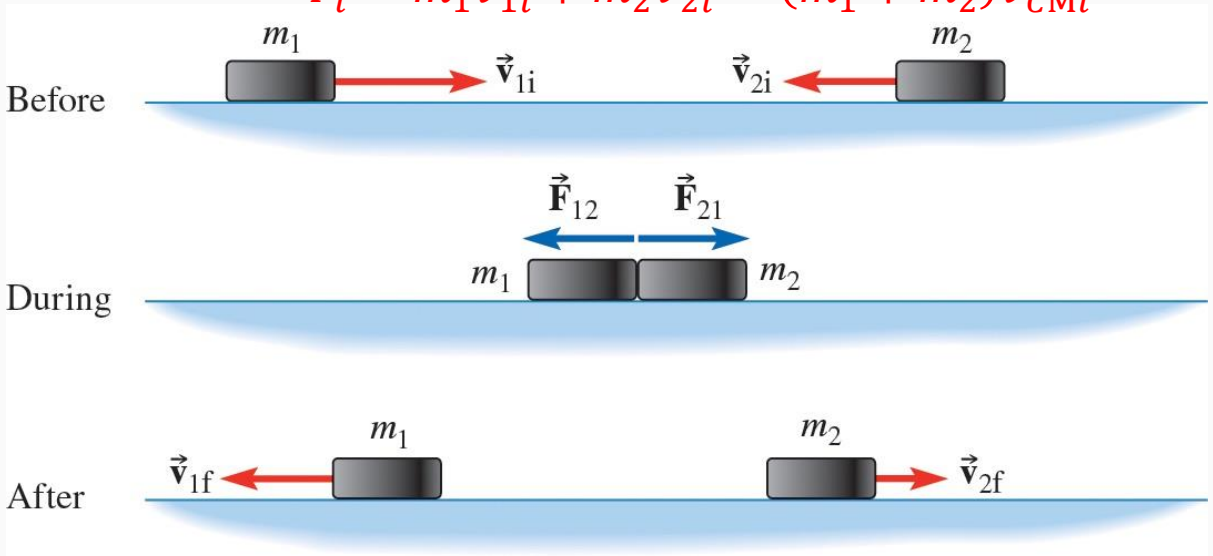
In un'interazione tra due oggetti, ogni oggetto esercita una forza sull'altro. Queste due forze sono uguali in grandezza e opposte in direzione

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Se i 2 oggetti sono un sistema isolato

$$\boxed{\Delta\vec{p}_{12} = -\Delta\vec{p}_{21}}$$

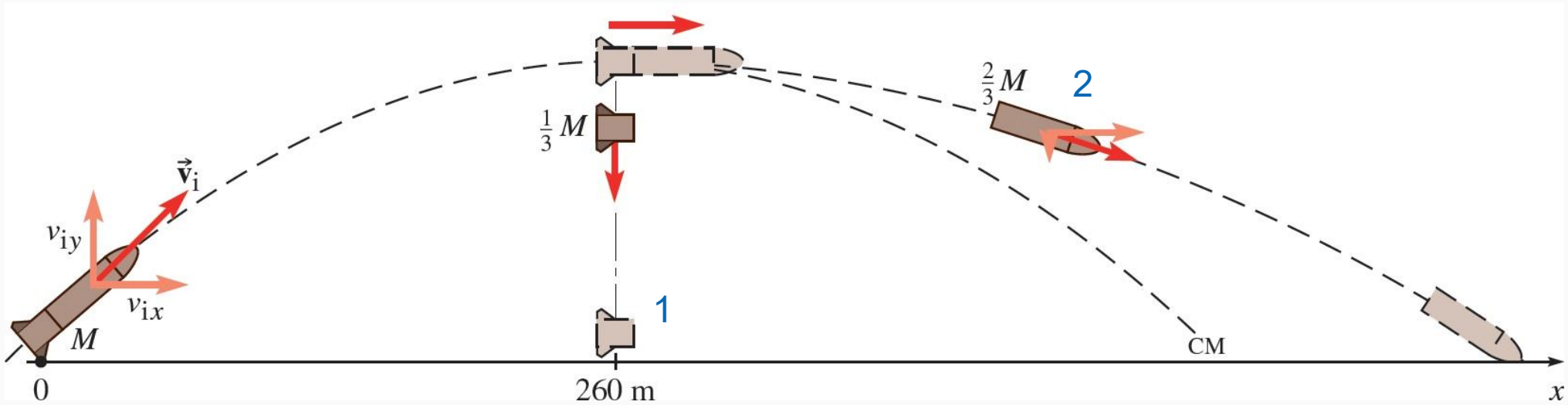
$$\vec{P}_i = m_1\overrightarrow{v_{1i}} + m_2\overrightarrow{v_{2i}} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{v_{CMi}}$$



$$\vec{P}_i = \vec{P}_f = m_1\overrightarrow{v_{1f}} + m_2\overrightarrow{v_{2f}} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{v_{CMf}}$$

- La quantità di moto totale di un sistema è la somma vettoriale delle quantità di moto di ciascun oggetto nel sistema
  Le interazioni esterne possono modificare la quantità di moto totale di un sistema
  Le interazioni interne non modificano la quantità di moto totale di un sistema

Esempio



Un modello di razzo viene sparato da terra in una traiettoria parabolica.
Nella parte superiore della traiettoria, a una distanza orizzontale di 260 m dal punto di lancio, si verifica un'esplosione all'interno del razzo, rompendolo in due frammenti. Un frammento, che ha un terzo della massa del razzo, cade dritto sulla Terra come se fosse stato lasciato cadere da fermo in quel punto.
A quale distanza orizzontale dal punto di lancio atterra l'altro frammento?
Ignora la resistenza dell'aria.

Soluzione

Poiché la 1a parte cade verticalmente come se fosse caduta da fermo, ciò significa

Vista CM

$$\Delta \boldsymbol{p_{1x}} + \Delta \boldsymbol{p_{2x}} = \boldsymbol{0}$$

$$\Delta \boldsymbol{p_{1x}} = -\boldsymbol{m_1 v_{ix}} = -\Delta \boldsymbol{p_{2x}} = -(\boldsymbol{m_2 v_{2x}})$$

$$\boldsymbol{v_{2x}} = \frac{\boldsymbol{m_1}}{\boldsymbol{m_2}} \boldsymbol{v_{ix}}$$

$$\Delta \boldsymbol{p_{1y}} = \boldsymbol{0} = -\Delta \boldsymbol{p_{2y}}$$

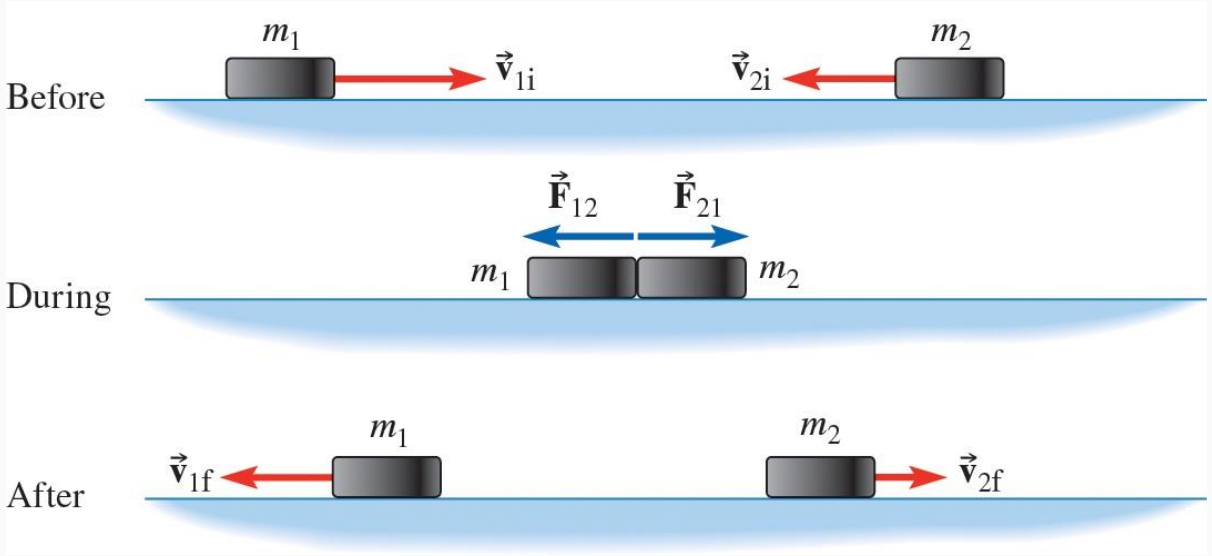
Il proiettile esplode dopo Δt_i quando è in cima:

$$\Delta x = v_{ix} \Delta t_i = 260\ m$$

$$\Delta y = v_{iy} \Delta t_i - {}^1\!/_2\, g (\Delta t_i)^2$$

Le parti del proiettile, poiché non vi è alcuna variazione di quantità di moto nella direzione y, toccheranno entrambe il suolo dopo $\Delta t_f = \Delta t_i$

$$\Delta x = v_{ix} \Delta t_i + v_{ix} \Delta t_f + \frac{m_1}{m_2} v_{ix} \Delta t_f = \left(1 + 1 + \frac{\frac{1}{3} M}{\frac{2}{3} M}\right) v_{ix} \Delta t_i = \left(2 + \frac{1}{2}\right) 260\ \mathrm{m} = 650\ \mathrm{m}$$

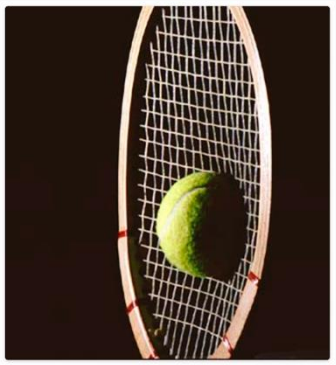


In un urto (interazione veloce) se non agiscono forze esterne al sisterma allora **la quantita' di moto totale si conserva**

$$\Delta\vec{P} = 0$$

Nell'urto posso pero' conservare o meno l'energia a causa della deformazione dei corpi

Elastico



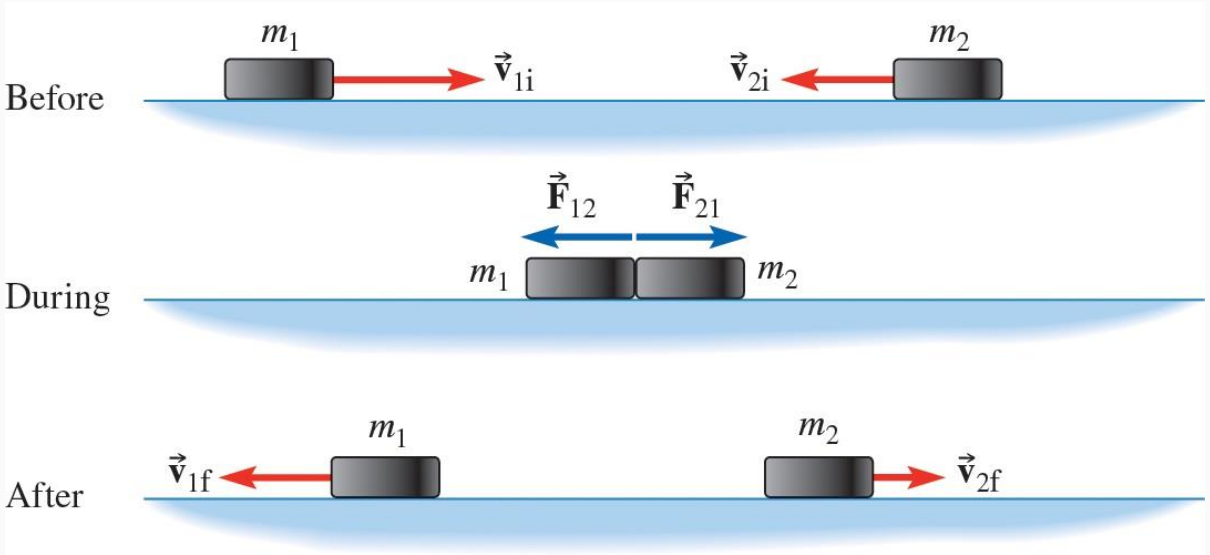
$$\Delta E_{tot} = 0$$

Anelastico / parzialmente elastico



$$\Delta E_{tot} \neq 0$$

Urto elastic 1D



$$\Delta\vec{P} = 0$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

1) $$-m_1(v_{1f} - v_{1i}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$$

$$\Delta E_{tot} = 0$$

$$^1/_2\, m_1 v_{1i}^2 + {}^1/_2\, m_2 v_{2i}^2 = {}^1/_2\, m_1 v_{1f}^2 + {}^1/_2\, m_2 v_{2f}^2$$

2) $$-m_1(v_{1f}^2 - v_{1i}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

Ricordando $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$

Facendo 2)/1)

$$(v_{1f} + v_{1i}) = (v_{2f} + v_{2i})$$

Sostituisco in 1)

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + 2\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = 2\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Casi particolari

$m_1 = m_2$ ➡ $v_{1f} = v_{2i}$

$v_{2f} = v_{1i}$

$v_{2i} = 0$ ➡ $v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$ se $m_1 \leqslant m_2$ …

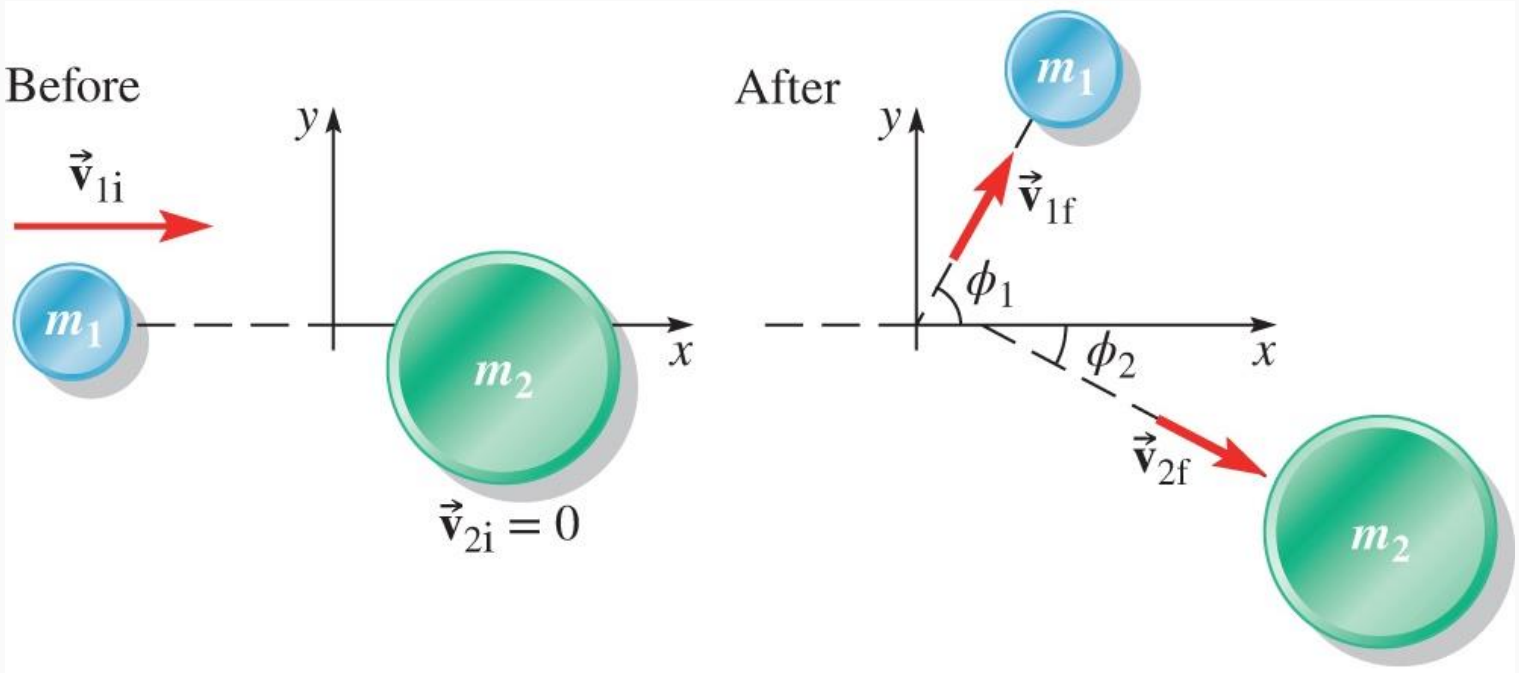
$v_{2f} = 2\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$

$m_2 \gg m_1$ ➡ $v_{1f} = -v_{1i} + 2v_{2i}$

$v_{2f} = v_{2i}$

Urto elastic 2D

Energia meccanica si conserva



Dischi che si scontrano su un tavolo d'aria (Air Hockey)

Nessun attrito

Cons. Momento

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\varphi_1 + m_2 v_{2f} \cos\varphi_2$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\varphi_1 - m_2 v_{2f} \sin\varphi_2$$

Cons. Energia

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

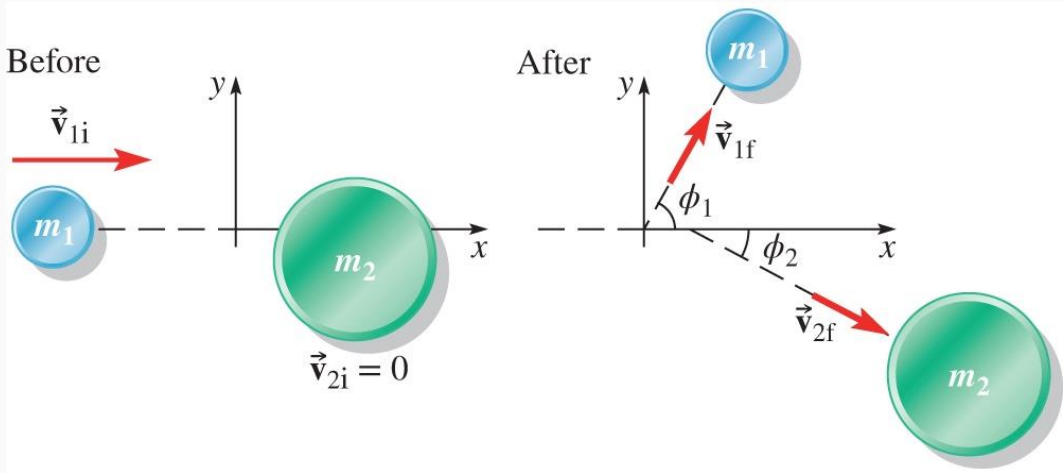
4 variabili

3 equationi

Consideriamo φ_1 come una quantità nota

Collisione elastica

Energia meccanica si conserva



Dalla conservazione del momento lungo y

$$v_{2f} = \frac{m_1 \sin\varphi_1}{m_2 \sin\varphi_2} v_{1f}$$

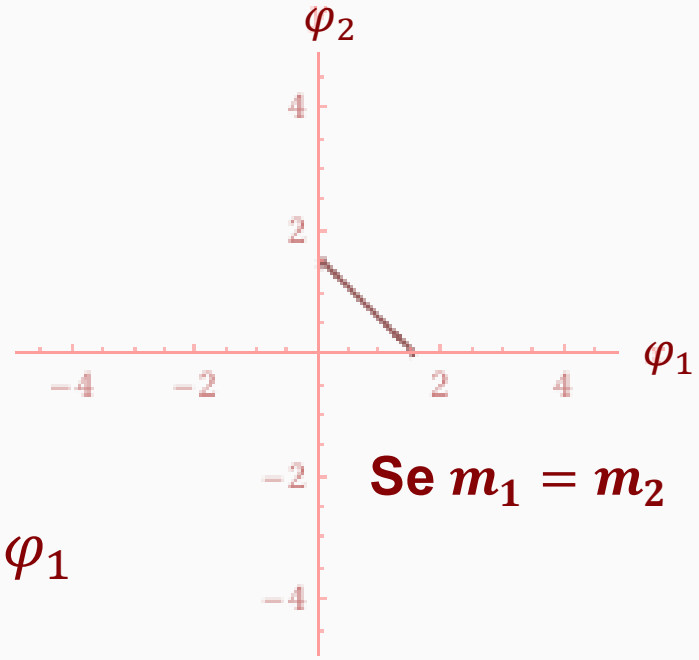
Inserisco nella conservazione del momento lungo x

$$v_{1i} = (\cos\varphi_1 + \frac{\sin\varphi_1}{\tan\varphi_2}) v_{1f}$$

Sostituisco nella conservazione dell'energia

$$m_1 \left(\cos\varphi_1 + \frac{\sin\varphi_1}{\tan\varphi_2}\right)^2 = m_1 + m_2 \left(\frac{m_1 \sin\varphi_1}{m_2 \sin\varphi_2}\right)^2$$

$$\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin^2\varphi_2 + \frac{m_1}{m_2}\sin^2\varphi_1$$



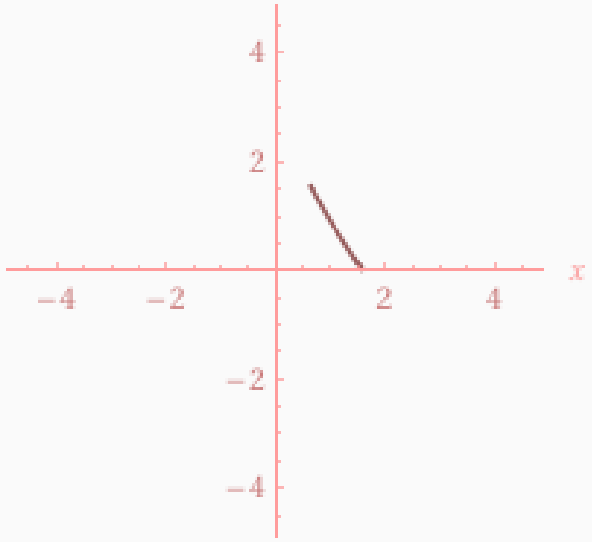
Se $m_1 = m_2$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 \qquad v_{1f} = v_{1i}\cos\varphi_1 \qquad v_{2f} = v_{1i}\sin\varphi_1$$

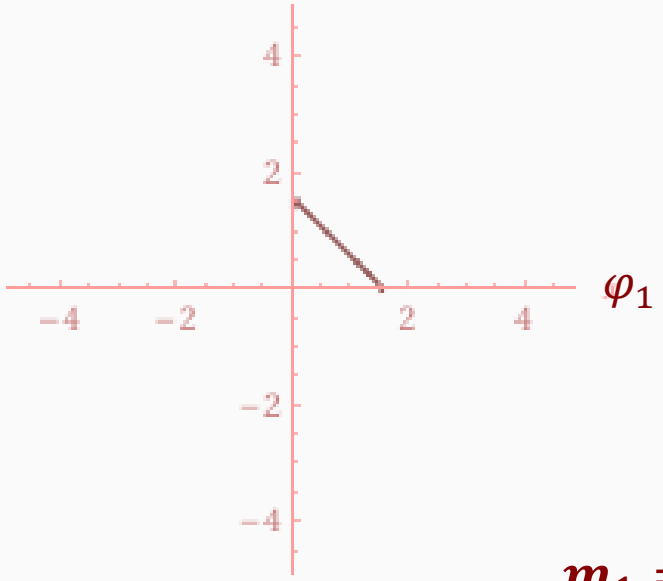


Non tutti gli angoli sono permessi

$3m_1 = m_2$

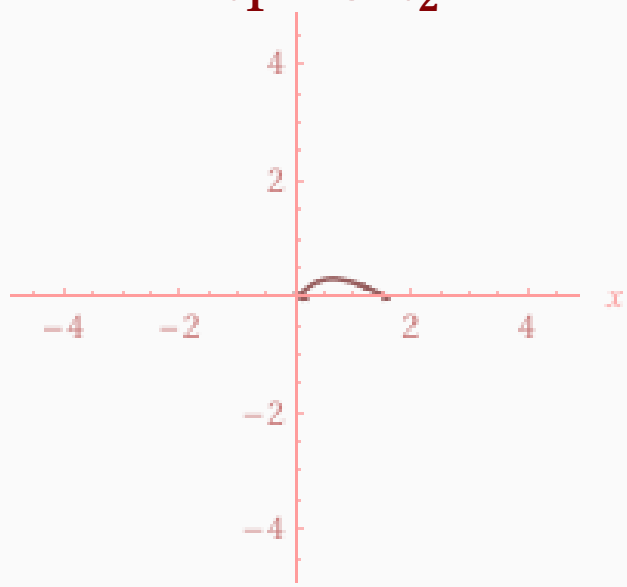


φ_2

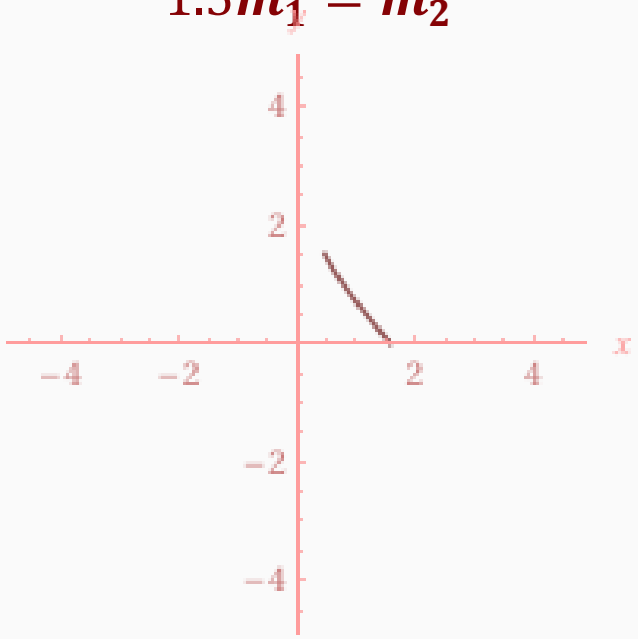


φ_1

$m_1 = 3m_2$

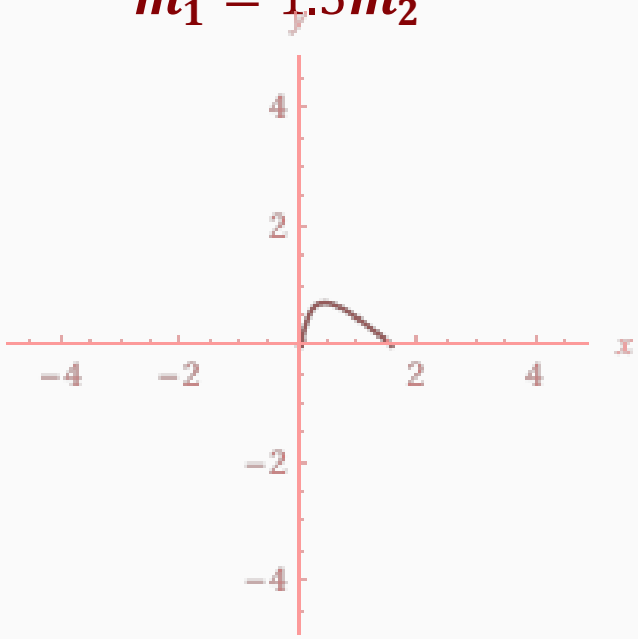


$1.5m_1 = m_2$



Se $m_1 = m_2$

$m_1 = 1.5m_2$

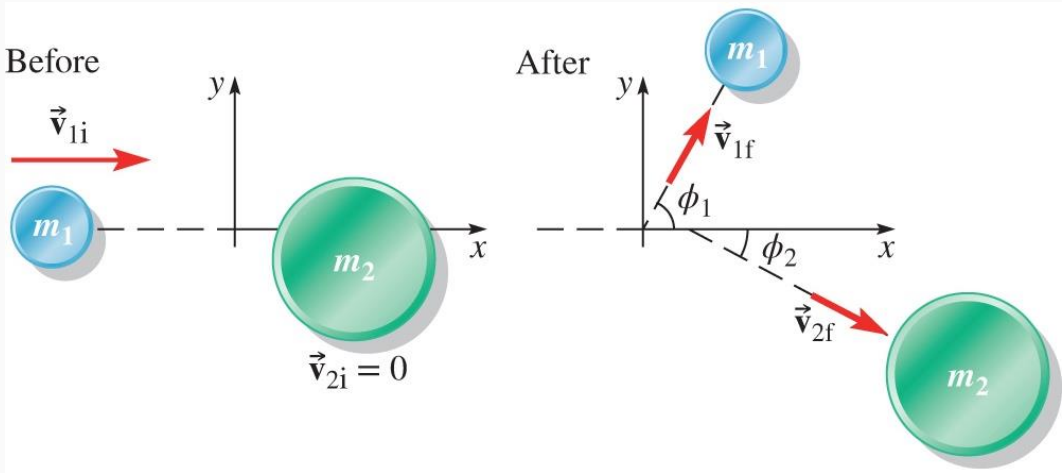


Esempio

$m_1 = 4\ kg \qquad v_{1i} = 5m/s$

$m_2 = 6\ kg \qquad \varphi_1 = 45°$

Proiettiamo questa volta lungo gli assi



conservazione del momento

$$m_1 v_{1x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \rightarrow v'_{2x} = \frac{m_1}{m_2}(v_{1x} - v'_{1x})$$

$$0 = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y} \rightarrow v'_{1y} = -\frac{m_2}{m_1} v'_{2y}$$

Poiche' $\varphi_1 = 45°$ → $v'_{1x} = v'_{1y}$ →

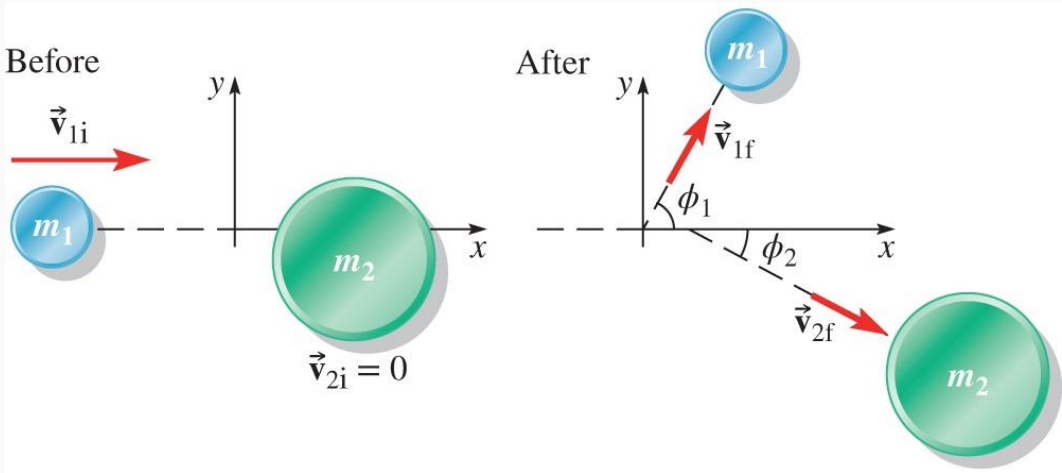
$$v'^2_1 = v'^2_{1x} + v'^2_{1y} = 2v'^2_{1x} = 2\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v'^2_{2y}$$

Energia cinetica

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1x}^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_{1x} + \frac{1}{2}m_1 v'^2_{1y} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{2x} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{2y} = m_1 v'^2_{1x} + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}(v_{1x} - v'_{1x})^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2} v'^2_{1x}$$

Esempio

$$m_1 = 4\ kg \qquad v_{1i} = 5m/s$$
$$m_2 = 6\ kg \qquad \varphi_1 = 45°$$



Energia cinetica

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1x}^2 = m_1 v'^2_{1x} + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}v'^2_{1x} + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}(v_{1x} - v'_{1x})^2$$

$$m_2 v_{1x}^2 = 2m_2 v'^2_{1x} + m_1 v'^2_{1x} + m_1(v_{1x} - v'_{1x})^2$$

$$2(m_2 + m_1)v'^2_{1x} - 2m_1 v_{1x} v'_{1x} + (m_1 - m_2)v_{1x}^2 = 0$$

Perché esista una soluzione con $\varphi_1 = 45°$

$$m_2 < \frac{m_1}{\sqrt{2}}$$

$$v'_{1x} = \frac{m_1 v_{1x} \pm \sqrt{m_1^2 v_{1x}^2 - 2(m_2 + m_1)(m_1 - m_2)v_{1x}^2}}{2(m_2 + m_1)} = m_1 v_{1x}\frac{1 \pm \sqrt{2m_2^2 - m_1^2}}{2(m_2 + m_1)}$$

$m_1 = 4\ kg \qquad v_{1i} = 5m/s$

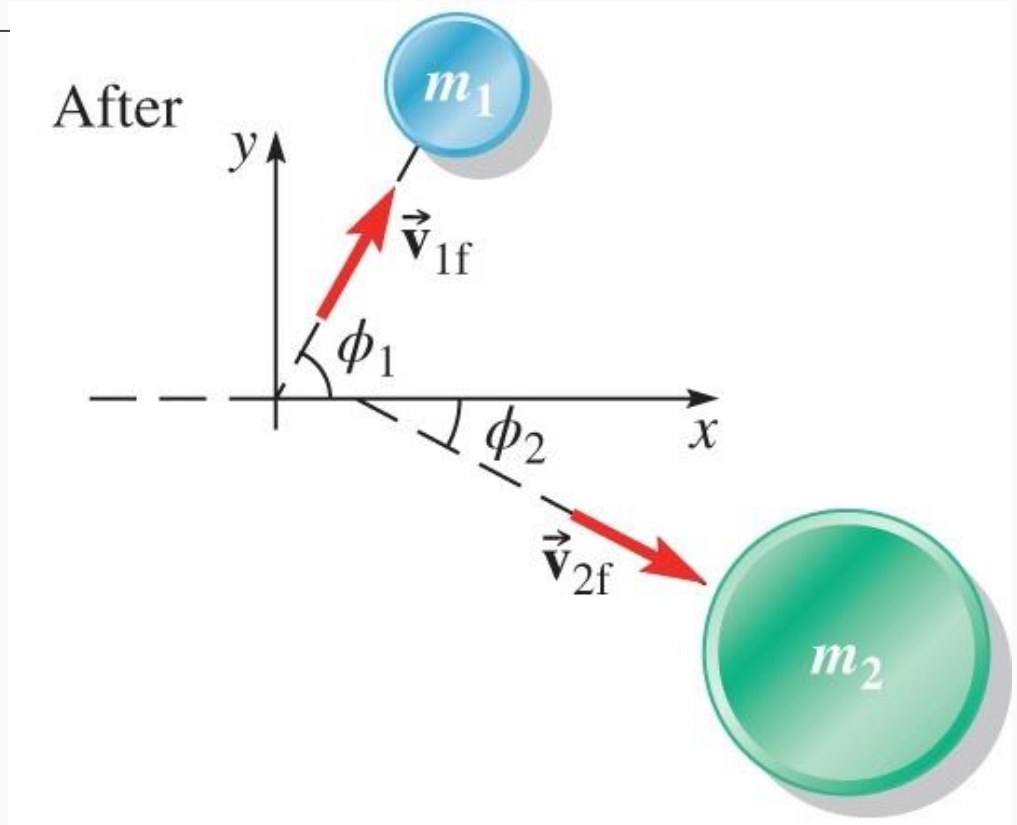
$m_2 = 6\ kg \qquad \varphi_1 = 45°$

$$v'_{1x} = \begin{matrix} 2.87\ m/s \\ -0.87\ m/s \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \varphi_1 = 45° \\ \varphi_1 = 135° \end{matrix} \qquad \begin{matrix} v'_{1x} = v'_{1y} \\ v'_{1x} = -v'_{1y} \end{matrix}$$

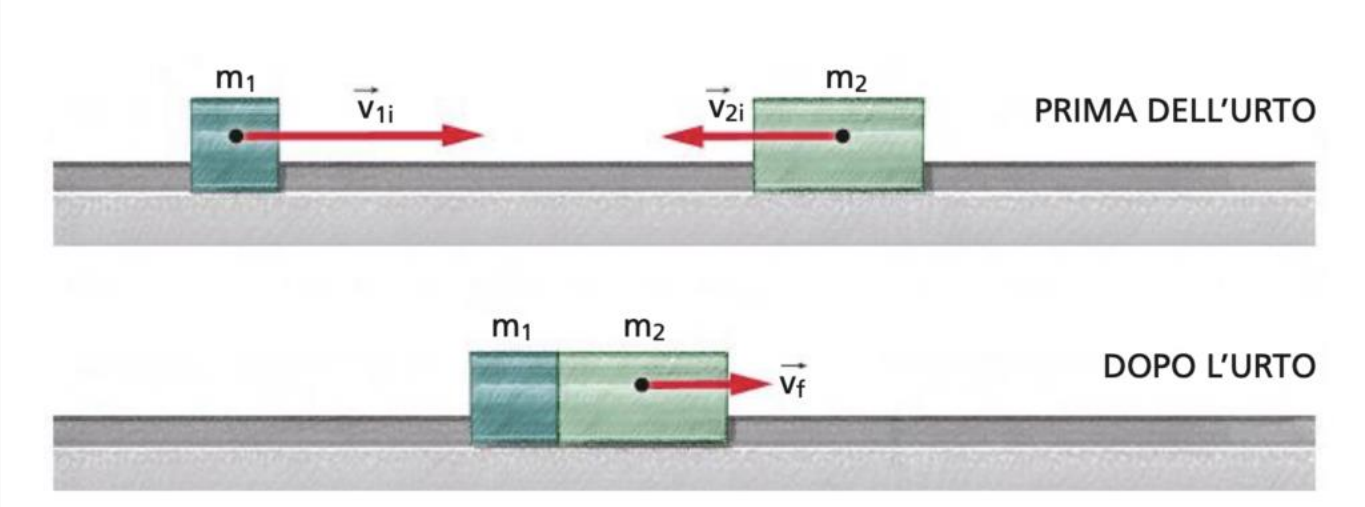
$$v'_{1y} = \begin{matrix} 2.87\ m/s \\ 0.87\ m/s \end{matrix}$$

$$v'_{2x} = \begin{matrix} 1.42\ m/s \\ 3.91\ m/s \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \varphi_1 = 53° \\ \varphi_2 = 8.4° \end{matrix}$$

$$v'_{2y} = \begin{matrix} -1.91\ m/s \\ -0.58\ m/s \end{matrix}$$



Urto anelastico

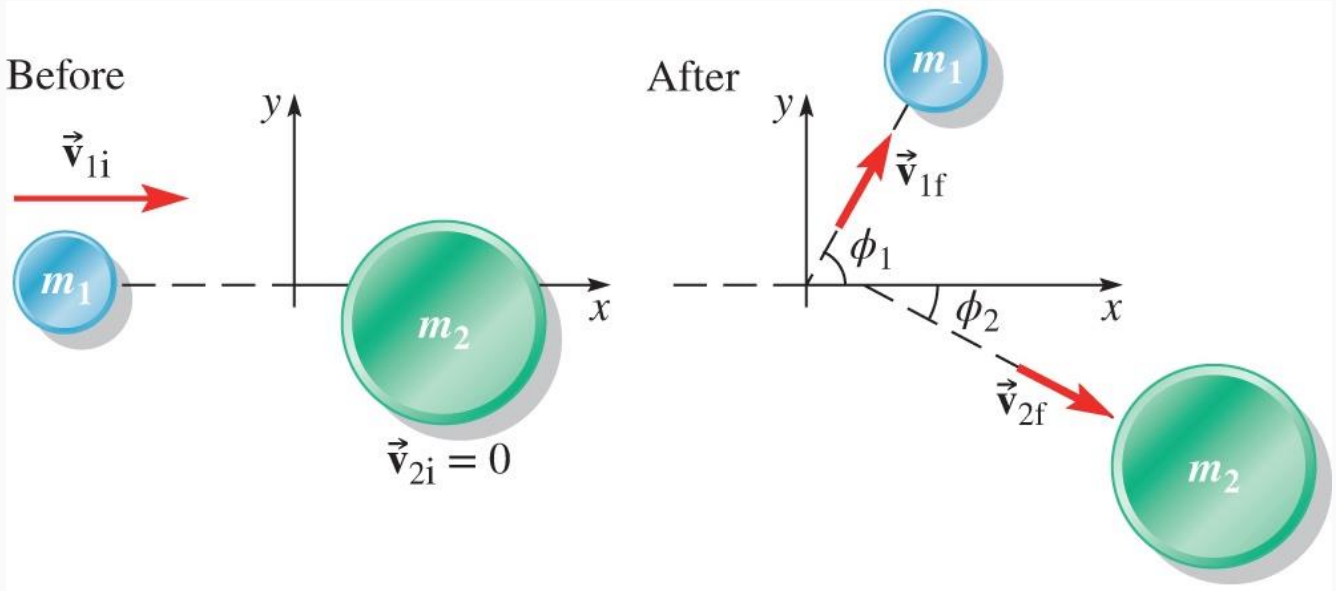


$$\Delta\vec{P} = 0$$

$$\Delta E_{tot} \neq 0$$

$$P_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f = P_f$$

$$\Rightarrow \quad v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$



Un piccolo disco (massa m_1 = 0.10 kg) scivola verso destra con una velocità iniziale di $8.0\ m/s$ senza attrito.
Il disco si scontra con un disco più grande (massa m_2 = 0.40 kg), che inizialmente è a riposo.

Dopo la collisione, i dischi si spostano ad angoli $\phi_1 = 60.0°$ sopra e $\phi_2 = 30.0°$ sotto la direzione iniziale di movimento del disco piccolo.

$$v_{1f} = \frac{1}{\cos\varphi_1}\frac{1}{\left(1+\frac{\tan\varphi_1}{\tan\varphi_2}\right)}v_{1i} = \frac{1}{2}v_{1i} = 4.0\ m/s$$

$$v_{2f} = \frac{m_1}{m_2}\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}v_{1f} = 0.433 v_{1f} = 1.7\ m/s$$

$$K_i = \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = 3.2\ J$$

$$K_f = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = 0.8\ J + 0.6\ J = 1.4\ J$$

$\Rightarrow$ $\Delta K = -1.8\ J$ Inelastic collision



Esercizio

Due oggetti con masse m_1 e m_2 si avvicinano l'uno all'altro frontalmente con momenti uguali e opposti in modo che la quantità di moto totale sia zero.



Mostrare che, se la collisione è elastica, la velocità finale di ogni oggetto deve essere uguale alla sua velocità iniziale

Soluzione

Strategia Utilizzare la conservazione della quantità di moto. Supponiamo che la collisione sia frontale. Anche $K_i = K_f$ poiché la collisione è elastica.

Conservazione della quantità di moto

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Conservazione dell'energia

$$m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2$$

Condizione di esercizio specifica $p_{tot} = 0$

$$p_{1\mathrm{i}} = -p_{2\mathrm{i}} \longrightarrow m_1 v_{1i} = -m_2 v_{2i}$$

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}, = 0 \quad \text{or} \quad m_1 v_{1f} = -m_2 v_{2f}$$

$$\frac{-m_1\left(v_{1f}^2 - v_{1i}^2\right) = m_2\left(v_{2f}^2 - v_{2i}^2\right)}{-m_1\left(v_{1f} - v_{1i}\right) = m_2\left(v_{2f} - v_{2i}\right)}$$

Gli oggetti hanno la stessa velocità dopo la collisione, ma in direzione opposta

$$\left(v_{1f} + v_{1i}\right) = \left(v_{2f} + v_{2i}\right) = -\frac{\mathrm{m}_1}{\mathrm{m}_2} v_{1f} - \frac{\mathrm{m}_1}{\mathrm{m}_2} v_{1\mathrm{i}}$$

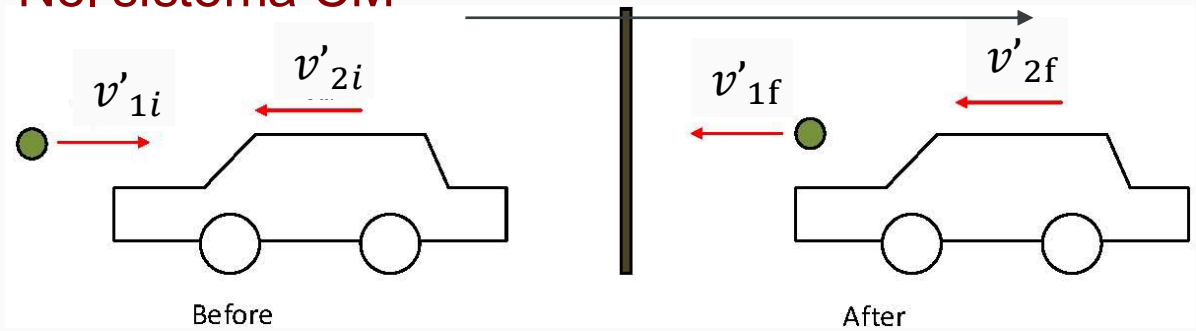
$$v_{1f} = -v_{1\mathrm{i}}$$

$$v_{2f} = -v_{2\mathrm{i}}$$



Soluzione

Nel sistema CM



Strategia Non ci sono forze esterne per cui la quantità di moto del CM è costante e nel sistema del CM la quantità di moto totale è nulla. Risolvo prima quindi nel sistema del CM e poi inserisco il moto del CM.

Nel sitema CM $v'_{1i} > 0\,, v'_{2i} < 0$ *indichiamo tutto come positive considerandoli come vettori*

Conservazione della quantità di moto

$$\mathrm{P}_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{tot}} = m_1 v'_{1i} + m_2 v'_{2i} = m_1 v'_{1f} + m_2 v'_{2f} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 v'_{1i} = -m_2 v'_{2i}, \quad m_1 v'_{1f} = -m_2 v'_{2f}$$

Conservazione dell'energia

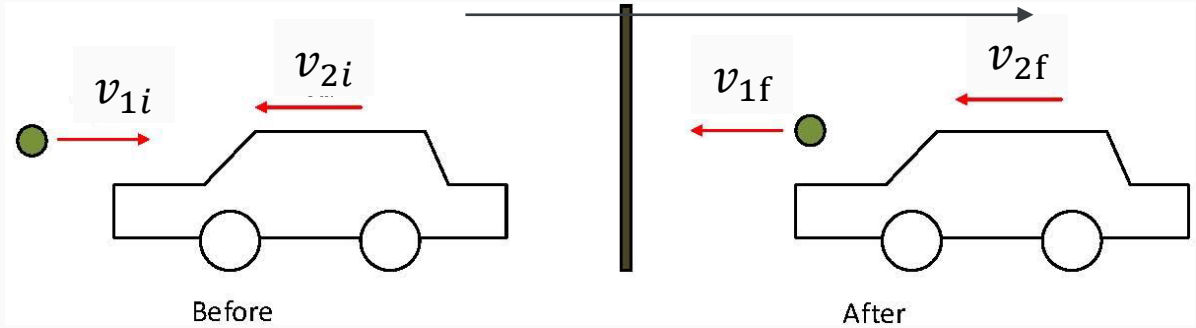
$$m_1 v'^2_{1i} + m_2 v'^2_{2i} = m_1 v'^2_{1f} + m_2 v'^2_{2f} \quad \Rightarrow \quad m_1 v'^2_{1i} + \frac{m_2^2}{m_1^2} v'^2_{1i} = m_1 v'^2_{1f} + \frac{m_2^2}{m_1^2} v'^2_{1\mathrm{f}}$$

$$v'^2_{1i} = v'^2_{1f}$$

Nel sitema CM $\Rightarrow$ $v'_{1i} = -v'_{1f}$, $v'_{2i} = -v'_{2f}$

Soluzione

Nel sistema strada



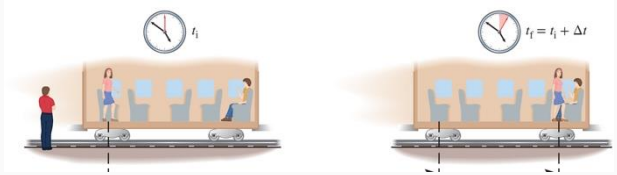
Strategia Non ci sono forze esterne per cui la quantità di moto del CM è costante e nel sistema del CM la quantità di moto totale è nulla. Risolvo prima quindi nel sistema del CM e poi inserisco il moto del CM.

Nel Sistema strada il CM si muove con velocita'

$$v_{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{m}_1}{\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2} v_{1\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{m}_2}{\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2} v_{2\mathrm{i}}$$

Non ci sono forze esterne e quindi la velocita' del CM non cambia. Quindi basta sommare alle velocita' finali la velocita' del CM

$$\overrightarrow{v_{WT}} = \overrightarrow{v_{WG}} - \overrightarrow{v_{TG}}$$



$$v_{1\mathrm{f}} = v'_{1\mathrm{f}} + v_{\mathrm{CM}} = -v_{1\mathrm{i}} + v_{\mathrm{CM}} + v_{\mathrm{CM}} \xrightarrow{\mathrm{m}_2 \gg \mathrm{m}_1} -v_{1\mathrm{i}} + 2v_{2\mathrm{i}}$$

$$v_{2\mathrm{f}} = v'_{2\mathrm{f}} + v_{\mathrm{CM}} = -v_{2\mathrm{i}} + v_{\mathrm{CM}} + v_{\mathrm{CM}} \xrightarrow{\mathrm{m}_2 \gg \mathrm{m}_1} v_{2\mathrm{i}}$$

Teorema del momento angolare

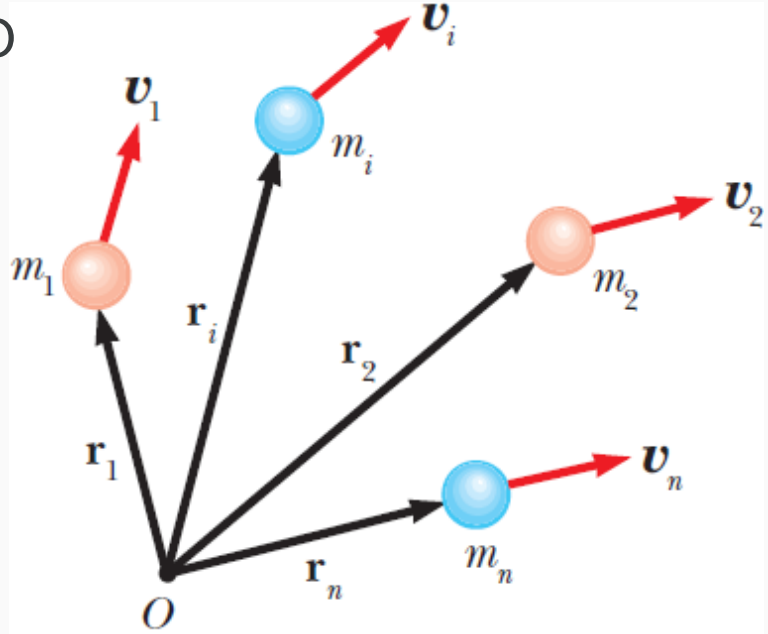
Consideriamo un sistema di punti dotati di massa

Ogni *i-esimo* punto avrà un momento angolare rispetto al polo O

Si può definire il momento angolare totale come la somma

$$\vec{L} = \sum_{\mathrm{i}} (\vec{r_i} \times m_i \vec{v_i})$$

Il polo O non è detto che coincida con l'origine del sistema di riferimento e non è detto che O sia in quiete nel sistema di riferimento



Proviamo a vedere quando si conserva facendone la derivata …

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{r_i}}{dt} \times m_i \vec{v_i} \right) + \sum_i \left(\vec{r_i} \times m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt} \right)$$

$$\frac{d\vec{r_i}}{dt} = \vec{v_i} - \vec{v_O}$$

Consideriamo O come un sistema di riferimento in moto rispetto a quello inerziale. Per cui la velocità nel sistema O è pari alla velocità nel sistema inerziale meno la velocità del sistema O… come Greg Wanda e Tim sul treno.

$$m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt} = m_i \vec{a_i} = \vec{F_i} = \overrightarrow{F_i^{(E)}} + \overrightarrow{F_i^{(I)}}$$

Il sistema di riferimento è inerziale. Il sistema di riferimento O invece può anche non esserlo…

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{r_i}}{dt} \times m_i \vec{v_i} \right) + \sum_i \left(\vec{r_i} \times m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt} \right)$$

$$\frac{d\vec{r_i}}{dt} = \vec{v_i} - \vec{v_O} \qquad m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt} = m_i \vec{a_i} = \vec{F_i} = \overrightarrow{F_i^{(E)}} + \overrightarrow{F_i^{(I)}}$$

Ne segue

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left((\vec{v_i} - \vec{v_O}) \times m_i \vec{v_i} \right) + \sum_i \left(\vec{r_i} \times \left(\overrightarrow{F_i^{(E)}} + \overrightarrow{F_i^{(I)}} \right) \right)$$

$$= \sum_i (\vec{v_i} \times m_i \vec{v_i}) - \sum_i (\vec{v_O} \times m_i \vec{v_i}) + \sum_i \left(\vec{r_i} \times \overrightarrow{F_i^{(E)}} \right) + \sum_i \left(\vec{r_i} \times \overrightarrow{F_i^{(I)}} \right)$$

$$= -\vec{v_O} \times m \vec{v_{CM}} + \overrightarrow{M^{(E)}} + \overrightarrow{M^{(I)}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\overrightarrow{v_O}\times m\overrightarrow{v_{CM}} + \overrightarrow{M^{(E)}} + \overrightarrow{M^{(I)}}$$

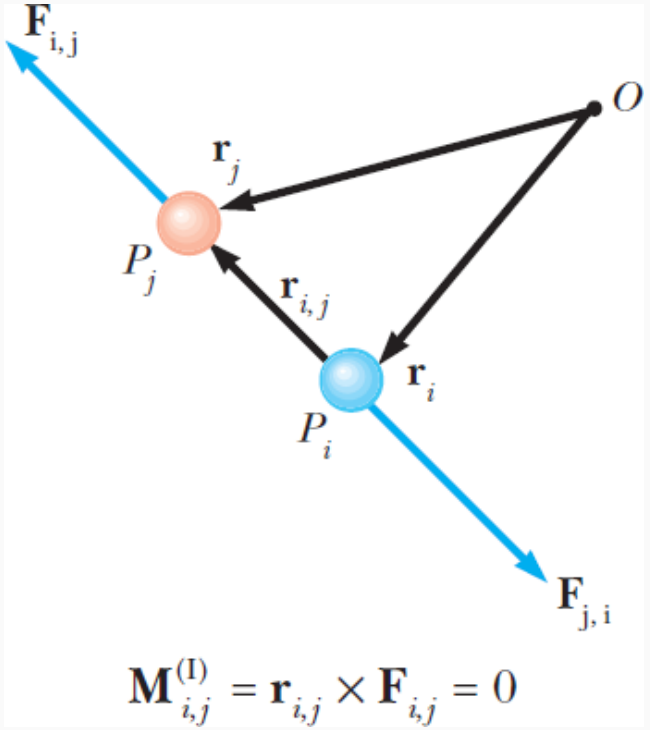
Per $\overrightarrow{M^{(I)}}$ infatti si ha che $\overrightarrow{r_{ij}}$ e $\overrightarrow{F_{ij}}$ sono giacciono sulla stessa linea che unisce P_i e P_j

$$\overrightarrow{M_{i,j}{}^{(I)}} = \vec{r_j}\times\overrightarrow{F_{ij}} + \vec{r_i}\times\overrightarrow{F_{ji}} = (\vec{r_j} - \vec{r_i})\times\overrightarrow{F_{ij}} = \overrightarrow{r_{ij}}\times\overrightarrow{F_{ij}} = 0$$

Quindi mi rimane

$$\boldsymbol{\frac{d\vec{L}}{dt} = -\overrightarrow{v_O}\times m\overrightarrow{v_{CM}} + \overrightarrow{M^{(E)}}}$$

Le forze interne non influenzano $\vec{L}$



Si ha che $\overrightarrow{v_O} \times m\overrightarrow{v_{CM}} = 0$

- il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale, $v_O = 0$;
- il centro di massa è in quiete nel sistema di riferimento inerziale, $v_{\mathrm{CM}} = 0$;
- il polo O coincide con il centro di massa, per cui $\overrightarrow{v_O} = \overrightarrow{v_{CM}}$ e $\overrightarrow{v_O} \times \overrightarrow{v_{CM}} = 0$;
- $\overrightarrow{v_O}$ è parallelo a $\overrightarrow{v_{CM}}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{M^{(E)}}$$

se il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale o coincide con il centro di massa, anche se quest'ultimo non è fisso, l'evoluzione nel tempo del momento angolare del sistema di punti è determinata dal momento delle forze esterne rispetto ad O.

se è **nullo il momento delle forze esterne** che agiscono sul sistema il momento angolare si conserva.

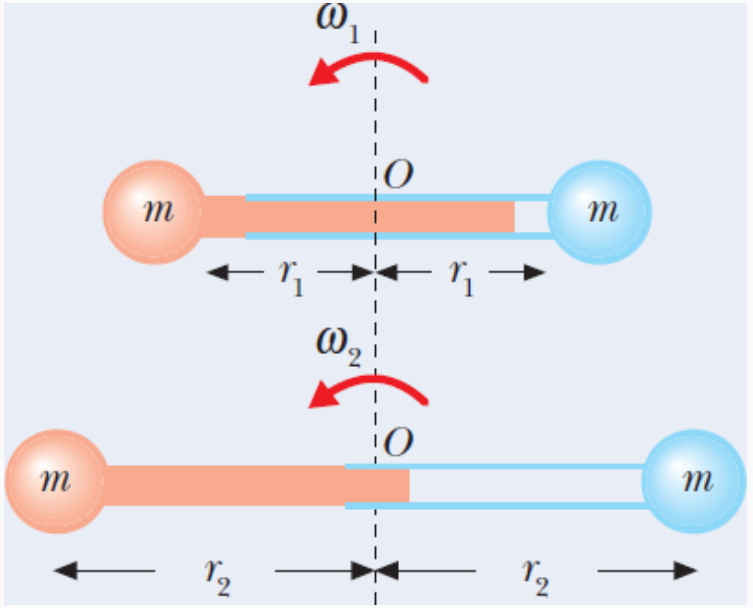
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \vec{L} = \text{costante}$$

La condizione $\overrightarrow{M^{(E)}} = 0$ si può verificare quando:

- non agiscono forze esterne, **il sistema è isolato**: allora $\vec{L}$ si conserva rispetto a qualsiasi polo per il quale $\overrightarrow{v_O} \times m\overrightarrow{v_{CM}} = 0$; in questa situazione, in cui è anche $\overrightarrow{F_i^{(E)}} = 0$, si ha pure la conservazione della quantità di moto, $\vec{P} = costante$ (si osservi che $\overrightarrow{F_i^{(E)}} = 0$ non ha come conseguenza, in generale, $\overrightarrow{M^{(E)}} = 0$);
- il **momento delle forze esterne è nullo rispetto ad un determinato polo**, ma non rispetto a qualsiasi polo, pure in presenza di forze esterne; pertanto si ha conservazione del momento angolare solo se calcolato rispetto a quel polo (mentre, in generale, non si conserva in tali casi la quantità di moto).

Esempio





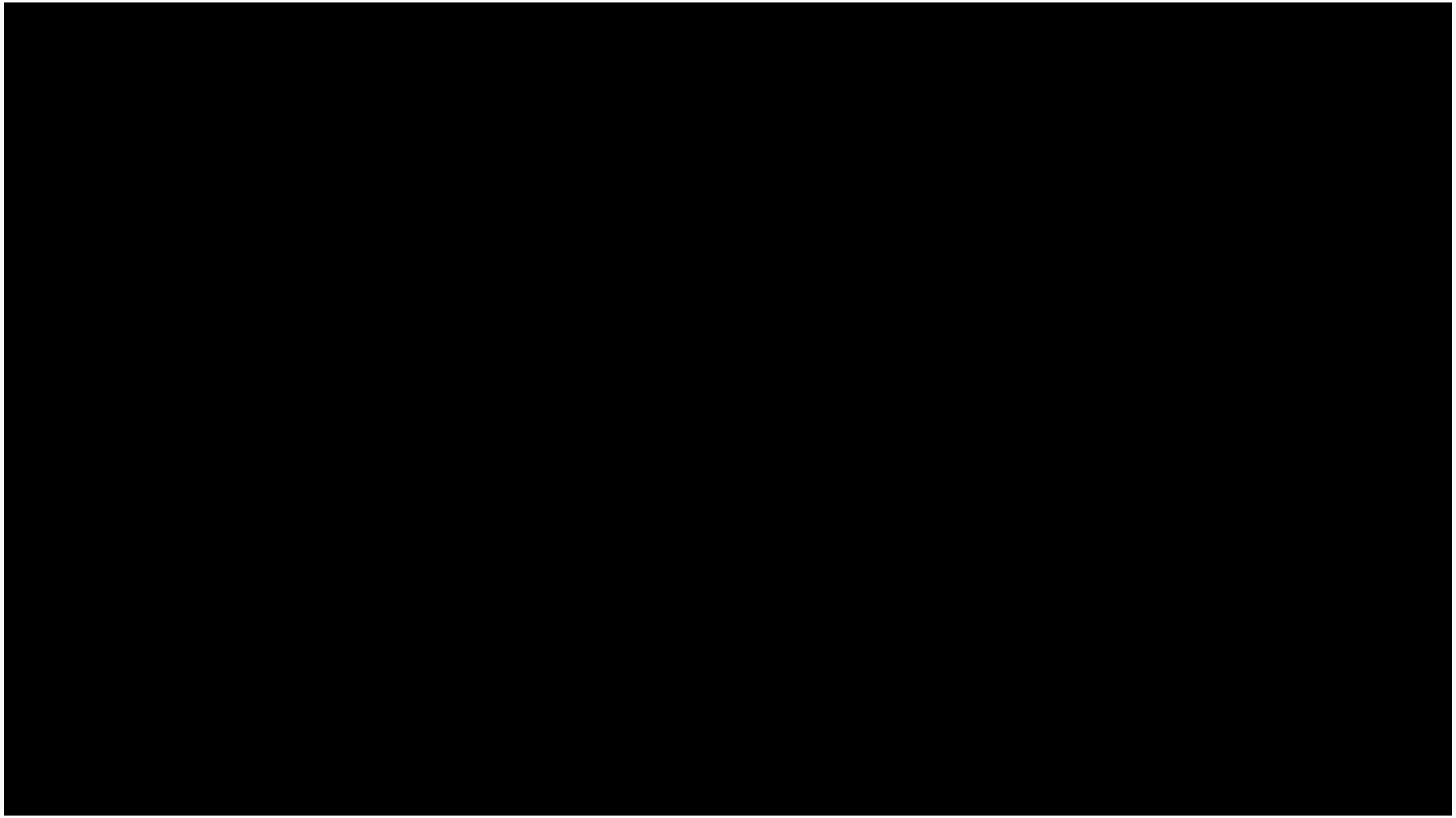
Due punti materiali di eguale massa m sono legati tra loro da una sbarretta di massa trascurabile e ruotano senza attrito in un piano orizzontale rispetto al centro della sbarretta. In assenza di forze esterne quale e' la relazione fra ω_1 e ω_2?

$$\overrightarrow{L_1} = 2\overrightarrow{r_1} \times m\overrightarrow{v_1} = 2mr_1^2\omega_1$$

$$\overrightarrow{L_2} = 2\overrightarrow{r_2} \times m\overrightarrow{v_2} = 2mr_2^2\omega_2$$

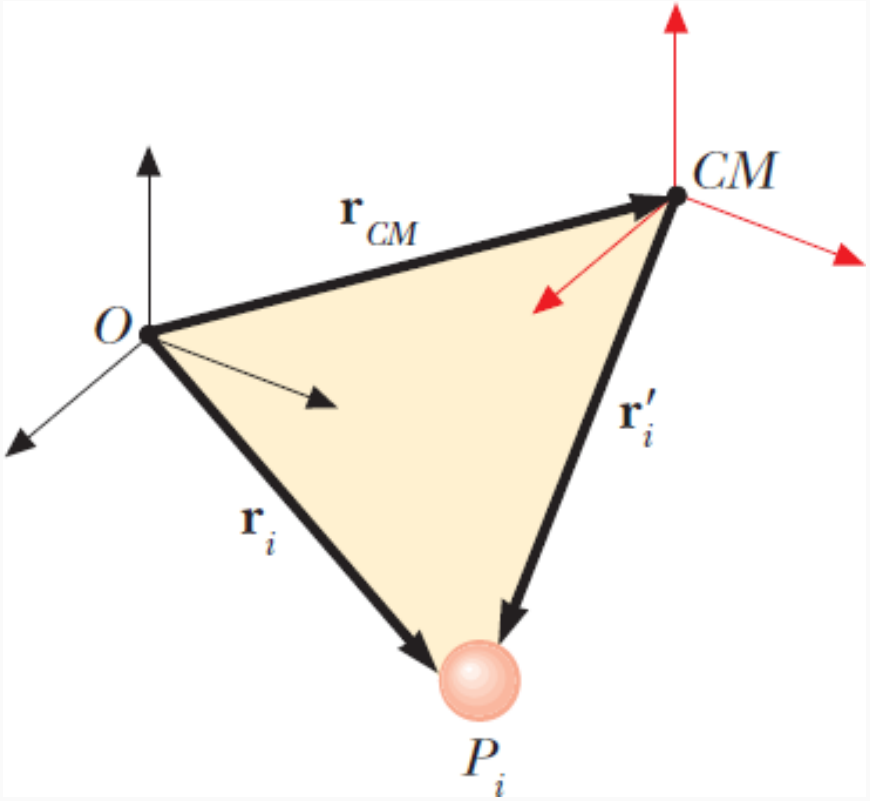
$$\overrightarrow{L_1} = \overrightarrow{L_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Olympic diving



Sistema di riferimento del centro di massa

- l'origine è nel centro di massa;
- gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema inerziale e, in particolare, possono essere assunti paralleli a questi;
- si tratta in generale di un sistema non inerziale: infatti il moto del sistema del centro di massa è traslatorio, ma non necessariamente rettilineo e uniforme;
  ciò avviene solo se $\overrightarrow{F^{(E)}} = 0$ così che $a_{CM} = 0$.



$$\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{r_{CM}} + \overrightarrow{r'_i}$$

Dai sistemi in moto relativo

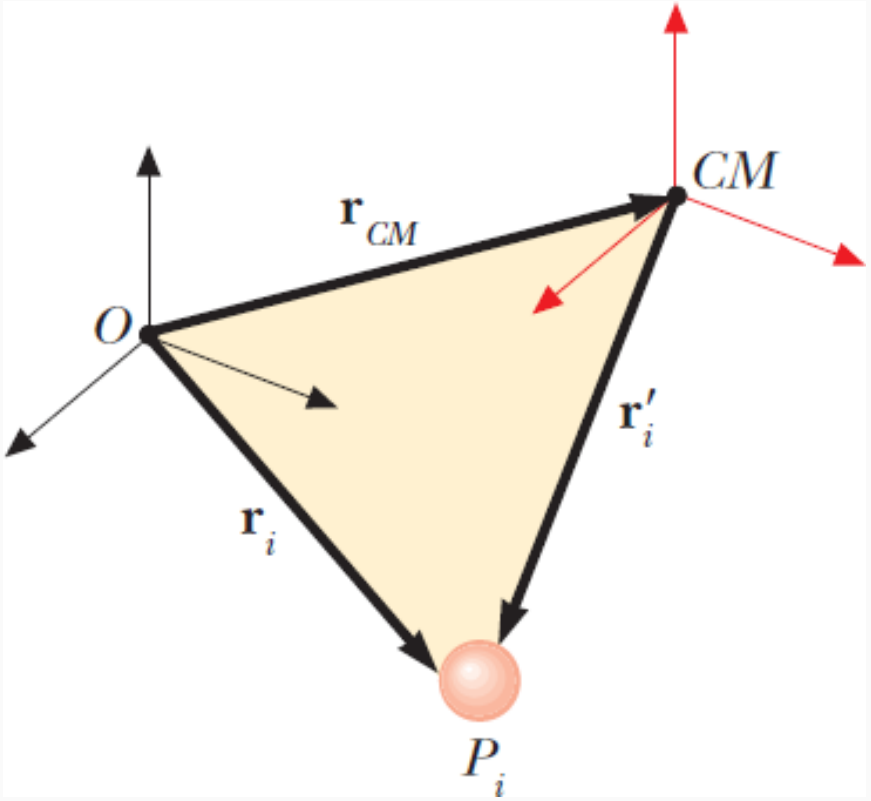
$$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_{CM}} + \overrightarrow{v'_i}$$

Dalla definizione del sistema CM

$$\overrightarrow{r'_{CM}} = 0 \;;\; \overrightarrow{v'_{CM}} = 0 \;;\; \overrightarrow{a'_{CM}} = 0$$

Sistema di riferimento del centro di massa

la quantità di moto totale del sistema, $\overrightarrow{P'} = \sum_i m_i \overrightarrow{v_i'} = 0$, risulta nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa, anche se i singoli termini $m_i \overrightarrow{v_i'}$ sono in generale diversi da zero.



È importante notare che il sistema del centro di massa non è in generale un sistema di riferimento inerziale. Pertanto, **nei singoli punti** agisce anche la forza di trascinamento $-\boldsymbol{m_i a_t} = -\boldsymbol{m_i a_{CM}}$, in quanto l'accelerazione di trascinamento è pari a quella dell'origine, cioè del centro di massa.

$$\overrightarrow{F_i^{(E)}} + \overrightarrow{F_i^{(I)}} - m_i a_{CM} = m_i a'_i$$

Accelerazione del punto i-esimo nel sistema del CM

Teorema del momento angolare nel sistema CM

$$\sum_i \overrightarrow{r'_i} \times \overrightarrow{F_i^{(I)}} = 0$$

$$\mathbf{M}'^{(\mathrm{E})} = \sum_i [\mathbf{r}'_i \times (\mathbf{F}_i^{(\mathrm{E})} - m_i \boldsymbol{a}_{CM})] = \sum_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(\mathrm{E})}) - \sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}_{CM}) =$$

$$= \sum_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(\mathrm{E})}) - (\sum_i m_i \mathbf{r}'_i) \times \boldsymbol{a}_{CM} = \sum_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(\mathrm{E})}).$$

$$\overrightarrow{r'_{CM}} = 0$$

Quindi per $\overrightarrow{L'} = \sum_i (\overrightarrow{r'_i} \times m_i \overrightarrow{v'_i})$

$$\frac{d\overrightarrow{L'}}{dt} = \overrightarrow{M'^{(E)}}$$

il teorema del momento angolare sussiste anche per le grandezze calcolate nel sistema non inerziale del CM purché come polo si assuma il CM.

Consideriamo ora la relazione fra i momenti angolari

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r_i} \times m_i \vec{v_i}) = \sum_i [(\vec{r_{CM}} + \vec{r'_i}) \times m_i (\vec{v_{CM}} + \vec{v'_i})]$$

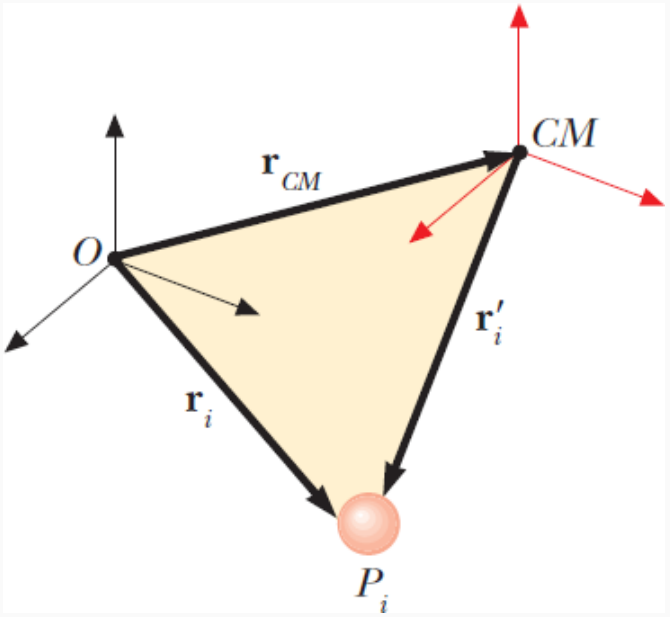
$$= \sum_i [(\vec{r_{CM}} \times m_i \vec{v_{CM}}) + (\vec{r'_i} \times m_i \vec{v_{CM}}) + (\vec{r_{CM}} \times m_i \vec{v'_i}) + (\vec{r'_i} \times m_i \vec{v'_i})]$$

$$= \sum_i [(\vec{r_{CM}} \times m_i \vec{v_{CM}}) + \cancel{(\vec{r'_i} \times m_i \vec{v_{CM}})} + \cancel{(\vec{r_{CM}} \times m_i \vec{v'_i})} + (\vec{r'_i} \times m_i \vec{v'_i})]$$

$\vec{r'_{CM}} = 0$ $\qquad$ $\vec{v'_{CM}} = 0$

$$= \sum_i (\vec{r'_i} \times m_i \vec{v'_i}) + \vec{r_{CM}} \times m \vec{v_{CM}}$$

$$\vec{L} = \vec{L'} + \vec{L_{CM}}$$



il momento angolare del sistema $\vec{L}$ si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa $\vec{L_{CM}}$, e di quello del sistema rispetto al centro di massa $\vec{L'}$.

Consideriamo ora l'energia cinetica

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\overrightarrow{v_{CM}} + \overrightarrow{v'_i}\right)^2 = \frac{1}{2} m {v_{CM}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i {v'_i}^2 + \sum_i m_i \left(\overrightarrow{v_{CM}} \cdot \overrightarrow{v'_i}\right)$$

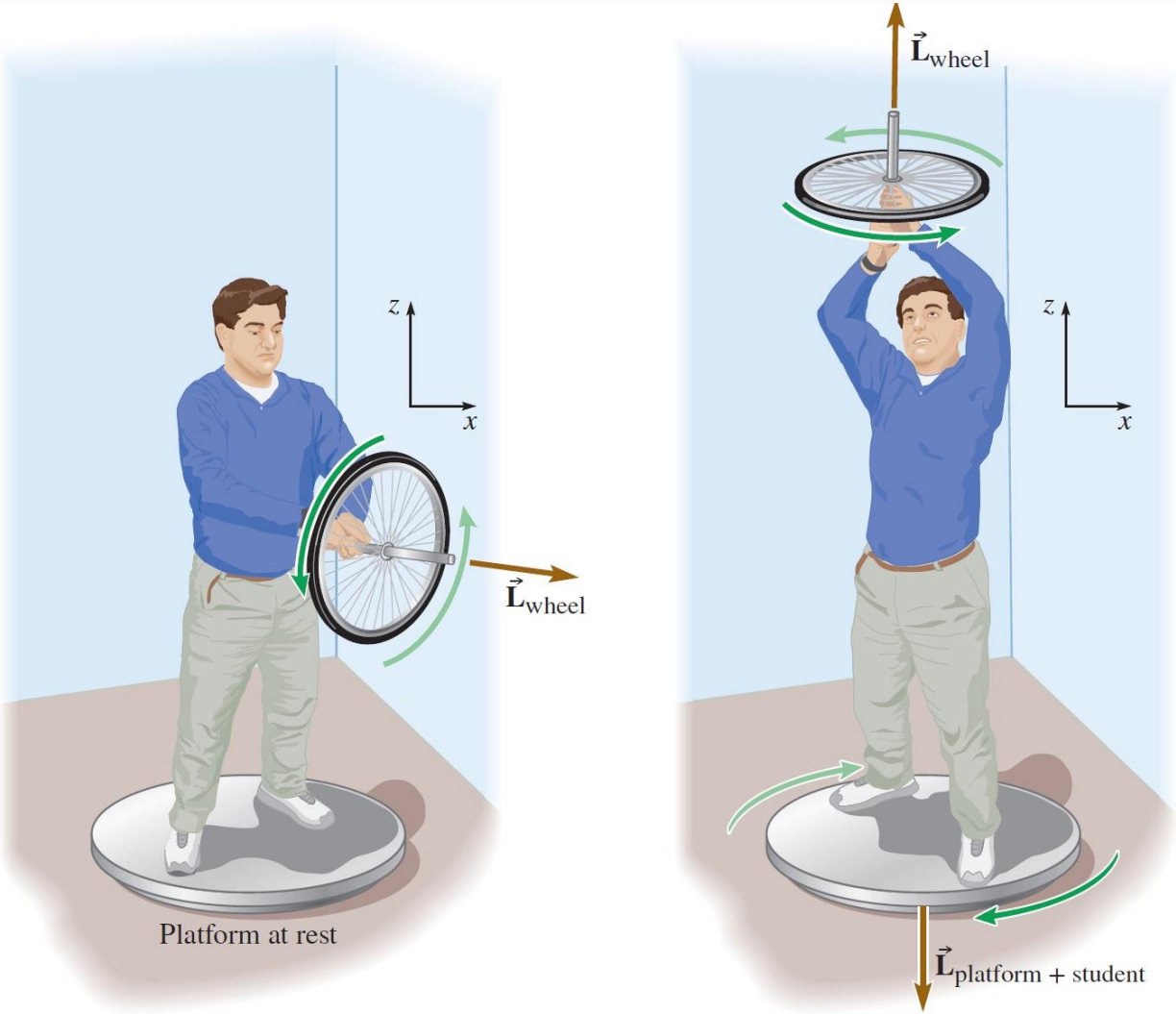
$$\overrightarrow{v'_{CM}} = 0$$

$$E_k = E'_k + E_{\mathrm{CM},k}$$

l'energia cinetica del sistema di punti, E_k , si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa, $E_{\mathrm{CM},k}$, e di quella del sistema rispetto al centro di massa, E'_k.



Il giroscopio



Un disco con una grande ***inerzia rotazionale*** può essere utilizzato come ***giroscopio***.

Quando il giroscopio ruota a una grande velocità angolare, ha un grande momento angolare.

È quindi difficile modificare l'orientamento dell'asse di rotazione del giroscopio perché per farlo è necessario modificare il suo momento angolare.

Esempio



Il lavoro in un sistema di punti

Proviamo ora a calcolare il lavoro nel sistema di punti

$$dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i^{(\mathrm{E})} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i^{(\mathrm{I})} \cdot d\mathbf{r}_i = dW_i^{(\mathrm{E})} + dW_i^{(\mathrm{I})}.$$

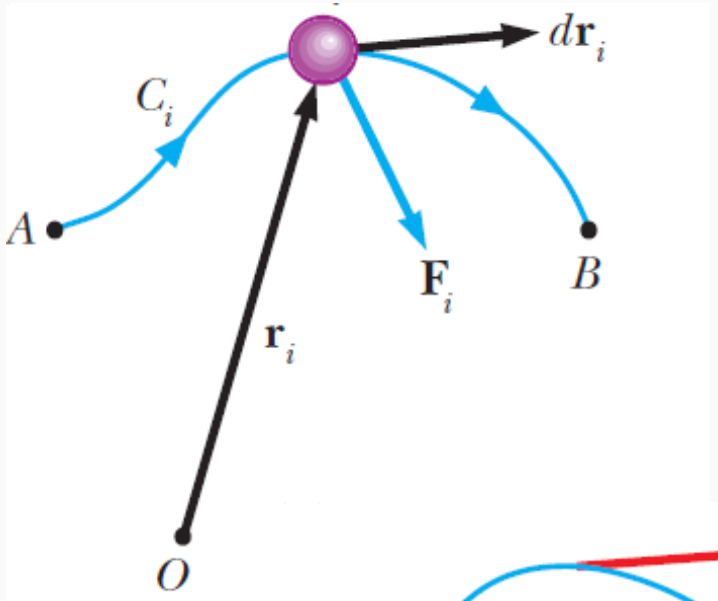
Il lavoro totale è la somma dei lavori sui diversi punti lungo le loro traiettorie, dovuti sia a forza interne che esterne

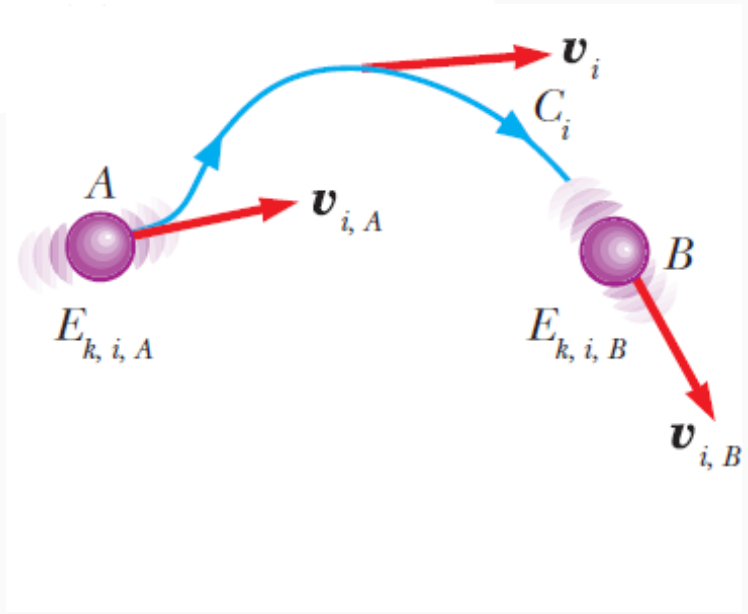
In questo caso le forze interne non danno contributo nullo, ma il loro contributo e' proporzionale al cambiamento delle distanze fra i punti.

$$\mathbf{F}_{i,j} \cdot d\mathbf{r}_j + \mathbf{F}_{j,i} \cdot d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_{i,j} \cdot (d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_{i,j} \cdot d(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_{i,j} \cdot d\mathbf{r}_{i,j}$$

Se il corpo è rigido —> il loro contributo è nullo.

Teorema dell'energia cinetica





Il teorema dell'energia cinetica è valido comunque per ogni punto

$$\mathrm{d}W_i = \overrightarrow{F_i} \cdot d\overrightarrow{s_i} = m_\mathrm{i} v_\mathrm{i} dv_i$$

Per cui integrando per tutti i punti da una configurazione A ad una configurazione B

$$W = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = E_{k,B} - E_{k,A},$$

$$W^{(\mathrm{E})} + W^{(\mathrm{I})} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

il lavoro complessivo fatto dalle forze esterne ed interne che agiscono su un sistema di punti materiali è uguale alla variazione dell'energia cinetica dello stesso sistema tra la configurazione finale e quella iniziale.

Conservazione dell'energia

Se le forze interne e le forze esterne sono conservative allora il lavoro si può esprimere come l'opposto della variazione dell'energia potenziale

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p = -(E_{p,B} - E_{p,A}),$$

$$E_{m,A} = (E_k + E_p)_A = E_{m,B} = (E_k + E_p)_B = \text{costante}$$

Se non tutte le forze sono conservative allora il loro lavoro sarà pari alla variazione dell'energia meccanica totale del sistema di punti.

$$W_{nc} = (E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = E_{m,B} - E_{m,A}$$

La forza netta nulla è sufficiente a garantire l'equilibrio traslazionale;
Se anche un oggetto è in equilibrio rotazionale, anche la coppia netta che agisce su di esso deve essere zero.

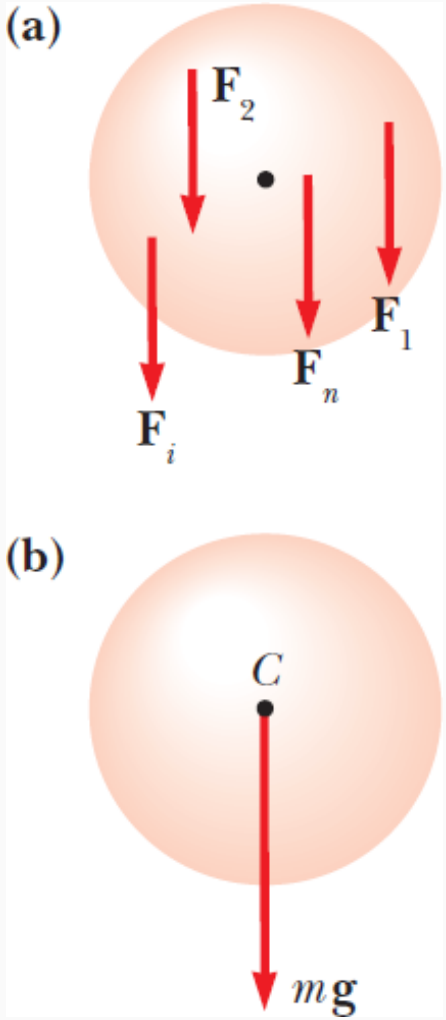
$$\sum \vec{F} = 0 \quad \text{e} \quad \sum \vec{\mathrm{M}} = 0$$

1° eq cardinale

2° eq cardinale

Il posto migliore per scegliere l'asse è solitamente nel punto di applicazione di una forza sconosciuta in modo che la forza incognita non appaia nell'equazione della coppia.

Sistema di forze parallele



Supponiamo di avere un sistema di forze esterno agente sul sistema di punti tale che siano tutte parallele lungo un versore $\hat{u}$.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i} = \sum_i F_i \hat{u} = F\hat{u}$$

Possiamo quindi scrivere che il momento totale del sistema di punti è

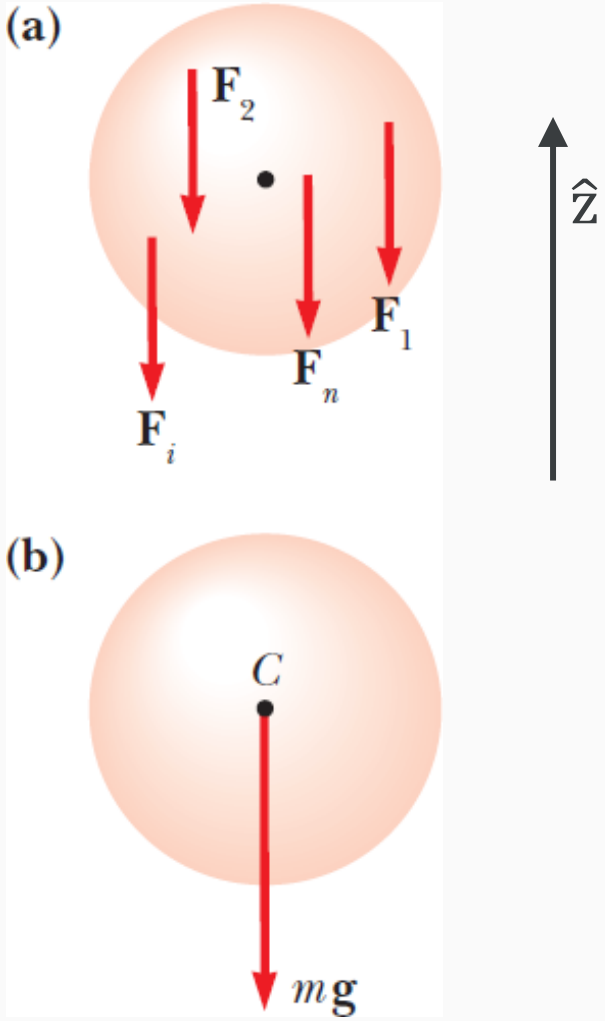
$$\vec{M} = \sum_i (\vec{r_i} \times F_i \hat{u}) = \sum_i \underbrace{(F_i \vec{r_i})} \times \hat{u} = \vec{r_C} \times F\hat{u}$$

E' come una media pesata delle posizioni

$$\exists\ \vec{r_C} = \frac{\sum_i (F_i \vec{r_i})}{F}$$

$\exists\ \vec{r_C}$ centro delle forze parallele, tale per cui il momento totale è pari alla momento della risultante delle forze applicate in quella posizione

Esempio: la forza gravitazionale



un sistema di forze parallele può sempre essere ridotto a una sola forza, pari alla risultante $\vec{F}$, applicata in C

Per la forza di gravità

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i} = -\sum_i m_i g \hat{z} = -mg\hat{z}$$

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{\sum_i (F_i \overrightarrow{r_i})}{F} = \frac{\sum_i m_i g \overrightarrow{r_i}}{mg} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{r_i}}{m} = \overrightarrow{r_{CM}}$$

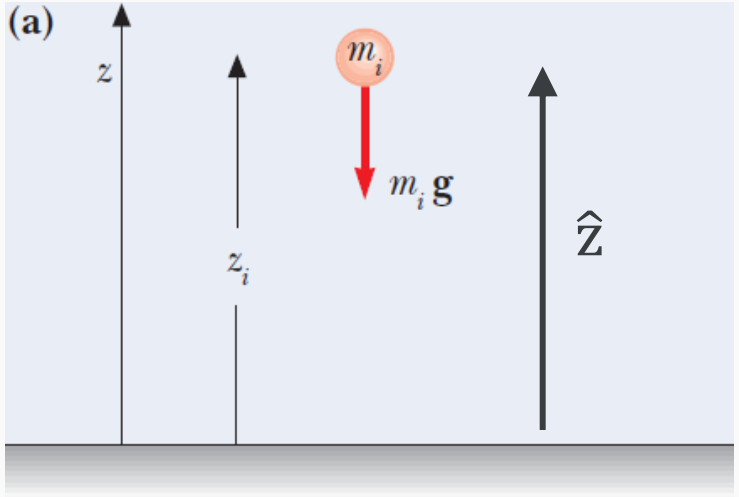
Centro delle forze baricentro

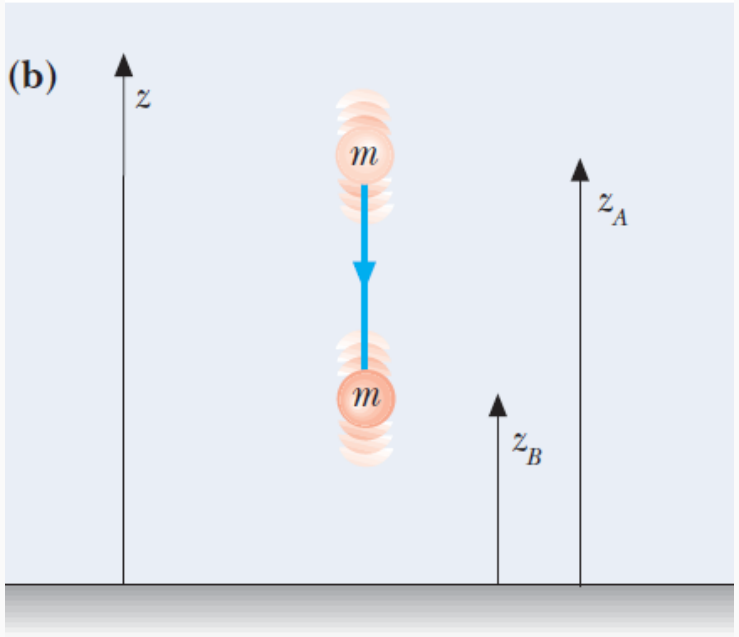
$$\boldsymbol{\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{r_{CM}}}$$

E' il nostro centro di massa

$$\vec{M} = \overrightarrow{r_{CM}} \times m\vec{g}$$

Esempio: la forza gravitazionale





Anche per l'energia potenziale gravitazionale del sistema di punti si ottiene

$$E_p = \sum_i E_{p,i} = \sum_i m_i g z_i = g \sum_i m_i z_i = m g z_{CM}$$

L'energia potenziale del sistema è eguale a quella del centro di massa, cioè a quella di un punto materiale che occupa la posizione del CM e possiede tutta la massa del sistema.

Porch swing



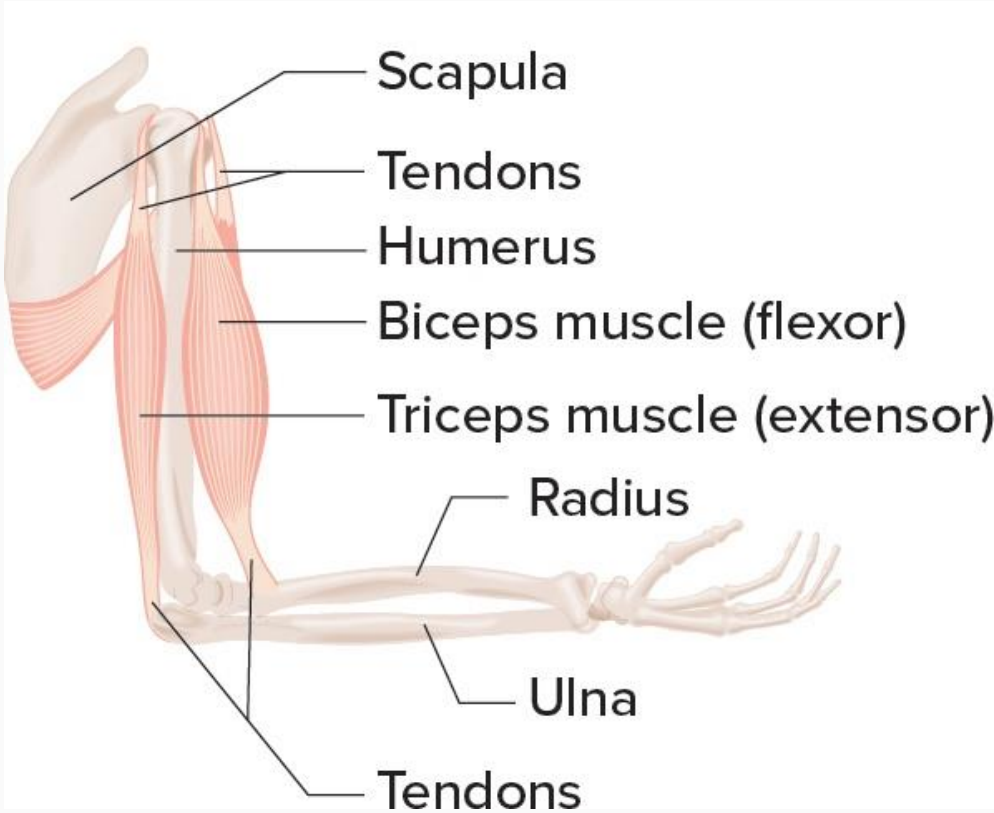


L'equilibrio nel corpo umano

Un muscolo può tirare ma non spingere, quindi un muscolo flessore come il bicipite non può invertire la sua azione per spingere l'avambraccio lontano dalla parte superiore del braccio. I muscoli estensori fanno sì che le ossa si allontanino l'una dall'altra.

Nella parte superiore del braccio, un muscolo estensore - il tricipite - collega la scapola e l'omero all'ulna (un osso dell'avambraccio parallelo al radio) attraverso l'esterno del gomito.

Poiché i bicipiti e i tricipiti si collegano all'avambraccio sui lati opposti dell'articolazione del gomito, tendono a causare la rotazione dell'articolazione in direzioni opposte. Quando il tricipite si contrae, allontana l'avambraccio dalla parte superiore del braccio.

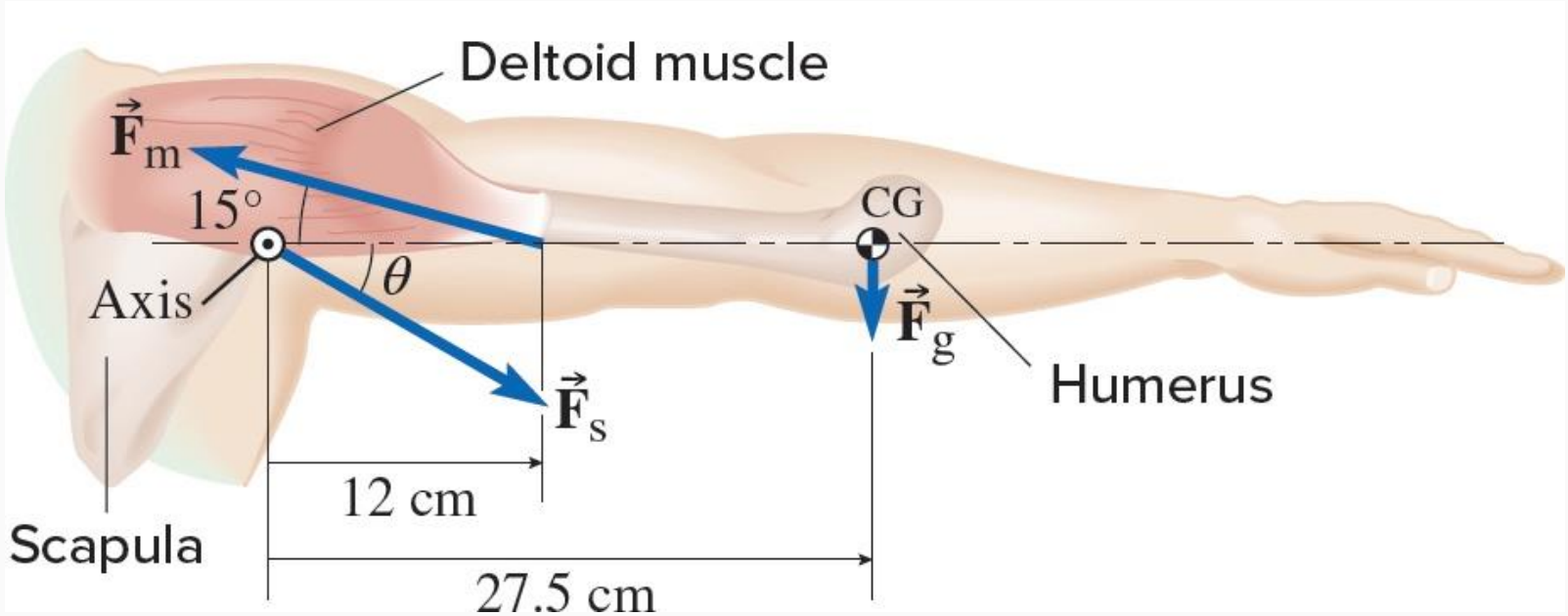


Utilizzando i muscoli flessori ed estensori sui lati opposti dell'articolazione, il corpo può produrre coppie sia positive che negative, sebbene entrambi i muscoli tirino nella stessa direzione.

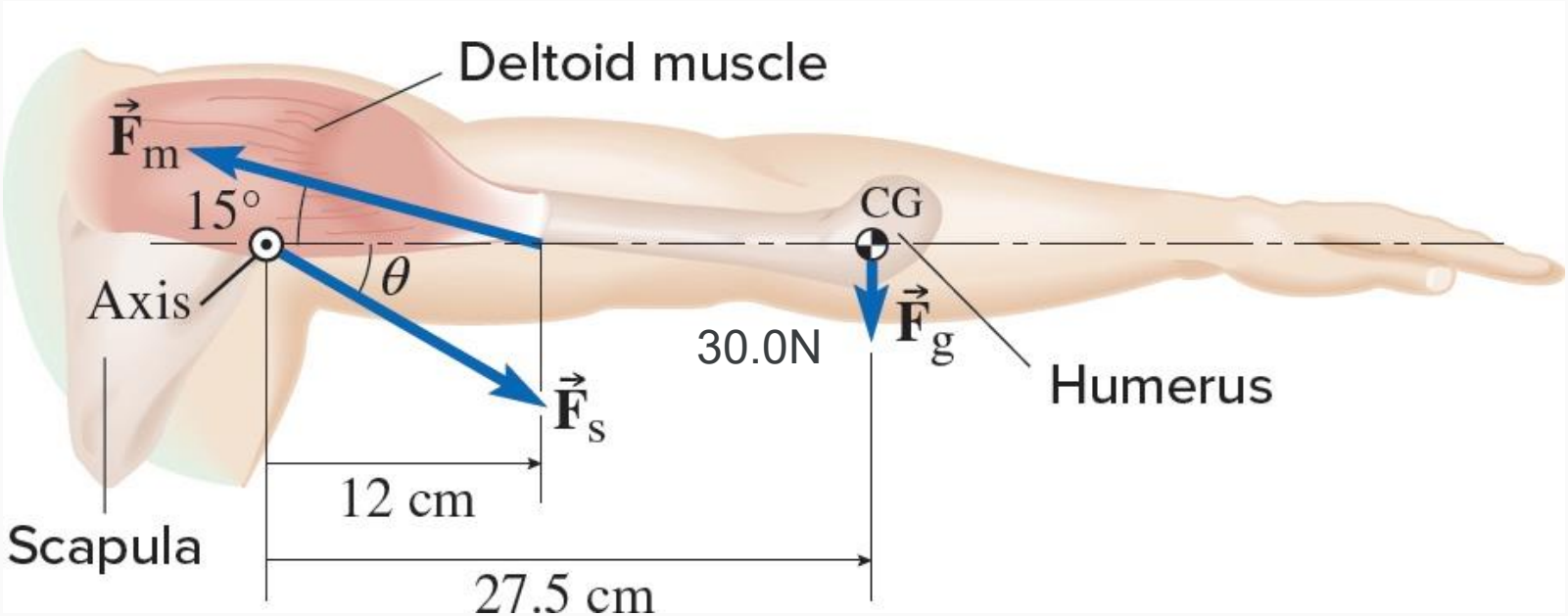
Esercizio

Una persona è in piedi con il braccio teso in posizione orizzontale. Il peso del braccio è di 30,0 N e il suo baricentro si trova all'articolazione del gomito, a 27,5 cm dall'articolazione della spalla. Il deltoide tira la parte superiore del braccio con un angolo di 15° sopra l'orizzontale e a una distanza di 12 cm dall'articolazione.

Qual è l'entità della forza esercitata dal muscolo deltoide sul braccio?



Soluzione



Peso

$$|\tau| = Fr = 30.0\ \text{N} \times 0.275\ \text{m} = 8.25\ \text{N}\cdot\text{m}$$

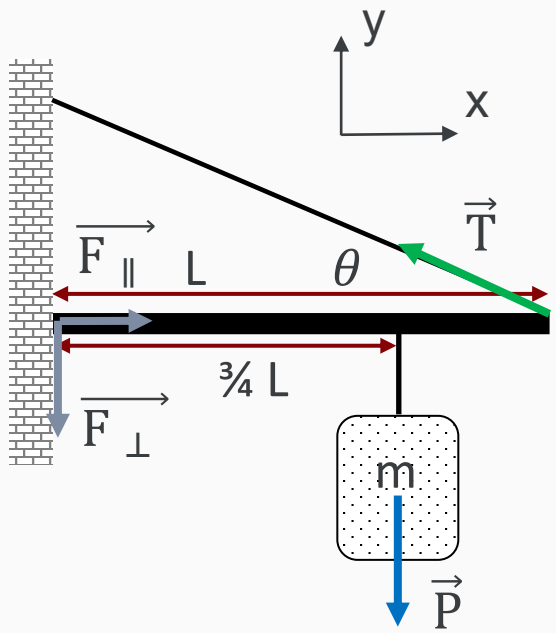
Deltoide

$$|\tau| = F_\perp r = F_m \sin 15° \times 0.12\ \text{m}$$

Momento totale = 0

$$F_m \sin 15° \times 0.12\ \text{m} - 8.25\ \text{N}\cdot\text{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_m = \frac{8.25\ \text{N}\cdot\text{m}}{\sin 15° \times 0.12\ \text{m}} = 270\ \text{N}$$

Esercizio



Scelgo come polo il punto di contatto fra la barra e il muro in modo che il momento delle forze incognite F sia nullo

Quali sono le componenti verticali ed orizzontali applicate dal muro sulla barra?

La barra è ferma □

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \begin{matrix} x & F_{\parallel} - T\cos\theta = 0 \\ y & -F_{\perp} - mg + T\sin\theta = 0 \end{matrix}$$

$$\sum \vec{M} = 0 \qquad LT\sin\theta - {}^{3}/_{4}\,Lmg = 0$$

$$T = {}^{3}/_{4}\,mg\frac{1}{\sin\theta}$$

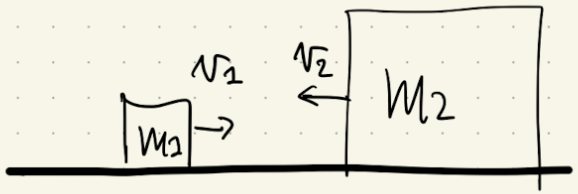
$$F_{\parallel} = {}^{3}/_{4}\,mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad F_{\perp} = -mg + {}^{3}/_{4}\,mg = -{}^{1}/_{4}\,mg$$

Quindi $F_{\perp}$ ha verso opposto rispetto a quello indicato in figura

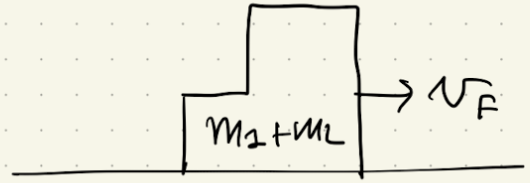
Esercizio – urto completamente anelastico

Michele Doro - Fisica Generale - Chimica Industriale 2024/25

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO



PRIMA



DOPO

Anche qui assumo che non ci sia consumo di energia durante urto, ma in realtà perché si attacca un po' di energia sale di spera

⇒ DURANTE URTO CI SONO SOLO FORZE INTERNE

$$\Delta \vec{P} = 0$$

$$\vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}$$

Esercizio – urto completamente anelastico

$$\vec{P}_F = (m_1 + m_2)\vec{v}_F$$

proiettando su asse del movimento

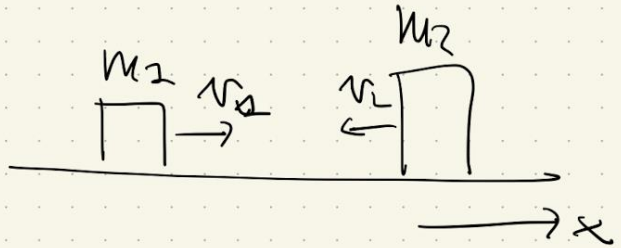
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_F$$

$$v_F = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

v_i positiva se concordi a x
negativa se discordi a x

Esercizio – urto completamente anelastico



$m_1 = 1\ kg$

$m_2 = 1\ kg$

$v_{1i} = 1\ m/s$

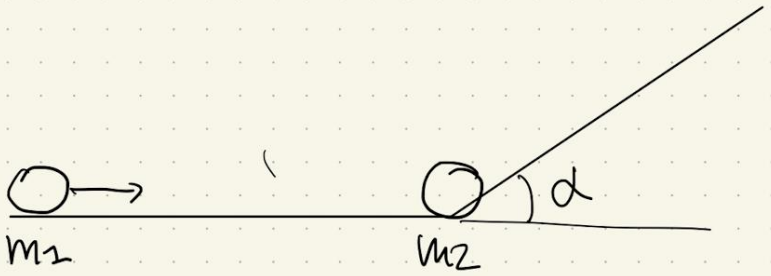
$v_{2i} = -1\ m/s$

a) $v_F = \dfrac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \dfrac{1(1) + (1)(-1)}{1+1} = 0$

b) se invece $v_{2i} = -2\ m/s$

$v_F = \dfrac{1(1) + 1(-2)}{2} = \dfrac{1-2}{2} = -0.5\ \dfrac{m}{s}$ perché $|v_2| > |v_1|$

ESERCIZIO



$\alpha = 30°$

$m_1 = 2\,kg$ parti ferme

$m_2 = 1\,kg$

m_1 colpisce m_2 con una forza media durante urto di 3000 N – Urto dura 1.3 ms.

1_ se urto è elastico, a che altezza arriva m_2?

2_ se " " anelastico, " " " m_2?

$I = \langle F \rangle \Delta t = 3000 \cdot (0.0013) = 3{,}9\ kg\ m/s \rightarrow$ trasferito a m_2 con urto

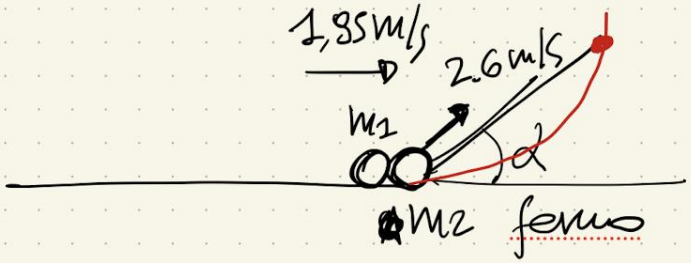
nell'urto trasferisco impulso

$I = 3{,}9\ \text{kg m/s}$

quantità moto iniziale $\quad p_i = p_{1i} + p_{2i}$

$= m_1 v_1$

$$v_1 = \frac{I}{m_1} = \frac{3{,}9\ \text{kg m/s}}{2\ \text{kg}} = 1{,}95\ \text{m/s}$$



I - Urto elastico

$$\mathrm{P}^{\mathrm{tot}} = m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$2\mathrm{E}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{tot}} = m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1 v_{1i}^2 = m_1 \left(v_{1i} - \frac{m_2}{m_1} v_{2f} \right)^2 + m_2 v_{2f}^2 = m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2f}^2 + \frac{m_2^2}{m_1} v_{2\mathrm{f}}^2 - 2 m_2 v_{1i} v_{2f}$$

$$v_{2f} + \frac{m_2}{m_1} v_{2f} = 2 v_{1i} \quad \Rightarrow \quad v_{2f} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2(2)}{3} 1.95 = 2.6 \ \mathrm{m/s}$$

Per calcolare l'altezza conservazione energia

$$\mathrm{E}_{2,\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = m_2 g h = \mathrm{E}_{2,\mathrm{p}}$$

$$h = \frac{v_{2f}^2}{2\mathrm{g}} = \frac{2.6^2}{2(9.81)} = 0.34 \ \mathrm{m}$$

I - Urto anelastico

$$\mathrm{P}^{\mathrm{tot}} = m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2}{3} 1.95 = 1.3 \ \mathrm{m/s}$$

Per calcolare l'altezza conservazione energia

$$\mathrm{E_k} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = (m_1 + m_2) g h = \mathrm{E_p}$$

$$h = \frac{v_f^2}{2\mathrm{g}} = \frac{1.3^2}{2(9.81)} = 0.08 \ \mathrm{m}$$

Conservazione della quantità di moto

In un sistema isolato il momento lineare totale è conservato $\sum \Delta\vec{p}_i = 0$

Una variazione di quantità di moto corrisponde a una forza applicata entro un certo tempo $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$

Le forze esterne agiscono solo sul CM
1° equazione cardinale dei sistemi $\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum \vec{F}_{ext}$

Conservazione del momento angolare

In un sistema isolato il momento angolare totale è conservato $\sum \Delta\vec{L}_i = 0$

Una variazione di quantità di moto corrisponde a una coppia applicata entro un certo tempo $\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\Delta t$

I momenti delle forze esterne agiscono solo sul CM
2° equazione cardinale dei sistemi $\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{M^{(E)}}$

Il sistema del centro di massa $\overrightarrow{r'_{CM}} = 0 \;;\; \overrightarrow{v'_{CM}} = 0 \;;\; \overrightarrow{a'_{CM}} = 0$

Il momento lineare (quantità di moto) del sistema di punti è nullo nel CM

$$\vec{P} = \overrightarrow{P_{CM}}$$

Il momento angolare si può esprimere come somma del momento del CM e del sistema di punti rispetto il CM
1° teorema di Koenig

$$\vec{L} = \vec{L'} + \overrightarrow{L_{CM}}$$

L'energia cinetica si può esprimere come somma dell'energia del CM e del sistema di punti rispetto il CM
2° teorema di Koenig

$$E_k = E'_k + E_{CM,k}$$