UNIVERSITÀ DI PADOVA · 1222

Corso di Fisica Generale – Pt1
Chimica Industriale 25/26

Lez 5. Lavoro, Energia, Momenti

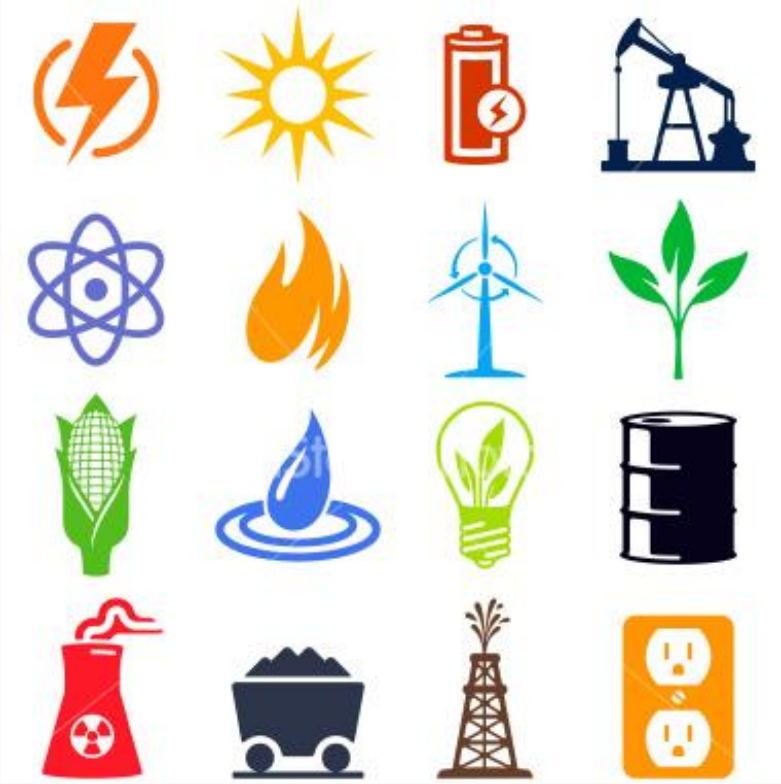
Docente:
Alessandro Patelli
alessandro.patelli@unipd.it



Sommario

- Lavoro, potenza, energia cinetica
- Forze conservative
- Energia potenziale
- Conservazione dell‘energia meccanica
- Momento angolare, momento della forza
- Teorema delle forze centrali

Cosa è l'Energia



Se scrivete su google "Energia" vedete che vi tornano queste immagini.

Energia = capacità di fare qualcosa…

Anche in fisica è cosi, ma più precisamente energia è la capacità di fare **LAVORO**

LAVORO è una grandezza il cui significato è in parte diverso rispetto al senso comune però matematicamente rigoroso.



Lavoro

Il lavoro è il modo meccanico in cui l'energia si trasforma da una forma all'altra

Il lavoro è un trasferimento di energia che si verifica quando una forza agisce su un oggetto in movimento

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

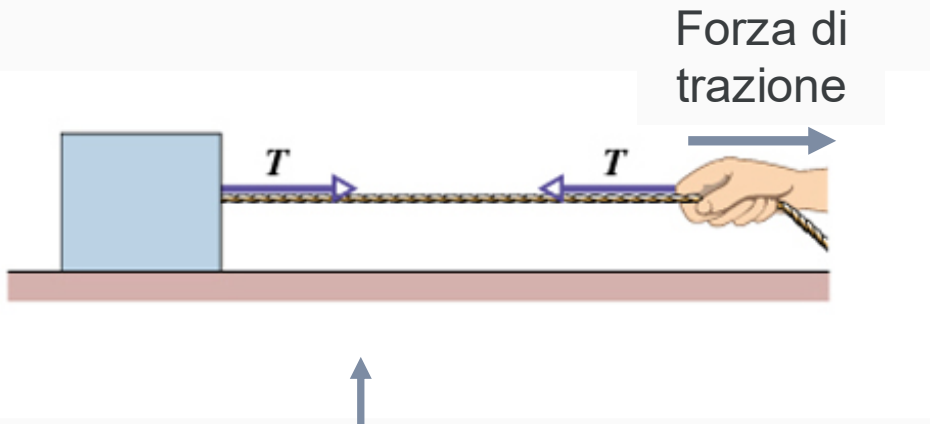
Quantità scalare
Unità $N \cdot m = J$

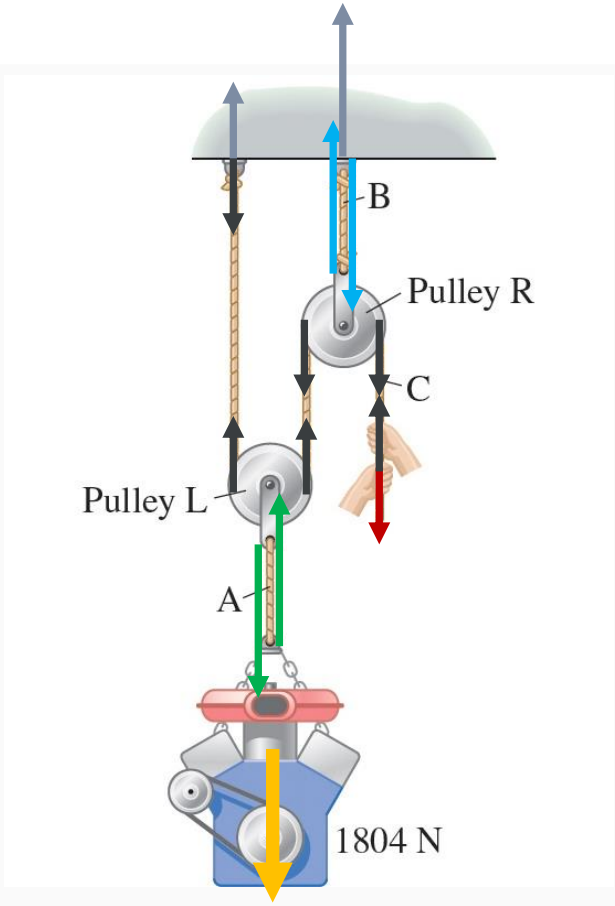
Muoversi a velocità costante



- Trasporto della borsa a velocità costante → nessun cambiamento di energia
- Trasportare la borsa cambiando velocità→ Variazione dell'energia cinetica (movimento)
- Sollevamento/abbassamento della borsa→ Variazione dell'energia gravitazionale (energia immagazzinata a causa di interazioni / potenziale)

Tensione





Una **corda ideale** può essere tirata fino a quando non è tesa, in queste condizioni esercita una tensione $\vec{T}$ sul corpo a cui è collegata nella direzione parallela alla fune nella direzione della forza di trazione.

La **tensione ha lo stesso valore ovunque** nella corda ed è uguale alla forza che la corda esercita sugli oggetti attaccati alle sue estremità

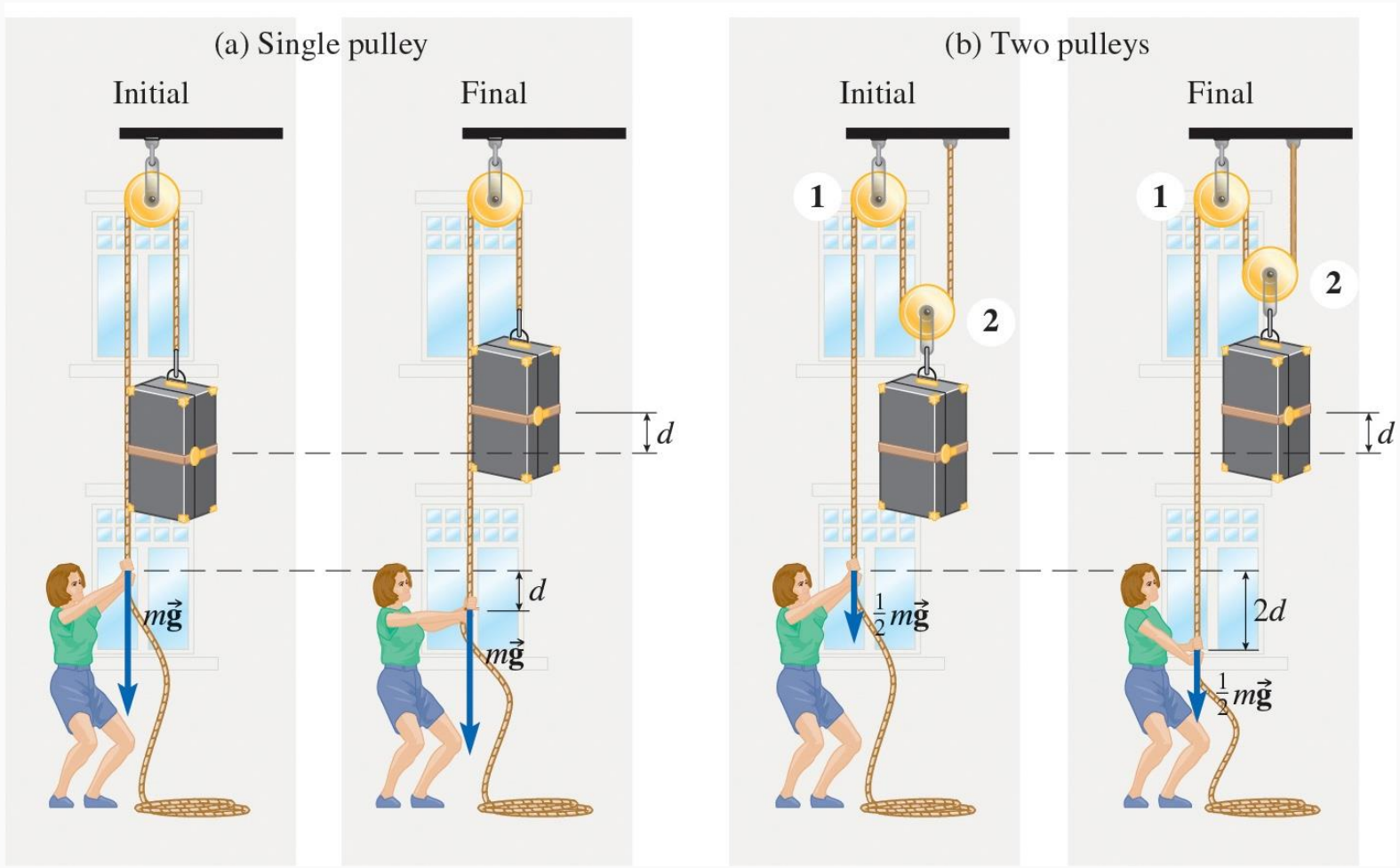
Un cavo *ideale* non ha massa e non è estensibile

Una **puleggia ideale** può cambiare la direzione della forza esercitata da una corda in tensione.

La tensione di una corda ideale che scorre su una puleggia ideale è la stessa su entrambi i lati della puleggia.

Una puleggia ideale non ha massa e attrito.



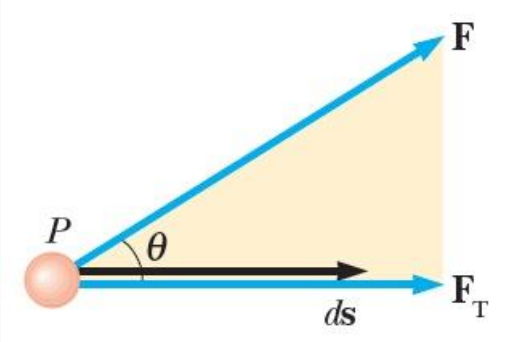


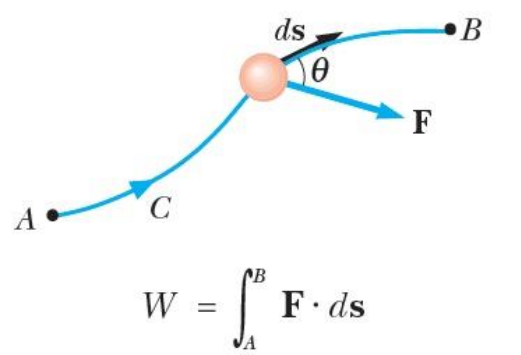
Il Lavoro in (a) e in (b) è uguale

In (b) la forza necessaria è la metà ma occorre tirare il doppio di lunghezza della corda.

Lavoro di un forza lungo un percorso

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = F\mathrm{d}s\cos\theta = F_T\mathrm{d}s$$





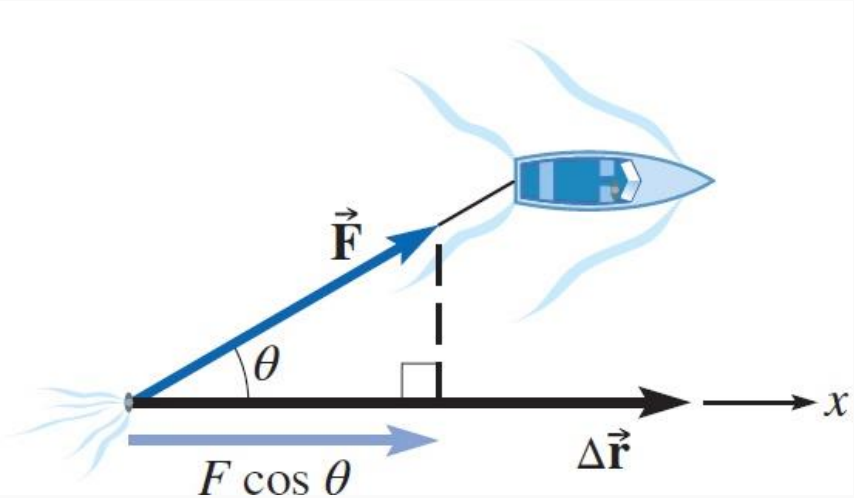
Cosa vediamo da questa formula?

1. Il Lavoro è una grandezza scalare $[N \cdot m = J]$ (Joule)
2. C'è un prodotto scalare, quindi
   se lo spostamento è nullo, la forza non fa lavoro
   quando la forza e lo spostamento sono perpendicolari, la forza non fa lavoro
3. Maggiore è la forza, maggiore il lavoro;
   maggiore la distanza sulla quale la forza agisce, maggiore il lavoro
4. Ciò che conta è la proiezione della forza sullo spostamento

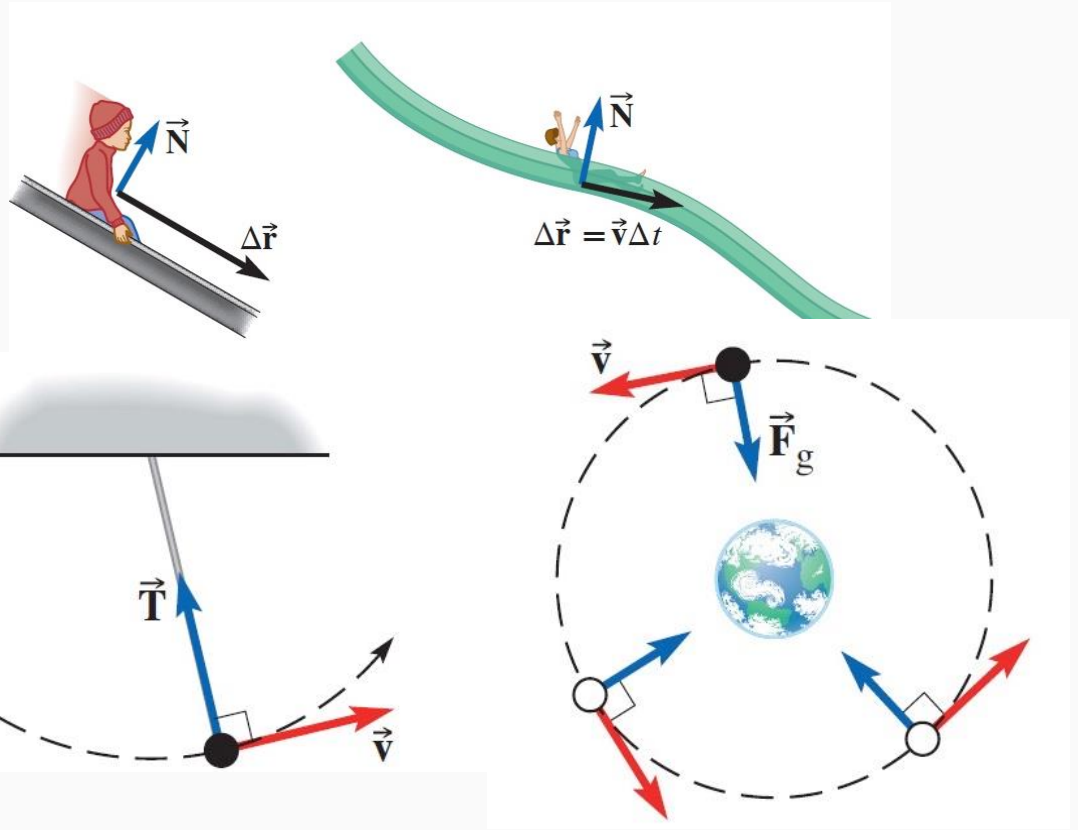
Lavoro svolto da una forza costante $\vec{F}$ che agisce su un oggetto il cui spostamento è $\Delta\vec{r}$:

$$W = F\Delta r \cos\theta$$

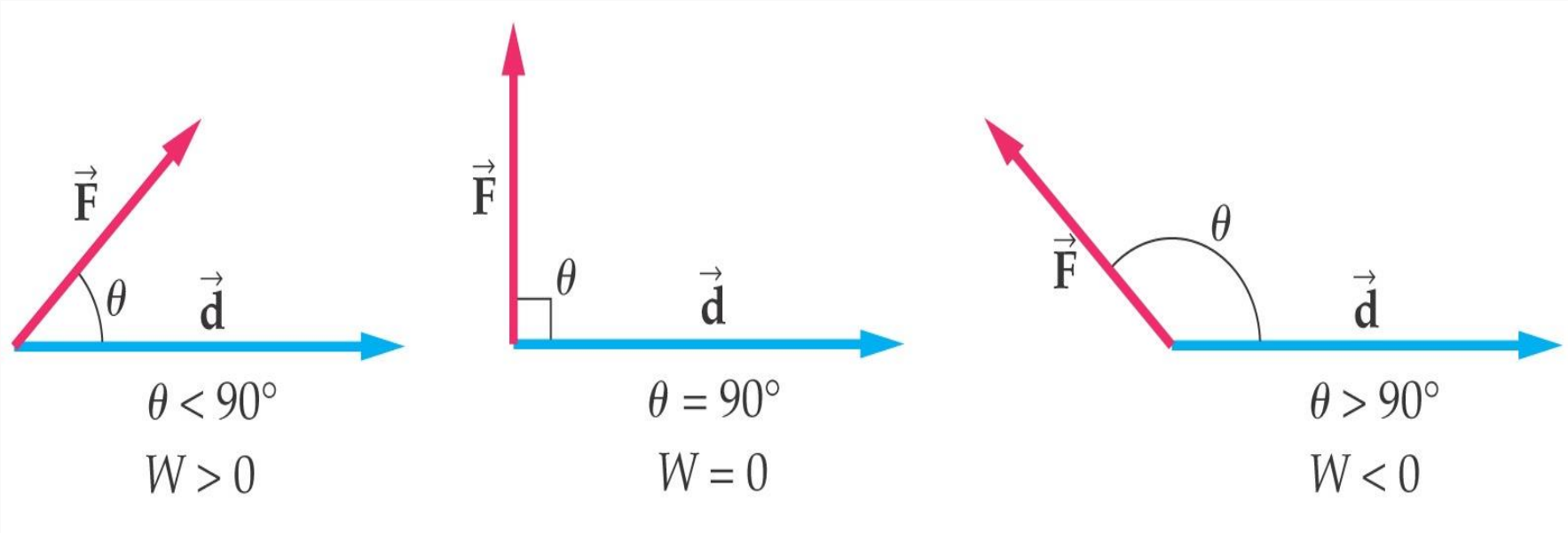
(θ è l'angolo tra $\vec{\mathbf{F}}$ e $\Delta\vec{\mathbf{r}}$)



Le forze normali allo spostamento non fanno Lavoro



Concetto di Lavoro è diverso dal senso comune… non confondetelo



Il lavoro può avere segno negativo se angolo tra spostamento e forza è maggiore di 90 gradi. Cosa si intende?

Se lavoro è negativo, significa che lo **spostamento avviene "contro" la forza in questione**. Esempio:

Alzare un White Russian



Nel caso vogliate bere un bicchiere di White Russian appoggiato sul tavolo, mentre lo alzate ci saranno due forze in gioco:

- La forza peso
- La forza che esercitate per alzare il bicchiere

La forza peso fa lavoro?

$$W_P = PD\cos 180 = (mg)(D)(-1) = -mgD$$

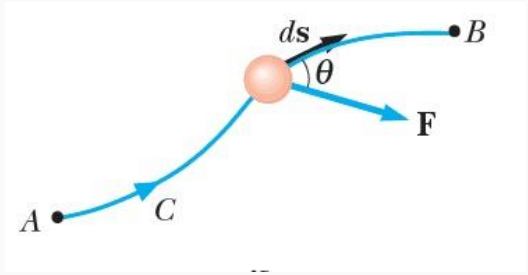
La forza 'della sete'?

$$W_{sete} = FD\cos 0 = FD$$

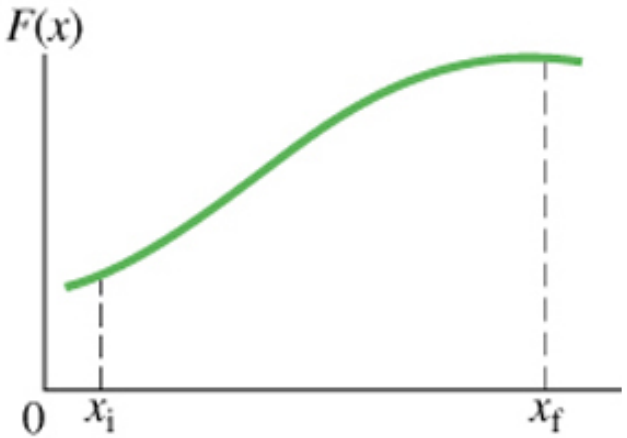
Quindi il lavoro per alzare il bicchiere è fatto CONTRO la forza peso

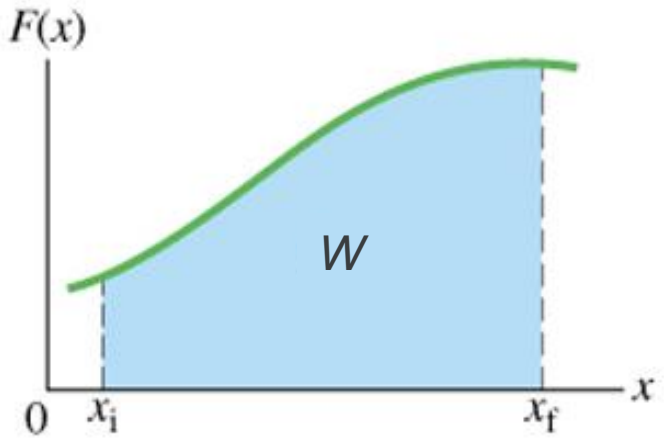
Forza variabile

Se la forza lungo lo spostamento x non è costante, il lavoro svolto è l'area sotto il grafico $F(x)$ da x_i a x_f.



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_A^B F\,cos\,\theta\,ds = \int_A^B F_T ds$$





Lavoro totale

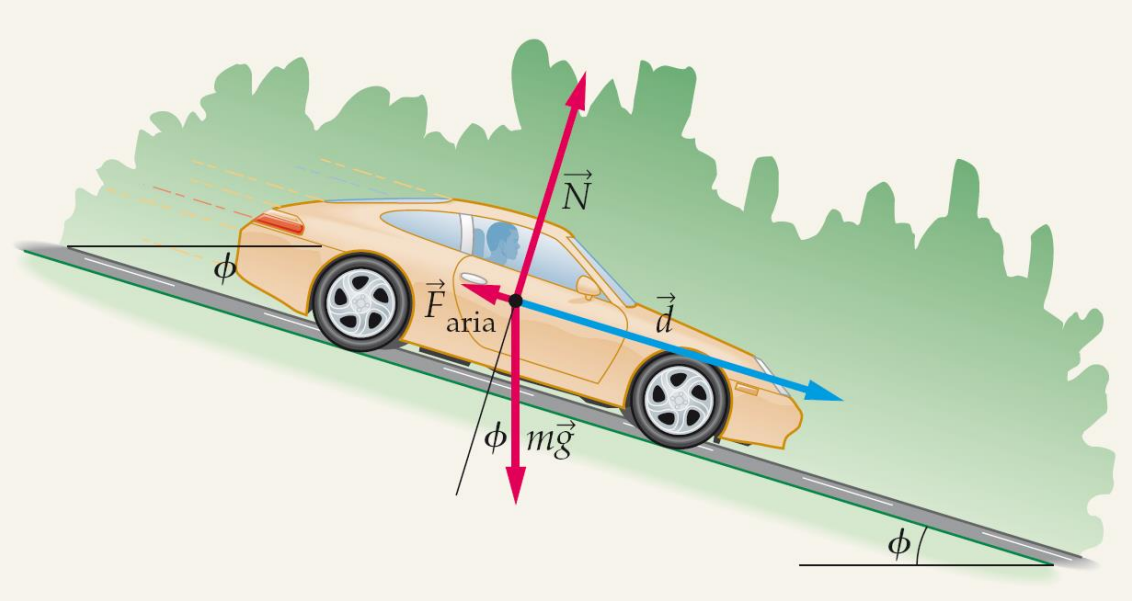
Quando più forze agiscono su un oggetto, il lavoro totale è la somma del lavoro svolto da ciascuna forza individualmente:

$$W_{\text{total}} = W_1 + W_2 + \mathrm{L} + W_N$$

Per un oggetto rigido senza movimento rotatorio o interno:

$$W_{\text{total}} = F_{\text{net}} \Delta r \cos\theta$$

Ogni forza il suo lavoro



Lavoro della forza peso

$$\circ W_P = \vec{P} \cdot \vec{d} = Pd\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = mgd\sin(\theta)$$

Lavoro della forza di attrito (viscoso) dell'aria

$$\circ W_{aria} = \overrightarrow{F_{aria}} \cdot \vec{d} = F_{aria} d\cos(\pi) = -F_{aria} d$$

Lavoro della risultante $\vec{R} = \vec{P} + \overrightarrow{F_{aria}}$

$$W = \vec{R} \cdot \vec{d} = \left(\vec{P} + \overrightarrow{F_{aria}}\right) \cdot \vec{d}$$
$$= (mg\sin(\theta) - F_{aria}) \cdot d$$

* Fate attenzione ai segni
* Attenzione a se usate modulo o vettore
* Ricordate di considerare tutte le forze
* Considerare una forza alla volta

La potenza corrisponde al lavoro per unità di tempo :

$$\wp = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Potenza istantanea

Questa è la potenza istantanea (o semplicemente potenza), in generale variabile durante il moto, e caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro.

Potenza media

La potenza media in un intervallo tempo Δt è il rapporto $W/\Delta t$, cioè il lavoro totale diviso per il tempo durante cui il lavoro è stato svolto. Tale grandezza risulta particolarmente importante per qualificare le prestazioni di un dispositivo o macchina che fornisce lavoro. A parità di lavoro totale svolto, ha maggiore potenza media quella macchina che lo eroga in minore tempo.

Teorema dell'energia cinetica

Supponiamo che una forza netta costante $\vec{F}$ agisce su un oggetto rigido di massa m durante lo spostamento $\mathrm{d}\vec{s}$. A un Lavoro corrisponde una variazione della velocità

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_T \mathrm{d}s = m\mathrm{a_T} ds = m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} ds = m\frac{ds}{\mathrm{dt}} dv = mvdv$$

2° legge di Newton

$$W = \int_A^B mvdv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

Energia cinetica

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

il lavoro compiuto dalla risultante delle forze nello spostamento di un punto materiale dalla posizione A alla posizione B è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale stesso.

$$\mathrm{W} = \Delta E_k$$

Teorema dell'energia cinetica

Espresso in modo più generale attraverso la quantità di moto, si scrive:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad p = \sqrt{2mE_k}$$

Il lavoro è la manifestazione dell'azione di una forza ed è quindi conseguenza dell'interazione con l'ambiente circostante. Si parla pertanto di **lavoro scambiato** e non si dice mai che un corpo possiede lavoro.

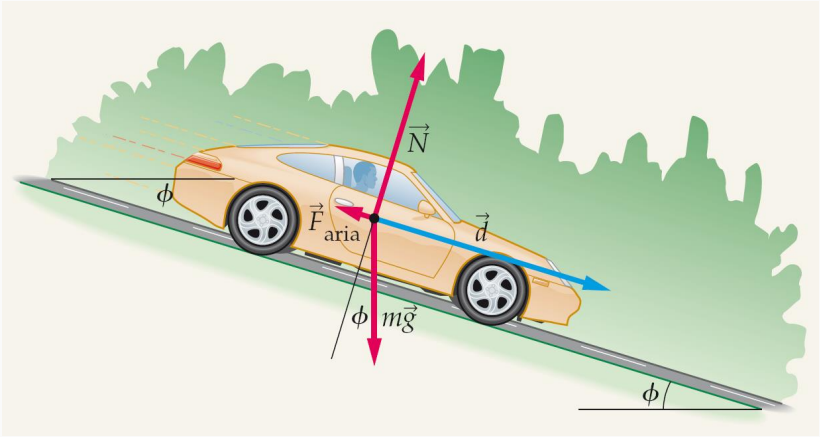
Si parla invece di **energia posseduta** dal sistema, che viene modificata dall'interazione con l'ambiente esterno. Un effetto misurabile dell'interazione è la variazione di energia.

Lavoro della RISULTANTE!

Per arrivare a questa formula **siamo partiti da $F = ma$**. Ricordiamoci che nella seconda legge di Newton F è la RISULTANTE delle forze, perciò:

La variazione di energia cinetica tra A e B è uguale al LAVORO DELLA RISULTANTE DELLE FORZE (non di una forza singola)

$$W_{i\to f} = E_{k,f} - E_{k,i}$$



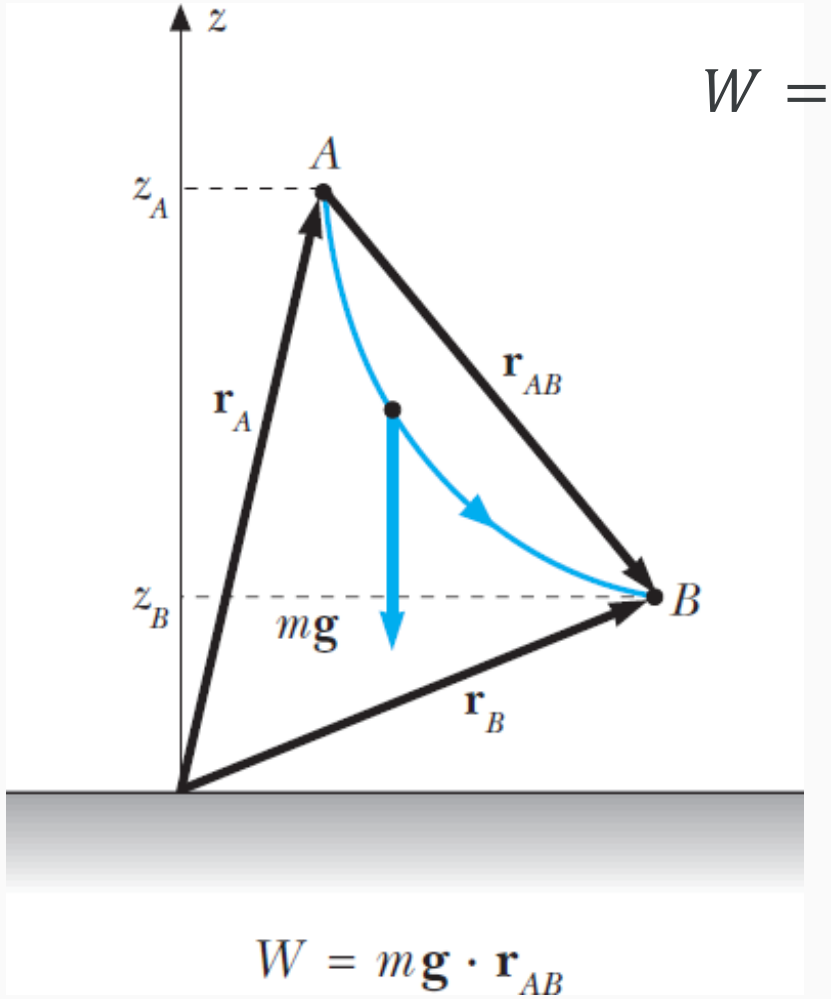
N.B.

- ΔE_k è sempre lo stato finale meno lo stato iniziale.
- L'unità di misura dell'energia è la stessa del lavoro, il Joule.

Lavoro della risultante

$$W = \vec{R}\cdot\vec{d} = \left(\vec{P} + \overrightarrow{F_{aria}}\right)\cdot\vec{d}$$
$$= (mg\sin(\theta) - F_{aria})\cdot d$$
$$= \Delta K$$

Lavoro della forza peso



$$W = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{AB}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{s} = m\vec{g} \cdot \vec{r}_{AB} = -mg(z_B - z_A)$$

Visto che la **forza peso è costante**, indipendente dalla posizione e orientata sempre lungo l'asse verticale z, si può sempre proiettare lo spostamento lungo l'asse z, per stimare il lavoro scambiato dalla forza peso.

Ne deriva che il lavoro scambiato dipende solo dall'altezza rispetto al suolo ed è indipendente dalla traiettoria.

Vale quindi per tutte le forze costanti $\vec{F}$ (modulo, direzione e verso)

$$W = -(F_z\, z_B - F_z\, z_A)$$

Lavoro di una forza elastica

Forza elastica $\vec{F} = -kx\hat{u}_x$

Lavoro della forza elastica

$$W = \int_A^B -kx\hat{u}_x \cdot dx\hat{u}_x = -k\int_A^B x dx = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

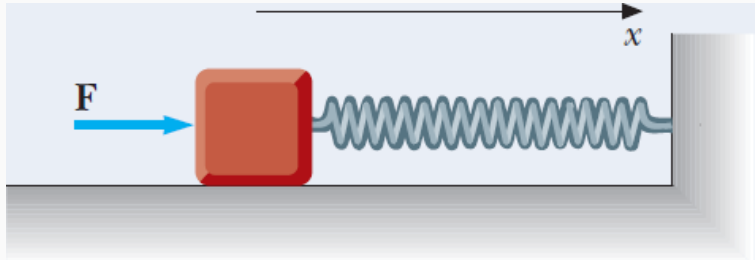
Vediamo che anche in questo caso il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e da quella finale.

Se più forze agiscono il lavoro totale sarà il lavoro svolto dalle singole forze e il lavoro totale sarà pari alla variazione dell'energia cinetica

$$\sum W = \Delta E_k$$

Lavoro di somma di forze

Un punto materiale fissato a una molla di costante elastica k è in quiete nell'origine. Si applica al punto una forza $\vec{F} = F\,\hat{u}_x$, costante in modulo, direzione e verso, e il punto si muove lungo x. Calcolare la velocità del punto in funzione di x e la posizione in cui il punto si ferma.



$$W_F + W_{el} = \Delta \mathrm{E_k}$$

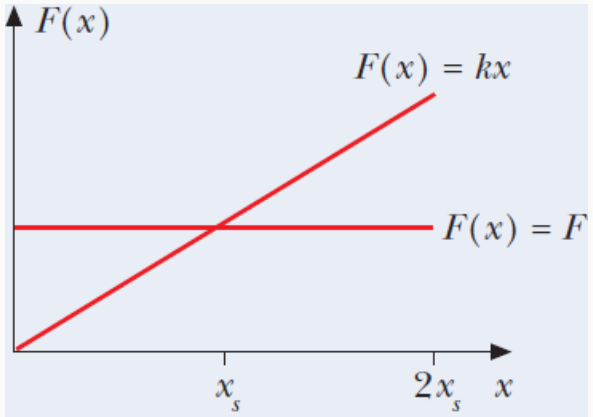
$$\begin{cases} W_F = F(x - x_A) \\ W_{el} = -\dfrac{1}{2}k(x^2 - x_A^2) \\ \Delta E_k = \dfrac{1}{2}m(v^2 - v_A^2) \end{cases}$$

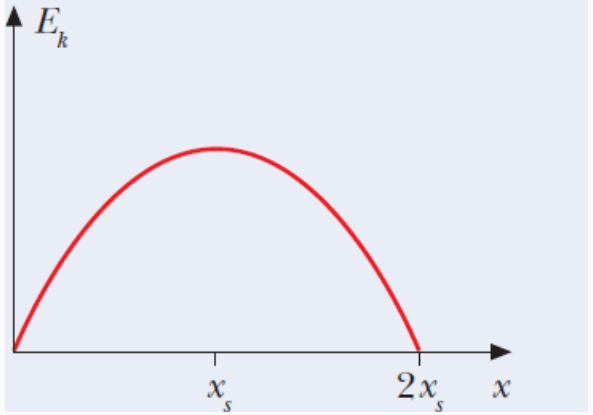
$$F(x - x_A) - \frac{1}{2}k(x^2 - x_A^2) = \frac{1}{2}m(v^2 - v_A^2)$$

$$Fx - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{x}{m}(2 - kx)}$$

Quando il punto si ferma $\quad x = \dfrac{2F}{k}$





Lavoro della forza d'attrito radente

Forza d'attrito $\vec{F} = -\mu_d N \hat{u}_v$

La velocità è sempre tangenziale alla traiettoria

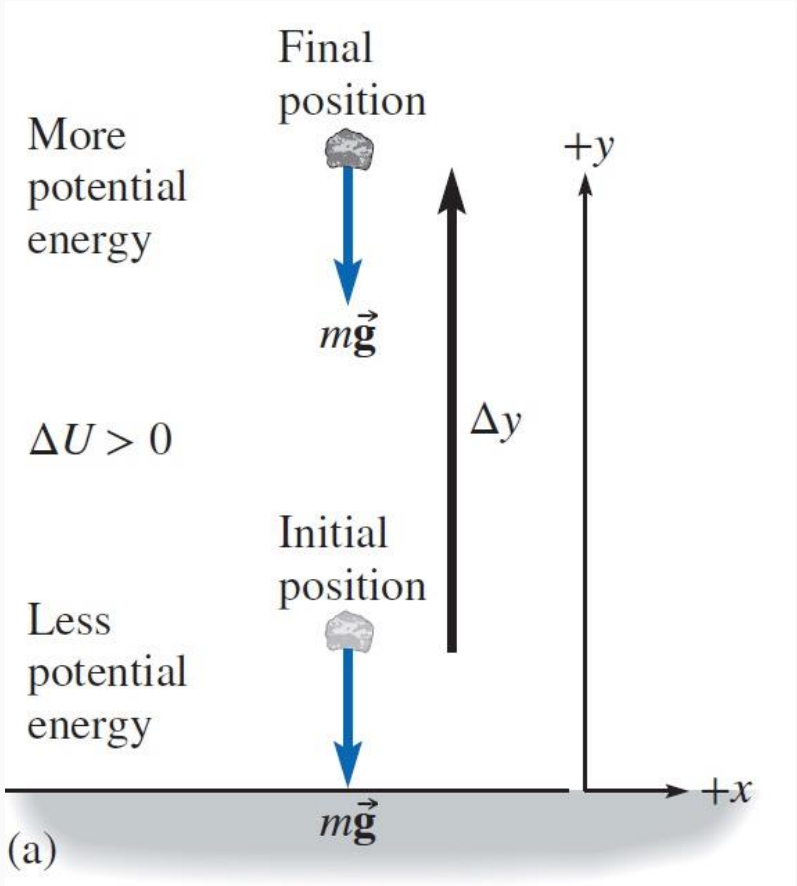
Lavoro della forza d'attrito

$$W = \int_A^B -\mu_d N \hat{u}_v \cdot d\vec{s} = -\mu_d \int_A^B \mathrm{N} ds$$

Se N è costante allora $W = -\mu_d N s_{\mathrm{AB}}$

In questo caso vediamo che il lavoro non dipende solo dalla posizione iniziale e finale, ma dipende dalla traiettoria.

Il lavoro della forza d'attrito radente è sempre NEGATIVO



Lancia un sasso con la velocità iniziale v_i

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$$

Arriva alla sua posizione finale con $v_f = 0\ m/s$

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$\Delta K = K_f - K_i < 0$$

L'energia cinetica diminuisce

$$\Delta K = W_{grav} = -mg\Delta y$$

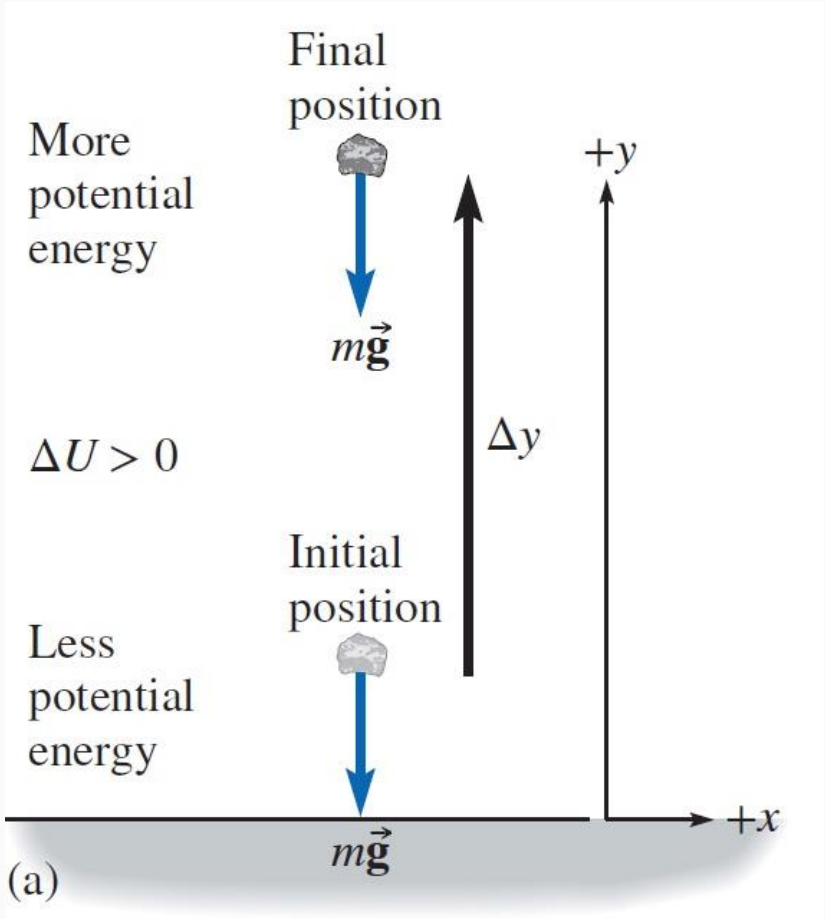
Considerando l'origine degli assi e definendo $E_p = -mgy$ posso scrivere

$$\Delta K = W_{grav} = (-mgy_{\mathrm{f}}) - (-mgy_{\mathrm{i}}) = E_{p\mathrm{f}} - E_{p\mathrm{i}}$$

Il lavoro di una forza ***conservativa*** può quindi essere calcolato come semplice differenza algebrica tra i valori assunti da E_p in i e in f, senza dover calcolare integrali di linea come previsto nella definizione

E_p è l'energia potenziale

Energia potenziale



Lancia un sasso con la velocità iniziale v_i $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$

Arriva alla sua posizione finale con $v_f = 0\ m/s$ $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$

$$\Delta K = K_f - K_i < 0$$

L'energia cinetica diminuisce

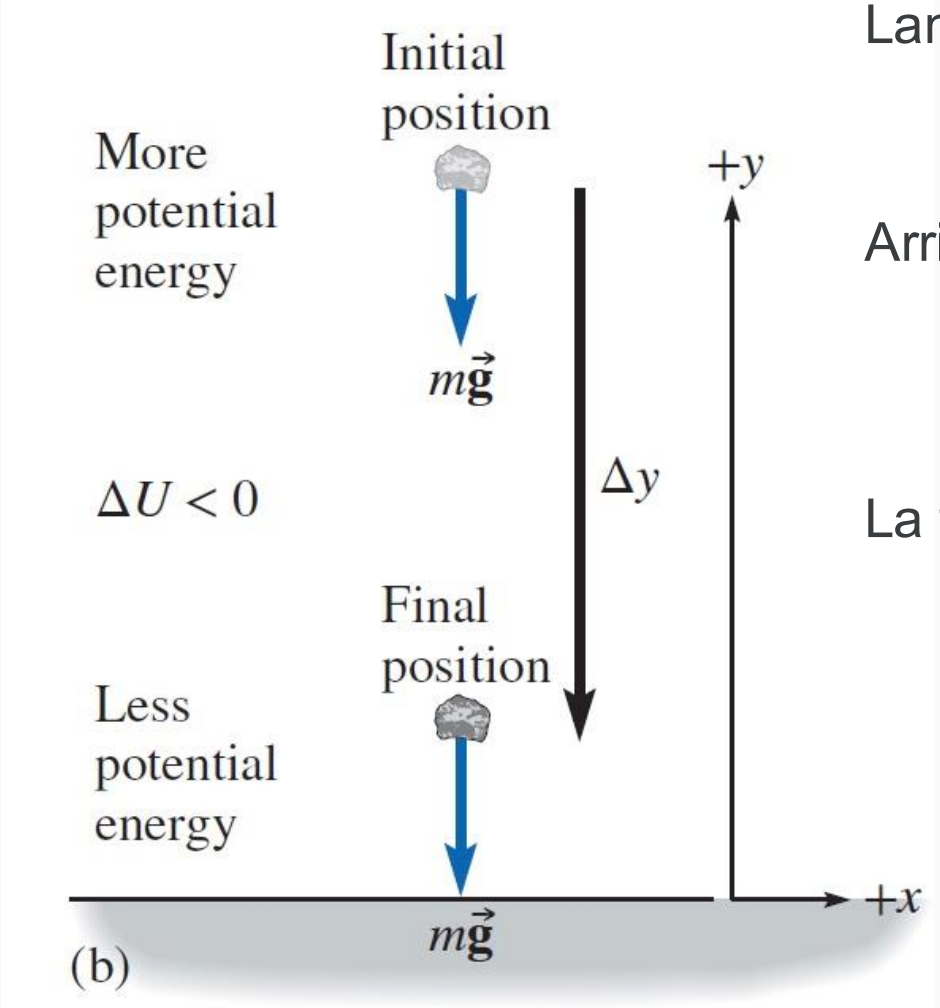
$$\Delta K = W_{grav} = -mg\Delta y$$

La forza di gravità fa un lavoro negativo. L'energia cinetica persa viene immagazzinata in **un'energia potenziale**

$$\Delta U_{grav} = -W_{grav}$$

L'energia cinetica può essere facilmente recuperata lasciando cadere la pietra dalla posizione finale alla posizione iniziale

Energia potenziale gravitazionale



Lancia un sasso con la velocità iniziale $v_i' = 0\ m/s$

Arriva alla sua posizione finale con v_f'

$$K_i' = \frac{1}{2} m v_i'^2$$

$$K_f' = \frac{1}{2} m v_f'^2$$

La forza di gravità fa un lavoro positivo

$$W_{grav}' = mg\Delta y$$

$$\Delta K' = W_{grav}' = -\Delta U'_{grav} = mg\Delta y$$

Ma allora se considero i due moti insieme, verso l'alto e verso il basso posso scrivere

$$\Delta K' = W'_{grav} = -\Delta U'_{grav} = mg\Delta y = -W_{grav} = -\Delta K = \Delta U_{grav}$$

Possiamo osservare che $W'_{grav} = -W_{grav}$.

Il lavoro totale svolto dalla forza gravitazionale per spostarla dalla posizione iniziale a quella finale e poi tornare al punto iniziale è **nullo**.

In un sistema con forze conservative

$$\Delta K' + \Delta U'_{grav} = \Delta K + \Delta U_{grav} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{K + U_{grav} = costante}$$

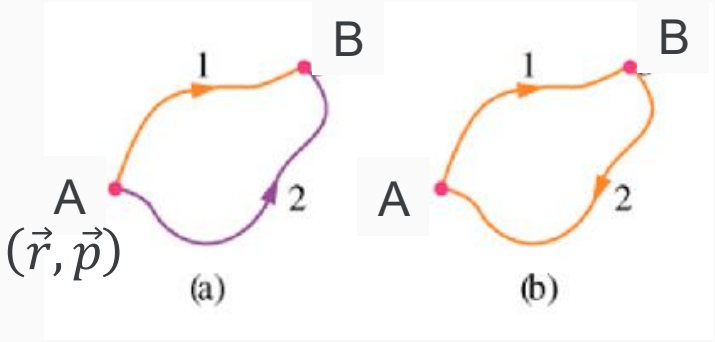
Forze conservative

Nell'applicare la conservazione dell'energia utilizzando $\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U$,
ΔU deve includere il cambiamento in tutte le forme di energia potenziale.
Per ora, con due forme di energia potenziale,

$$\Delta U = \Delta U_{\text{grav}} + \Delta U_{\text{elastic}}$$

Come abbiamo visto $\Delta E_{mech} = 0$ in un sistema in cui agiscono solo le **forze conservative**.
"Conservative" form the mechanical point of view, the work done by these forces stores energy that after can fully converted back to kinetic energy. If I store energy going to point A to point B, I just have it back going from B to A.

$$\Delta U_{B\to A} = -\Delta U_{A\to B}$$



$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$$

Ogni volta che il lavoro svolto da una forza è **indipendente dal percorso**, cioè il lavoro dipende solo dalle posizioni iniziale e finale, la forza è conservativa.

Forze non conservative

Il lavoro svolto dall'attrito, dalla resistenza dell'aria e da altre forze di contatto dipende dal percorso, quindi queste forze non possono avere energie potenziali ad esse associate.

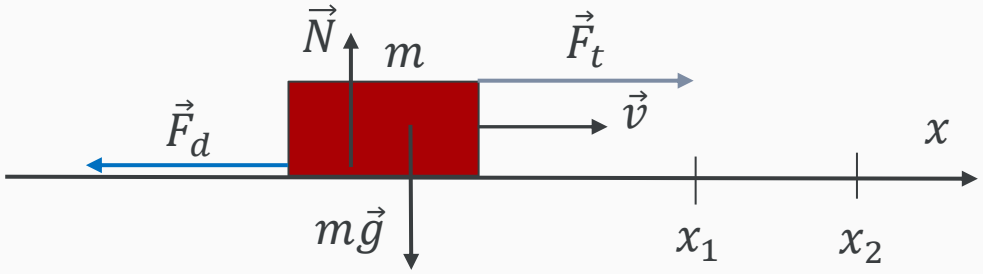
Non possiamo usare l'attrito per immagazzinare energia in una forma che sia completamente recuperabile come energia cinetica.

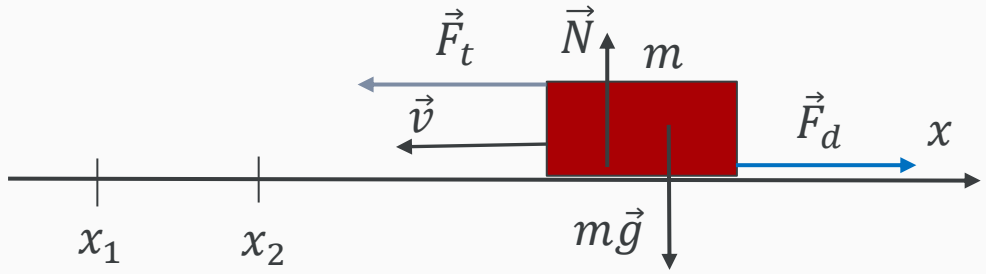
W_{nc} è il lavoro svolto da tutte le forze diverse da quelle incluse nell'energia potenziale.

Le forze non conservative non conservano l'energia meccanica, ma conservano l'energia totale

$$\Delta K + \Delta U_{grav} + \Delta U_{el} + \cdots = \Delta E_{mech} = W_{nc}$$

Forze non conservative – attrito





Consideriamo un oggetto con massa m, che scivola su un piano a velocità costante $\vec{v}$.
Viene trascinato da una forza $\vec{F}_t$ e una forza di attrito dinamico $\vec{F}_d$ si oppone alla mozione.

Poiché $\vec{v}$ è costante $\quad \vec{F}_{net} = \vec{F}_t + \vec{F}_d = 0$

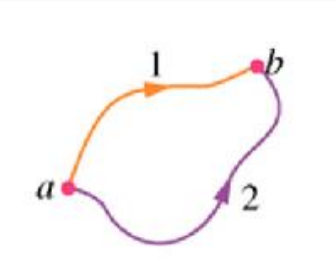
$$F_{net,x} = F_{tx} + \mu_d mg = 0$$

$$\Delta K = 0$$
$$\Delta U = 0$$
$$\Delta E_{mech} = 0$$
$$W_{nc} = 0 = W_t + W_d$$

$$W_{d,1\to2} = -\mu_d mg(x_2 - x_1) = -\mu_d mg\Delta x$$

$$W_{d,2\to1} = \mu_d mg(x_1 - x_2) = -\mu_d mg\Delta x = W_{d,1\to2}$$

Il lavoro su un ciclo chiuso non è zero

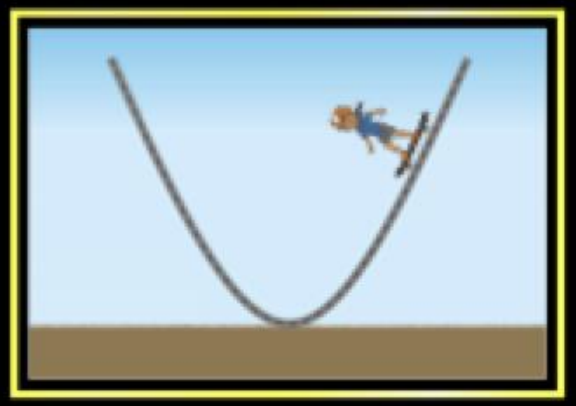


- Forze **conservative**
  - Tutte le 4 interazioni fondamentali della natura
  - Tutte le forze “centrali” ovvero con dipendenza “radiale”, come la forza elastica

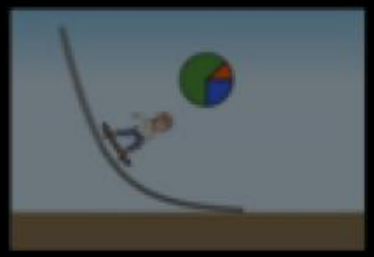
- Forze **non conservative**
  - Attriti
  - Forze ‘esterne’ al «sistema"

Privacy & Terms

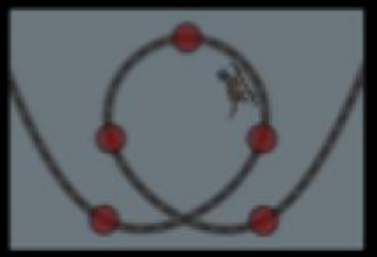
Energy Skate Park: Basics



Intro



Friction

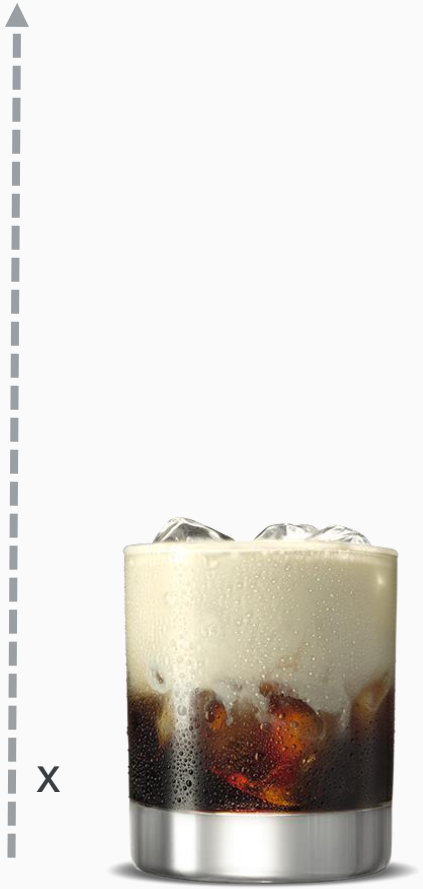


Playground



Esempio:

Di quanto varia l'energia potenziale del bicchiere di White Russian (m=100g) se lo sollevo di 40cm?



$$\Delta U = U_f - U_i$$

Conosco U_i? Quanto vale energia potenziale di un corpo appoggiato? Si può considerare pari a zero. Ad ogni modo siamo interessati a ΔU, questa la posso calcolare:

$$\Delta U = U_f - U_i = mg(x_f - x_i)$$
$$= mg\Delta x = 0.076(9.81)(0.37)$$
$$= 0.27J$$

La sua energia potenziale aumenta, in quanto può far lavoro (lasciandolo ad es. cadere)

Esempio

Una squadra di alpinisti si sta calando in corda doppia lungo un terreno ripido nella valle dello Yosemite. Mei-Ling (massa 60,0 kg) scivola lungo una linea partendo da fermo a 12,0 m sopra un ripiano orizzontale.

Se atterra sulla piattaforma sottostante con una velocità di 2,0 m/s, calcola l'energia dissipata dalle forze di attrito cinetico che agiscono tra lei e la linea. Il valore locale di g è 9,78 N/kg.

Ignora la resistenza dell'aria.

$$\vec{W} + \vec{F_a} = \vec{F}_{net} = m\vec{a}$$

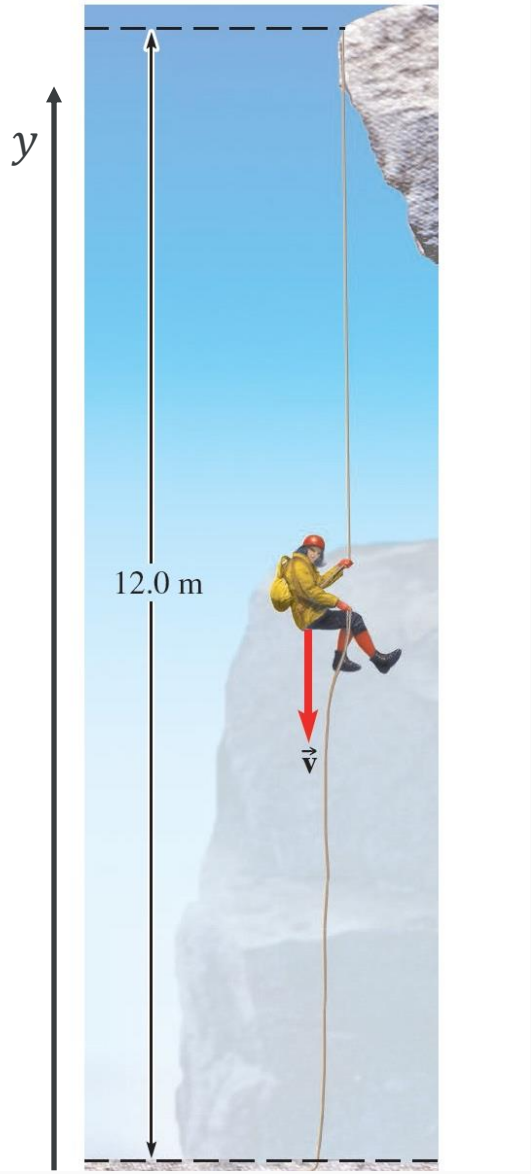
$$F_{ay} = ma_y - (-mg) = m(a_y + g)$$

Dall'equazione del moto

$$v_{fy}^2 - v_{iy}^2 = 2a_y\Delta y \quad \Rightarrow \quad a_y = \frac{(2.0)^2}{2 \cdot (-12.0)} = -0.17\ m/s^2$$

$$F_{ay} = 60.0(-0.17 + 9.78) = 576.6\ N$$

$$W_d = F_{ay}\Delta y = 576.6 \cdot (-12.0) = -6919\ J$$



Esempio

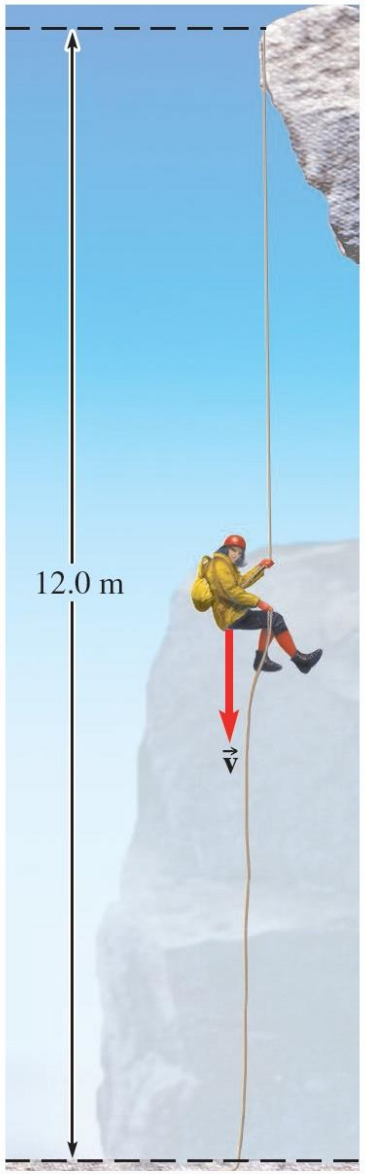
Conservazione dell'energia

$$\Delta K + \Delta U_{grav} = W_{nc}$$

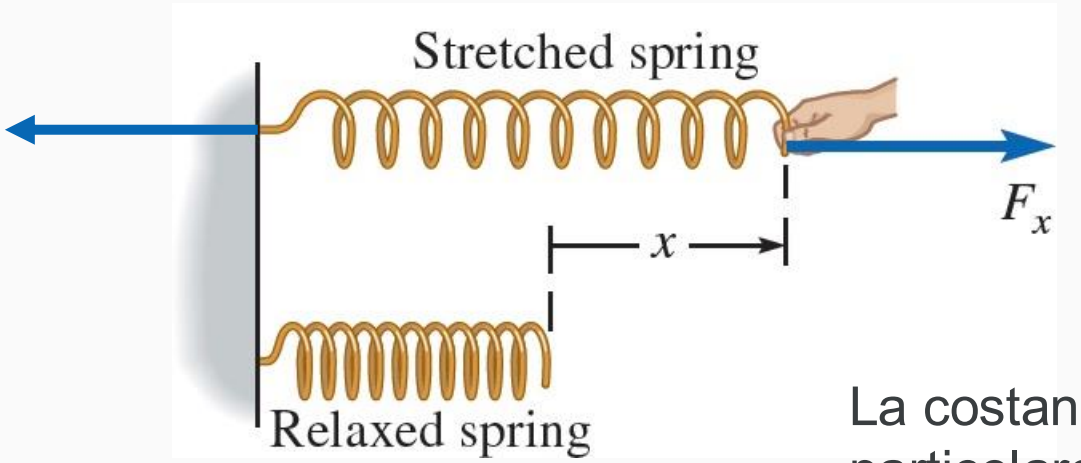
$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} 60.0 (2.0)^2 = 120\, J$$

$$\Delta U_{grav} = mg(y_f - y_i) = 60.0 \cdot 9.78 \cdot (-12.0) = -7040\, J$$

$$W_{nc} = -7040 + 120 = -6920\, J$$



Energia potenziale elastica



- Same magnitude at each end
- Ideal spring no mass and satisfies Hooke's law

Legge di Hooke $F_x = -kx$

La costante k è chiamata costante elastica (Nm^{-1}) o una molla particolare e il **lavoro svolto** è

$$W_{\text{spring}} = (-\frac{1}{2}kx_{\text{f}}^2) - (-\frac{1}{2}kx_{\text{i}}^2) = -\frac{1}{2}kx_{\text{f}}^2 + \frac{1}{2}kx_{\text{i}}^2$$

Energia potenziale elastica immagazzinata in una molla ideale:

$$\Delta U_{grav} = -W_{grav}$$

$$U_{\text{elastic}} = \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$U = 0 \text{ when } x = 0 \text{ (relaxed spring)}$$

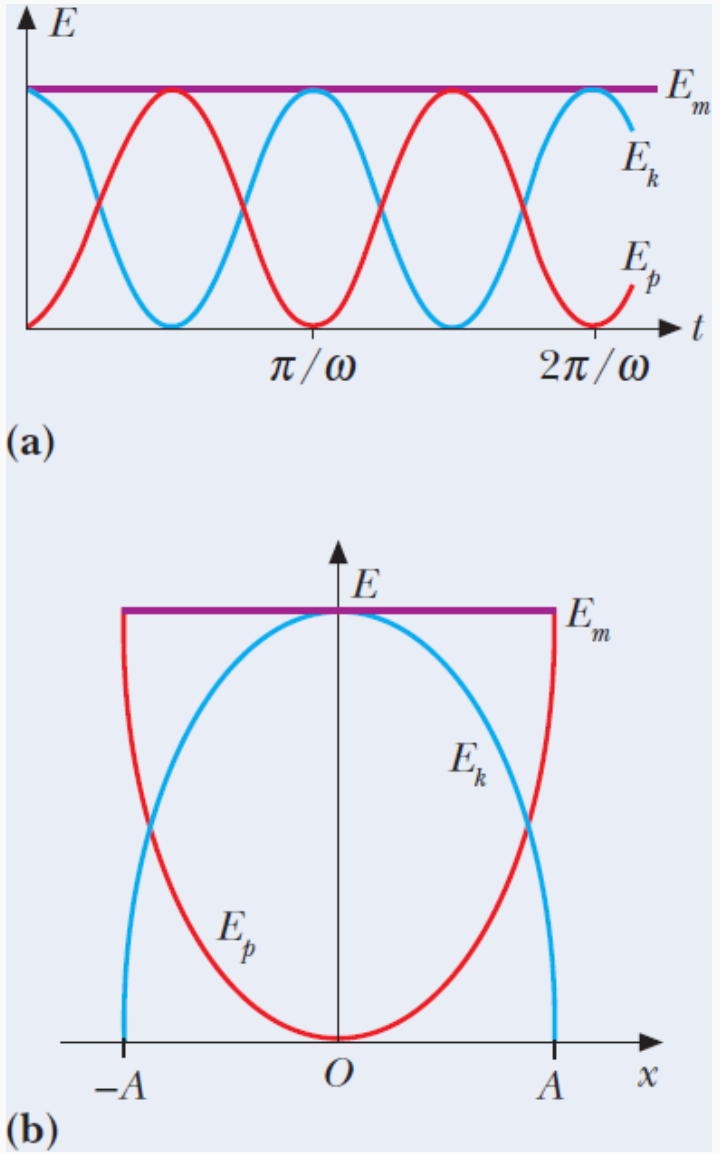
Conosciamo la legge che descrive la posizione e la velocità in funzione del tempo.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi),$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi).$$

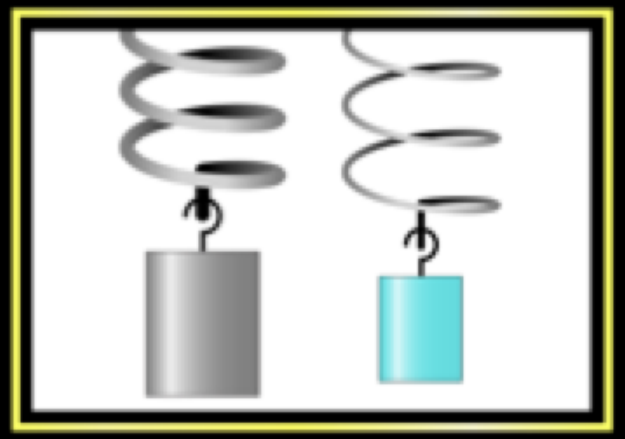
Sommandole e considerando $\omega^2 = k/m$ ottengo

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \text{costante}.$$

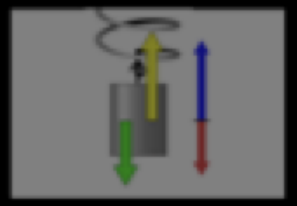


Privacy & Terms

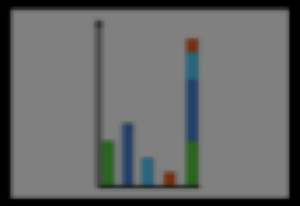
Masses and Springs



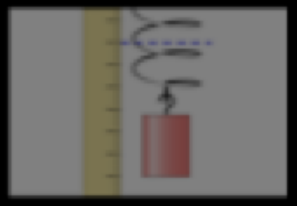
Intro



Vectors



Energy

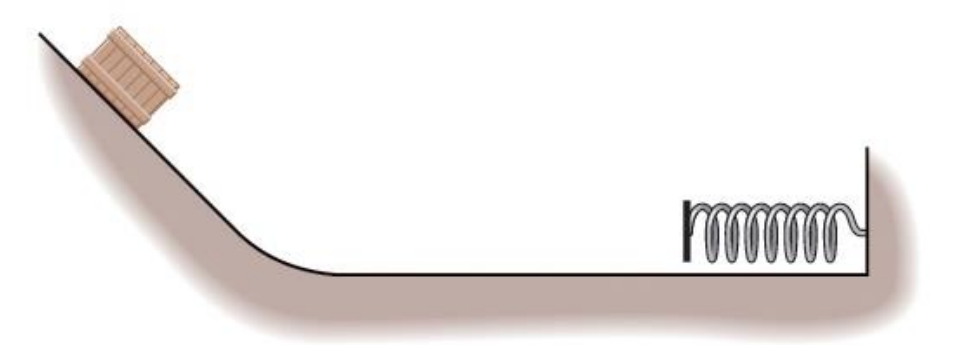


Lab

PhET



Esempio con più forze conservative



Un blocco da 2,0 kg viene rilasciato dal riposo e lasciato scivolare lungo una superficie priva di attrito e in una molla.

L'estremità più lontana della molla è fissata al muro, come mostrato.

L'altezza iniziale del blocco è di 0,50 m sopra la parte più bassa della scivolata e la costante della molla è di 20 N/m.
g è 10 N/kg.

a) Qual è la compressione massima della molla?
b) La molla rimanda il blocco a sinistra. Quanto in alto sale il blocco?

Soluzione

Risparmio energetico $\Delta K + \Delta U_{grav} + \Delta U_{el} = \Delta E_{mech} = W_{nc}$

Confronto tra la posizione iniziale e quella finale

$$\Delta K = 0$$
$$W_{nc} = 0$$

(a)

$$\Delta U_{grav} = -\Delta U_{el}$$

$$mgh = -\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = 0.21\ m$$

(b)

Poiché la superficie è priva di attrito, nessuna forza non conservativa agisce sul blocco. Quindi, il blocco tornerà alla sua altezza precedente, o 0,50 m. Diciamo che si è scontrato elasticamente con la molla.

Esercizio con la potenza

Un'automobile di massa $m = 6.5\ ton$ con un motore da $120\ kW$, accelera alla massima potenza per 20 secondi su un tratto di strada senza attrito.

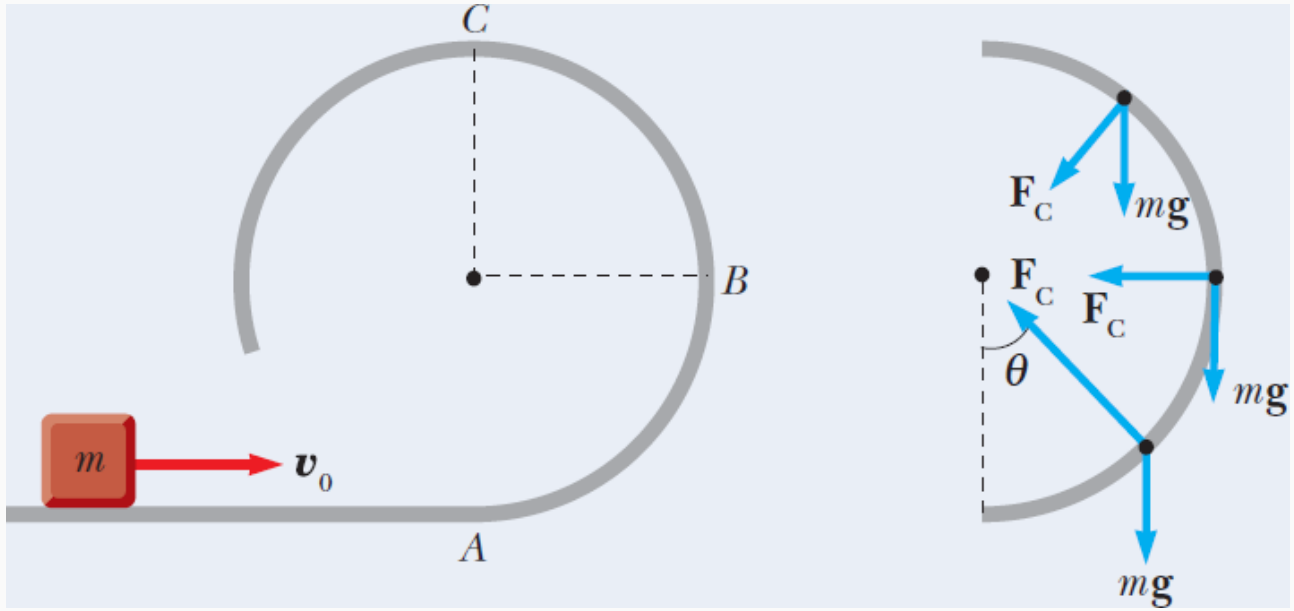
Calcolare Massima velocità raggiunta

- Energia meccanica inziale $E_i = 0$
- Energia meccanica finale $E_f = \frac{1}{2}mv^2$
- C'è variazione di energia meccanica $\Delta E = \frac{1}{2}mv^2$ quindi c'è lavoro delle forze non conservative (il motore) $W_{FNC} = \Delta E$
- Energia erogata dal motore è pari a $\Delta E = Pt = 120\ 10^3\ (20) = 2.4\ 10^6\ J$
- Quindi $\frac{1}{2}mv^2 = W_{FNC} = 2.4\ 10^6$ e quindi $v = 27.2\ m/s$

Giro della morte



Esempio



Un punto si muove su un asse orizzontale liscio con velocità v_0. Quando passa nella posizione A esso inizia a salire lungo una guida circolare liscia di raggio R, che giace in un piano verticale.

a) Calcolare la velocità del punto e la reazione della guida in B e in C.

b) Qual è il valore minimo di v_0 affinché il punto arrivi in C mantenendo il contatto con la guida?

a)

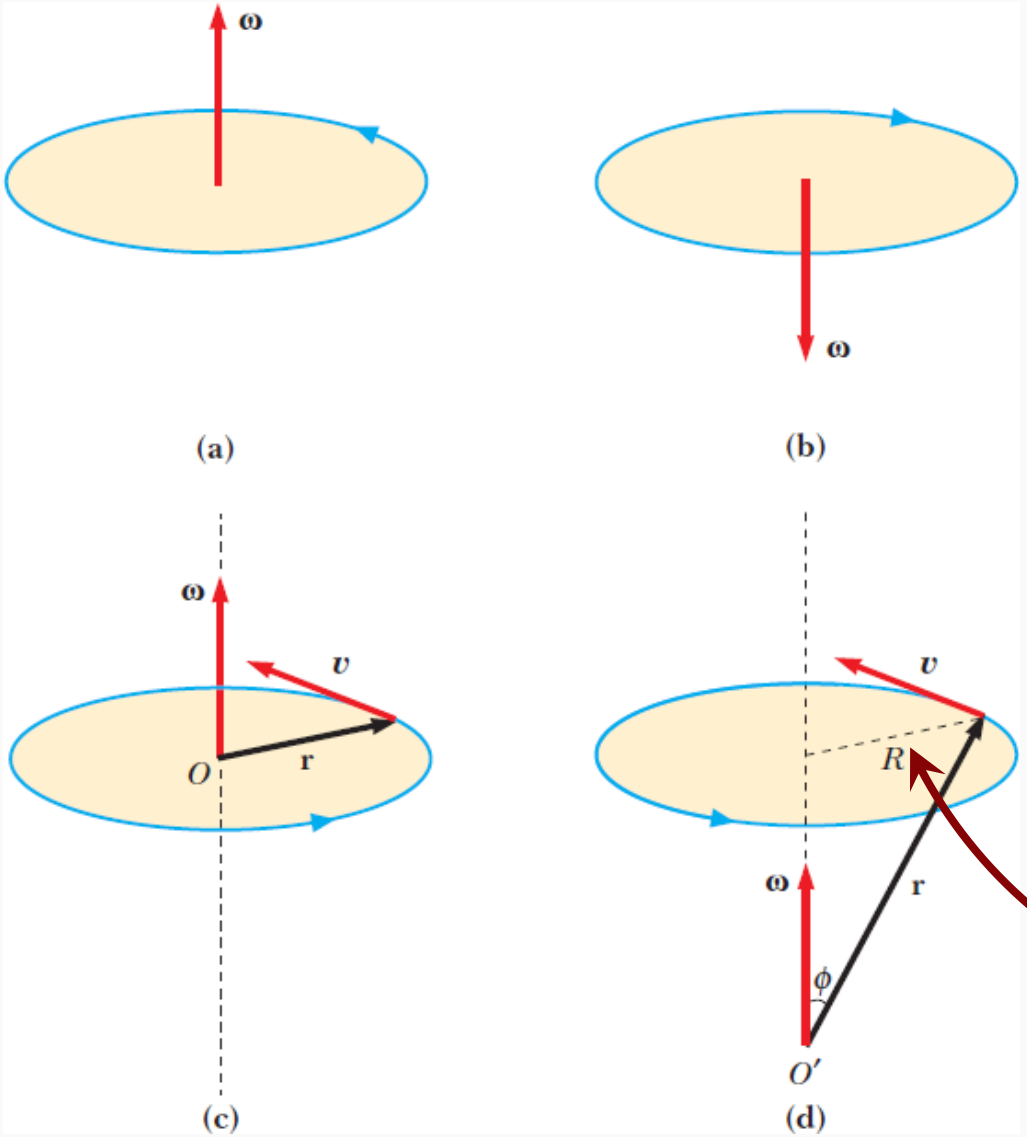
Conservazione dell'energia $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta) \longrightarrow v^2 = v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)$

b)

Se ruota … → forza centripeta = gravità

$\overrightarrow{F_N} = \vec{N} + (m\vec{g})_N = m\vec{a}_c \xrightarrow[\theta=\pi]{min \rightarrow \vec{N}=0} m\frac{v_{min}^2}{R} = m\frac{v_0^2 - 4gR}{R} = mg \longrightarrow v_0^2 = 5gR$

Velocità angolare



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Energia cinetica in un moto circolare

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

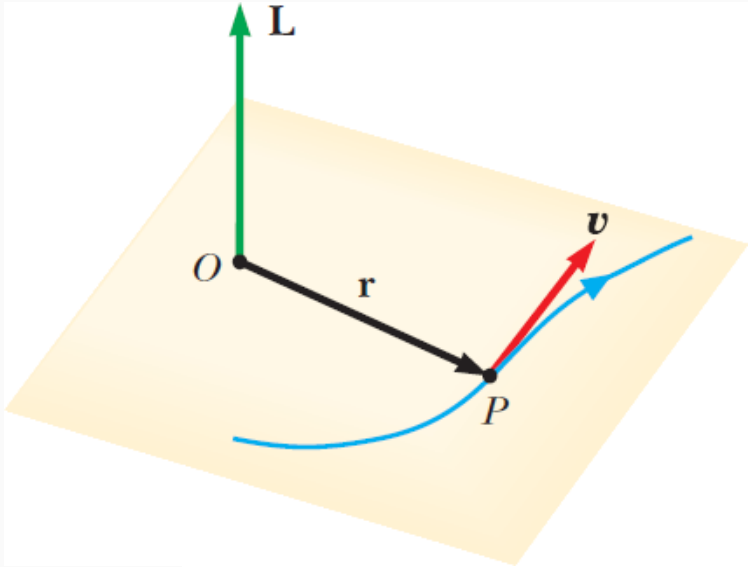
Proiezione $R = r \cos\phi$



Definiamo come **Momento Angolare**

rispetto al polo O

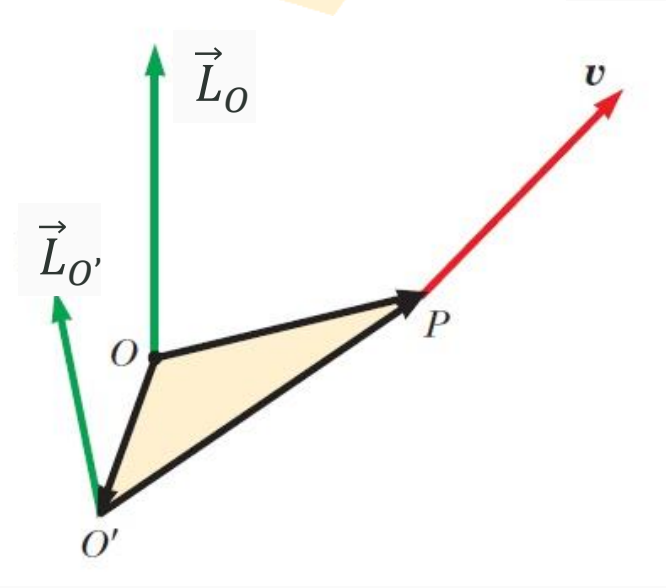
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad \frac{kg \cdot m^2}{s}$$



Se cambio polo $O \Rightarrow O'$

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \times m\vec{v} = \overrightarrow{OO'} \times m\vec{v} + \overrightarrow{O'P} \times m\vec{v} = \vec{L}_{O'} + \overrightarrow{OO'} \times m\vec{v}$$

$$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O - \overrightarrow{OO'} \times m\vec{v}$$



Definiamo come **Momento della Forza**

Rispetto al polo O

$$\vec{\mathrm{M}} = \vec{r} \times \vec{\mathrm{F}} \qquad \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = N \cdot m$$

Se cambio polo $O \Rightarrow O'$

$$\vec{\mathrm{M}}_{O'} = \vec{\mathrm{M}}_O - \overrightarrow{\mathrm{OO'}} \times \vec{\mathrm{F}}$$

Quando a un punto sono applicate più forze con risultante $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ si ha

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F_1} + \cdots + \vec{r} \times \vec{F_n} = \vec{r} \times \left(\vec{F_1} + \cdots + \vec{F_n}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

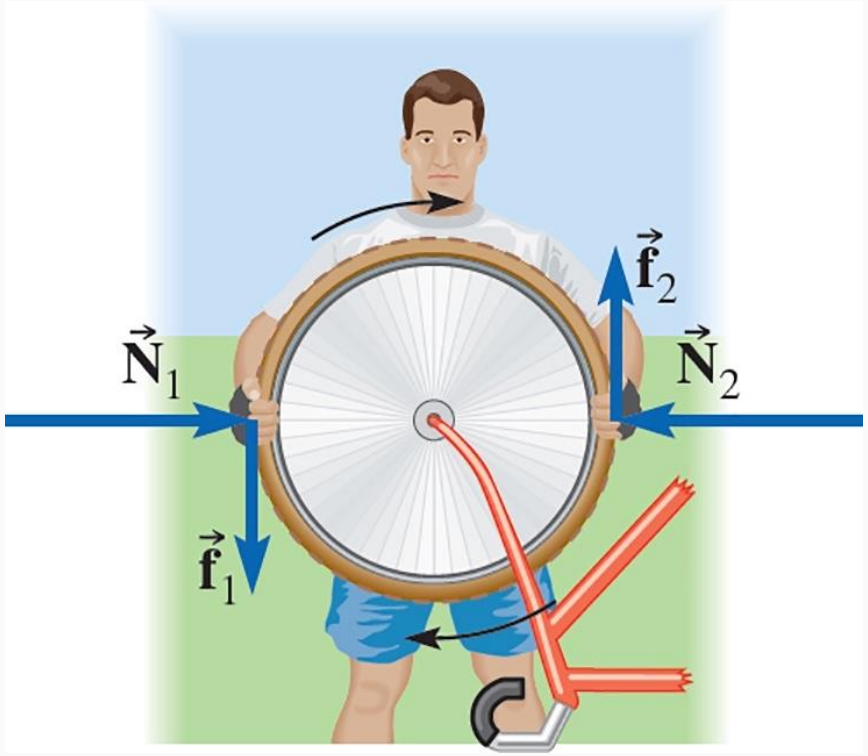
Questo è vero solo se le forze sono applicate nello stesso punto, nella posizione $\vec{r}$

Momento della forza

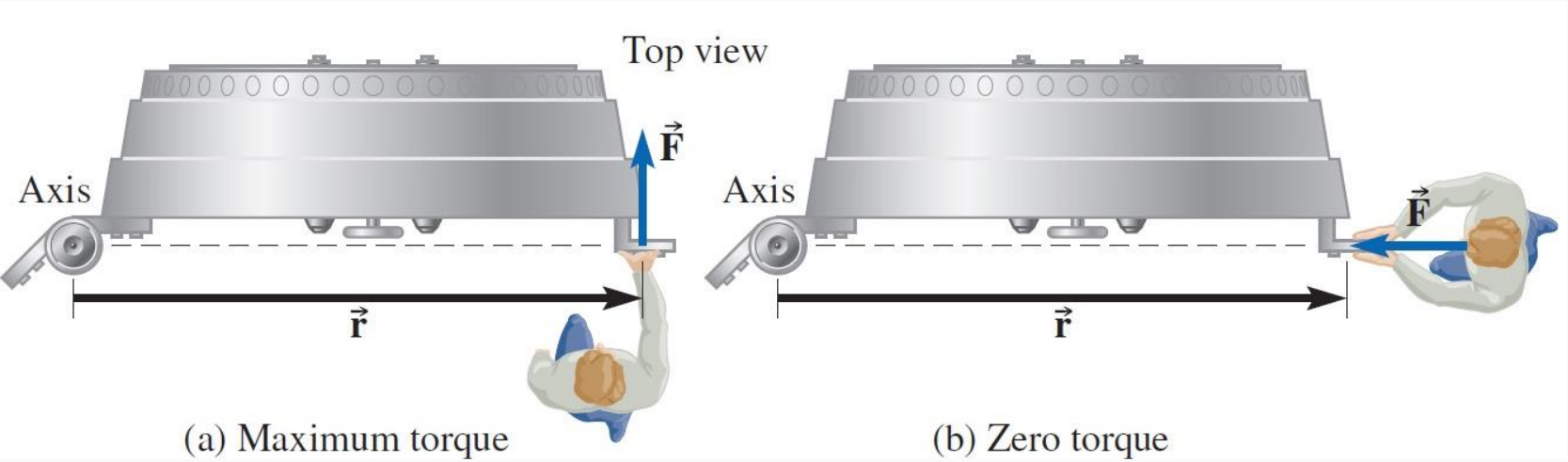
Una grandezza correlata alla forza, chiamata **momento o coppia**, svolge il ruolo nella rotazione che la forza stessa svolge nella traslazione.

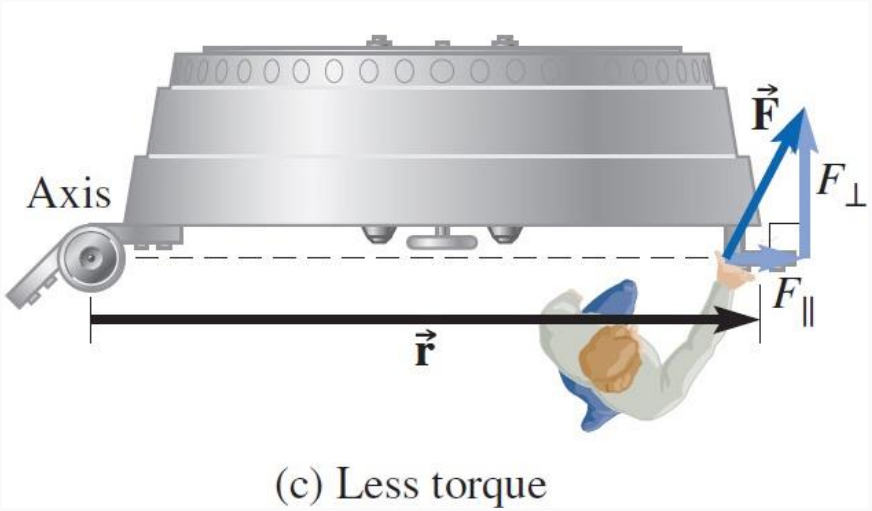
Una coppia non è separata da una forza; È impossibile esercitare una coppia senza esercitare una forza.

La coppia è una misura dell'efficacia di una data forza nel torcere o girare qualcosa. Per qualcosa che ruota attorno a un asse fisso come la ruota di una bicicletta, una coppia può modificare il movimento rotatorio facendolo ruotare più velocemente o rallentandolo.



Relazione fra forza e momento





Il momento dipende dalla direzione della forza applicata.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| F_\perp = rF \sin\theta$$

Per determinare il segno di un momento, immagina in che modo il momento farebbe iniziare a girare l'oggetto se inizialmente non sta ruotando

Teorema del momento angolare

Proviamo a calcolare la variazione nel tempo del momento angolare di un punto materiale in P.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \cancel{\vec{v} \times m\vec{v}} + \vec{r} \times m\vec{a}$$

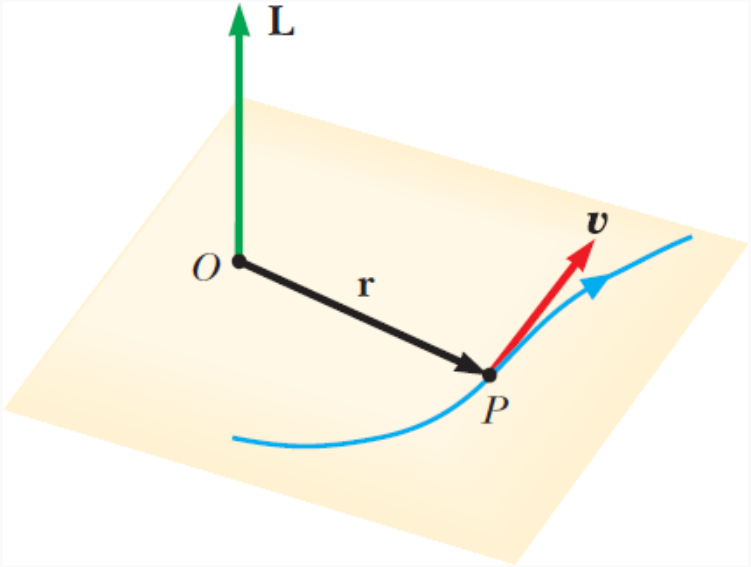
$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\mathrm{M}}$$

la derivata temporale del momento angolare è eguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo fisso in un sistema di riferimento inerziale.

Conservazione del momento angolare

Il momento angolare di un punto materiale rimane costante nel tempo (si conserva) se il momento delle forze è nullo.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{costante}$$



Integrando l'azione di un momento di forze ottengo il teorema del momento dell'impulso

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{M}\,dt = \int_{t_0}^{t} (\mathbf{r}\times\mathbf{F})dt = \mathbf{r}\times\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\,dt = \mathbf{r}\times\mathbf{J} = \Delta\mathbf{L}$$

Nel caso di un moto circolare fa lavoro solo la componente tangenziale della forza

$$W = \int_A^B F_T\,ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} r\,F_T\,d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M\,d\theta$$

Riassunto

Il lavoro è una grandezza fisica che rappresenta il trasporto dell'energia meccanica.

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Al lavoro corrisponde una variazione di energia cinetica

Una forza si dice conservativa se il suo lavoro dipende solo dal punto iniziale e da quello finale

Per le forze conservativa è possibile definire una energia potenziale, che corrisponde al lavoro che la forza farebbe per portare l'oggetto da dove è ad un punto di riferimento.

- Per le forze conservative, l'energia meccanica totale si conserva e si può trasformare in energia cinetica o potenziale

$$L_{FC} = \Delta E_K + \Delta U = \Delta E_{mec} = 0$$

- Per le forze non conservative, l'energia meccanica totale diminuisce sempre

$$L_{FNC} = \Delta E_K + \Delta U = \Delta E_{mec} > 0$$

Se un oggetto è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme il momento angolare si conserva

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Se invece il momento angolare cambia allora agisce un momento di una forza

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{M}}$$

Se il moto è su una circonferenza la forza centripeta non da' momento rispetto al centro di rotazione e non compie lavoro.

Termini chiave

- Lavoro della risultante, lavoro di una forza
- Lavoro contro una forza
- Forza non conservativa, forza conservativa
- Energia cinetica, teorema dell'energia cinetica
- Energia potenziale, energia potenziale della forza peso
- Energia meccanica, teorema conservazione energia nel caso di solo forze conservative (FC) e in presenza di forze non conservative (FNC)
- Potenza



Esercizio:

Ad un camion si bloccano le ruote durante una discesa, quando ha una velocità di 110 km/h. Fortunatamente raggiunge una corsia di emergenza con una pendenza di 25 gradi in salita.

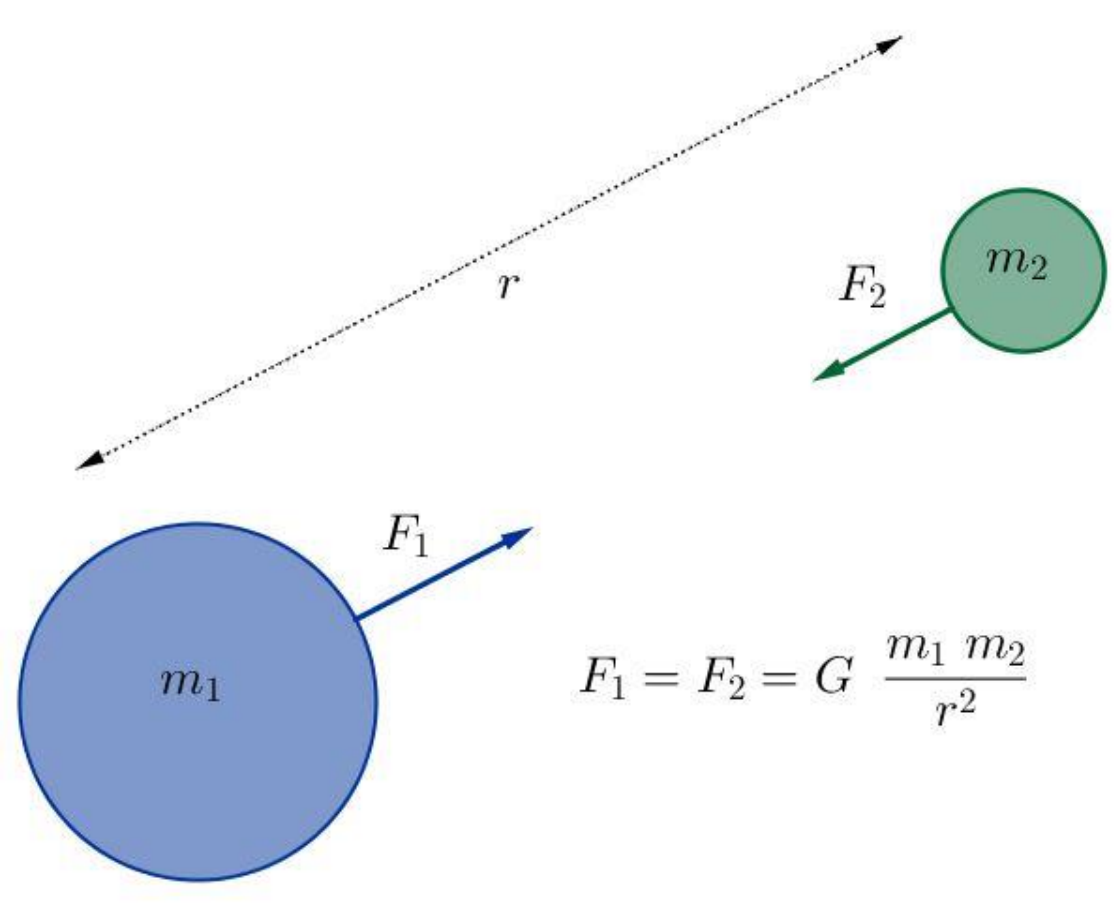
- Dopo che distanza si blocca definitivamente?
- L'attrito gomma-pista sia 0.9 [risolvere con metodo delle forze e della conservazione energia).
- Che potenza viene dissipata durante la frenata? (dove viene dissipata?)

Altri quesiti

- Che energia serve per sollevare un corpo di massa m=123kg di 85 metri sulla Luna ($g = 1.62 m/s^2$) ?
- Se questa azione viene svolta in 27 secondi, che potenza viene richiesta?
- Se alzo e abbasso un bilanciere da 85kg in palestra per 20 volte, quanta energia brucio (si assuma una distanza di sollevamento ragionevole). Chi fornisce energia?

- La forza peso fa lavoro alla fine dei 20 sollevamenti?
- Di quanto è variata la sua energia potenziale?
- Sulla cima dell'Everest ho più energia potenziale che sulla pianura Padana?
- Il lavoro della risultante di tutte le forze può essere negativo?

Energia Potenziale della forza gravità



Abbiamo visto che $\Delta E_{TOT} = \Delta E_K + \Delta U$

Per ora abbiamo visto energia potenziale della forza peso: $U = mgh$

Calcoliamo

ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA DI GRAVITA

$$dL = F_G \cdot dr = G\frac{m_1 m_2}{r^2} dr$$

$$L = \int G\frac{m_1 m_2}{r^2} dr = G m_1 m_2 \int \frac{dr}{r^2} = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Approfondimento: Velocità di fuga



La velocità di fuga è quella velocità al di sopra della quale un oggetto deve essere lanciato per poter uscire dal campo gravitazionale terrestre. Come calcolarla?

$E_K > U$ ovvero $\frac{1}{2}mv^2 > \frac{GmM_T}{r}$

Vicino alla superficie terra:

$$v > \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 40320\ km/h$$

$$\vec{\mathrm{F}} = -G\frac{\mathrm{m_1 m_2}}{\mathrm{r^2}} \qquad dW = \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{\mathrm{r}} = -G\frac{\mathrm{m_1 m_2}}{\mathrm{r^2}}\,dr$$

$$W = \int_{\mathrm{R_T}}^{\infty} -G\frac{\mathrm{m_1 m_2}}{\mathrm{r^2}}\,dr = G\frac{\mathrm{m_1 m_2}}{\mathrm{r}}\Big|_{\mathrm{R_T}}^{\infty} = -G\frac{\mathrm{m_1 m_2}}{\mathrm{R_T}}$$

Come funziona un ascensore?

Funivia: schema delle funi

