UNIVERSITÀ DI PADOVA · 1222

Corso di Fisica Generale – Pt1
Chimica Industriale 26/27

Lez 2. Cinematica

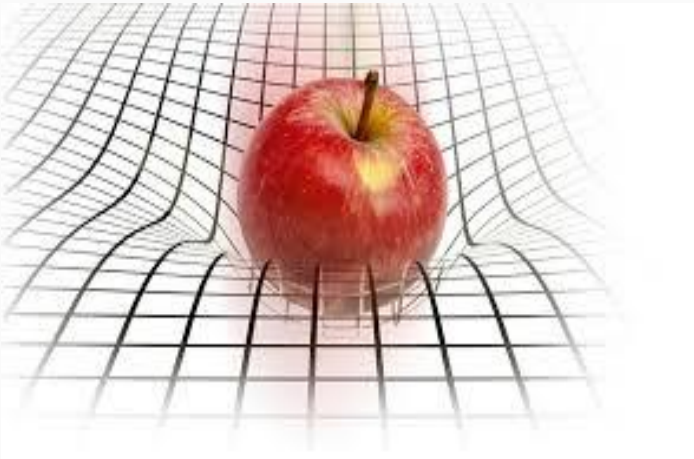
Docente:

Alessandro Patelli

alessandro.patelli@unipd.it



Perché ci interessa studiare il moto dei corpi?



Ci sono varie ragioni:

1. come vedremo più avanti, senza le interazioni (forze), non succederebbe niente, e **le forze della natura generano sempre "movimento" (attenzione però a cosa intendiamo)**

2. **le leggi** che definiamo in questa parte, saranno **molto generali e usate in altri ambiti** (termodinamica, elettromagnetismo, onde)

3. impariamo una cosa fondamentale: **procedere per approssimazioni successive**

4. Una legge sola può spiegare "caduta della mela" e il "moto dei pianeti"

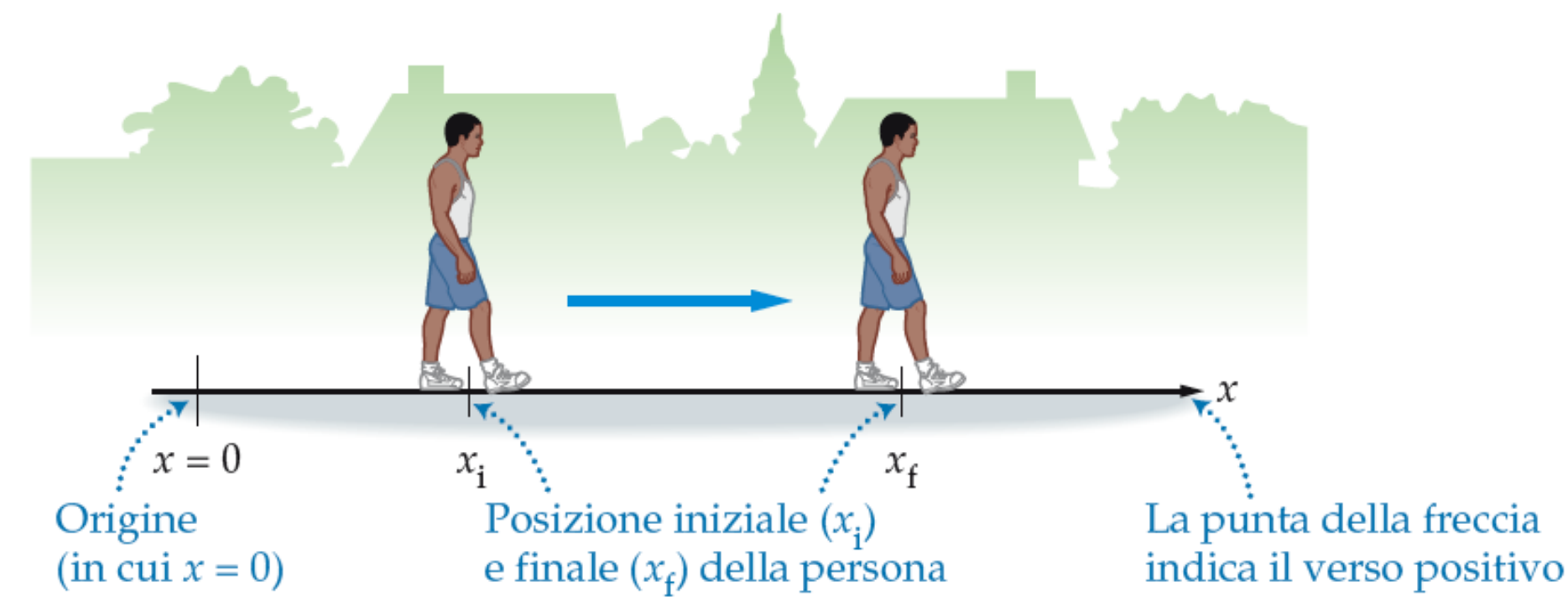
Cinematica del punto	1D	Posizione, spostamento Velocità Moto rettilineo uniforme Accelerazione Moto uniformemente accelerato Equazioni del moto
Cinematica del punto	2-3 D	Posizione, spostamento Velocità Accelerazione Equazioni del moto
Circular motion		Spostamento angolare Velocità angolare Accelerazione angolare

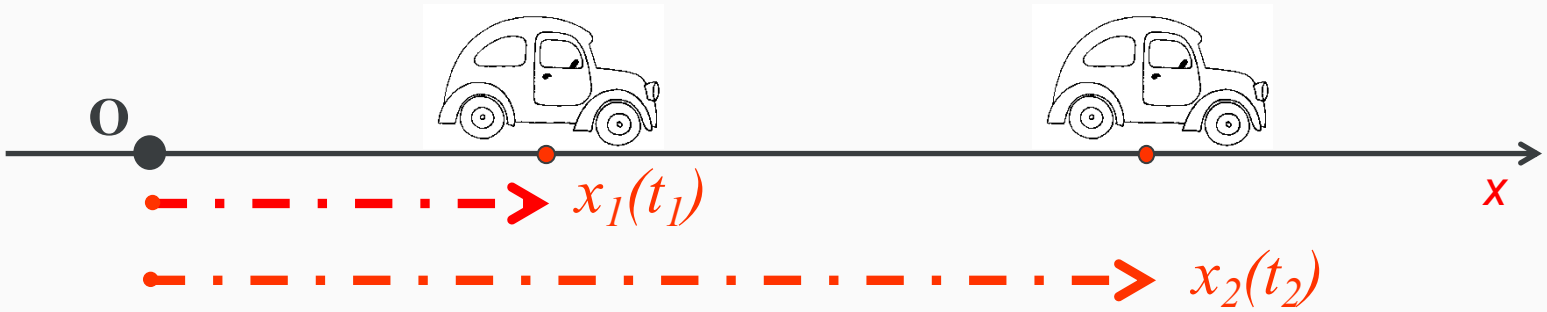
La Cinematica descrive il moto di un punto o di un corpo indipendentemente dalla causa del moto

La Cinematica descrive i parametri del moto (posizione, velocità e accelerazione) in funzione del tempo

Sistema di riferimento

- Il primo passo nella descrizione del moto consiste nello stabilire un **sistema di coordinate (di riferimento)** che definisce la posizione.
- Spesso la scelta è arbitraria, ma alcuni SDR sono meglio di altri



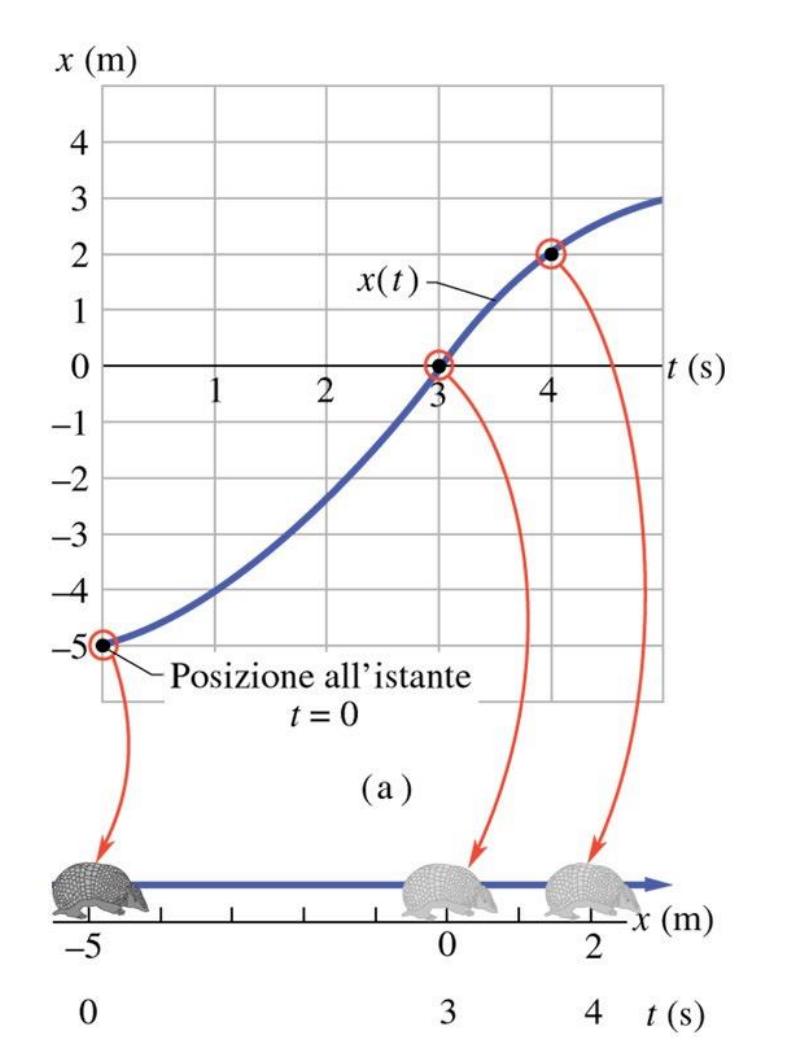


In una dimensione non serve notazione vettoriale
La differenza $x_2 - x_1$ tra la posizione finale e la posizione iniziale e' chiamata spostamento Δx:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

La legge che per ciascun istante t mi da la posizione $x(t)$ **è detta LEGGE ORARIA**.

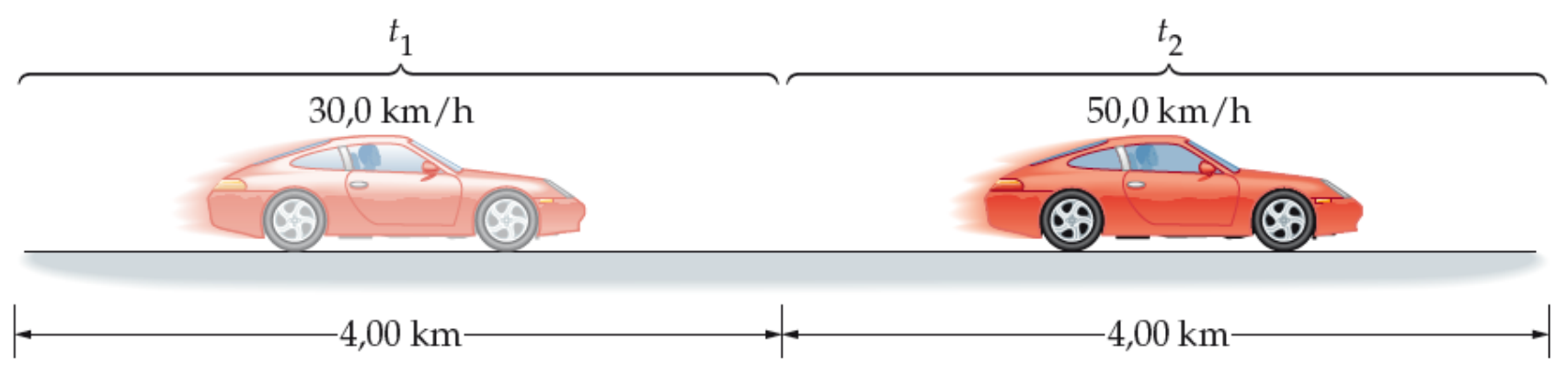
↳ Per ogni t (tempo)



La velocità media è definita come il rapporto tra la distanza percorsa e il tempo impiegato:

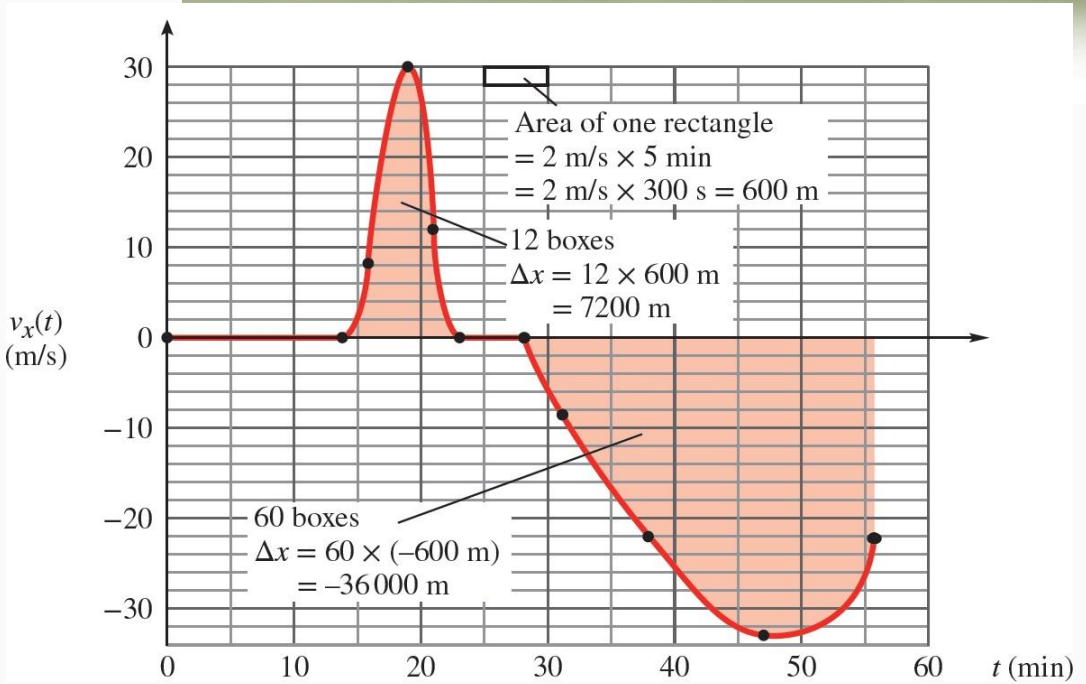
$$velocità\ media = \frac{distanza\ percorsa}{tempo\ impiegato} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \langle v \rangle$$

Supponiamo che una macchina percorra 4 km a 30km/h e poi altri 4km a 50km/h, quale è la sua velocità media?



Risposta: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8\ km}{t_1 + t_2} = \frac{8km}{\frac{4\ km}{30\ km/h} + \frac{4\ km}{50\ km/h}} = 37.5\ \frac{km}{h}$





Velocità istantanea

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{x - x_0}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\bigg|_{t_0}$$

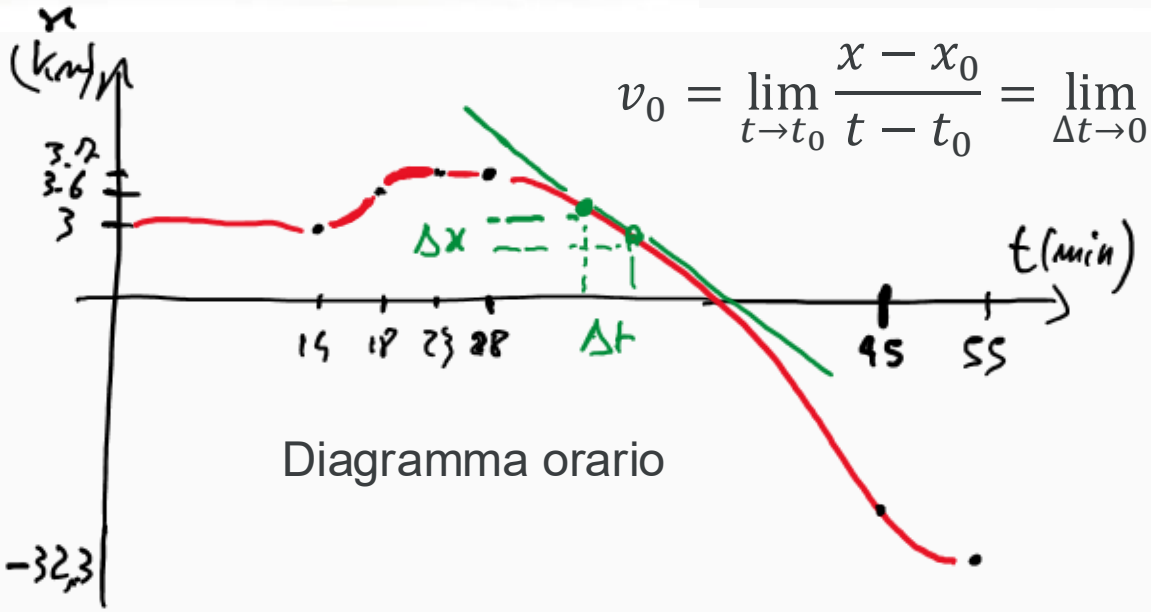


Diagramma orario

Velocità come derivata prima della posizione

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v \cdot dt$$

Il significato della ”d” di derivata è un **significato matematico** molto particolare, però una volta scritto ”dx” è come se fosse un numero, si può moltiplicare, dividere, etc.

Quella che vedete sopra è una semplicissima **“equazione differenziale”** Per risolverla bisogna “**integrare”** l’equazione differenziale

Moto rettilineo uniforme → velocità è costante e ”va dritto”

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx = v\,dt$$

Eq. differenziale di primo grado.
Metto le condizioni a contorno $x(t_0) = x_0$

Integrando

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt \quad \Rightarrow \quad (x - x_0) = v(t - t_0)$$

Quindi

Legge oraria del moto!

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$



$$< a >= \frac{variazione\ velocita}{tempo\ trascorso}$$



$$< a >= \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

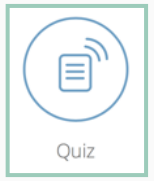
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

- Grandezza è [L]/[t^2]. Unità di misura m/s^2 (ma anche km/$h^{2)}$
- Ogni grandezza che si esprime in lunghezza/(tempo al quadrato) è una accelerazione
- Accelerazione istantanea come prima

- L'accelerazione è la derivata prima della velocità rispetto al tempo
- … ma anche la derivata seconda rispetto dello spazio rispetto al tempo

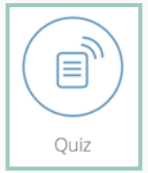
Una macchina da formula 1 va da 0 a 100 km/h in 1.8 secondi. Quale è la sua accelerazione media?

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{100\ \frac{km}{h} - 0}{1.8s - 0} = \frac{100\ km}{h} * \frac{1}{1.8s} = 55.6\ \frac{km/h}{s}$$



Quanti metri al secondo quadro?

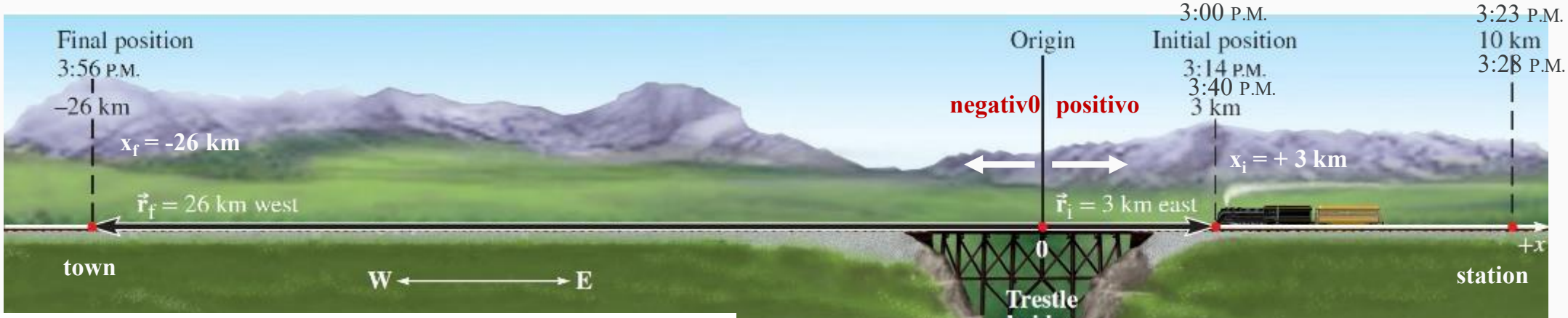
$$55\frac{km/h}{s}\ \frac{m/s}{3.6\ km/h} = 15{,}43\ m/s^2$$

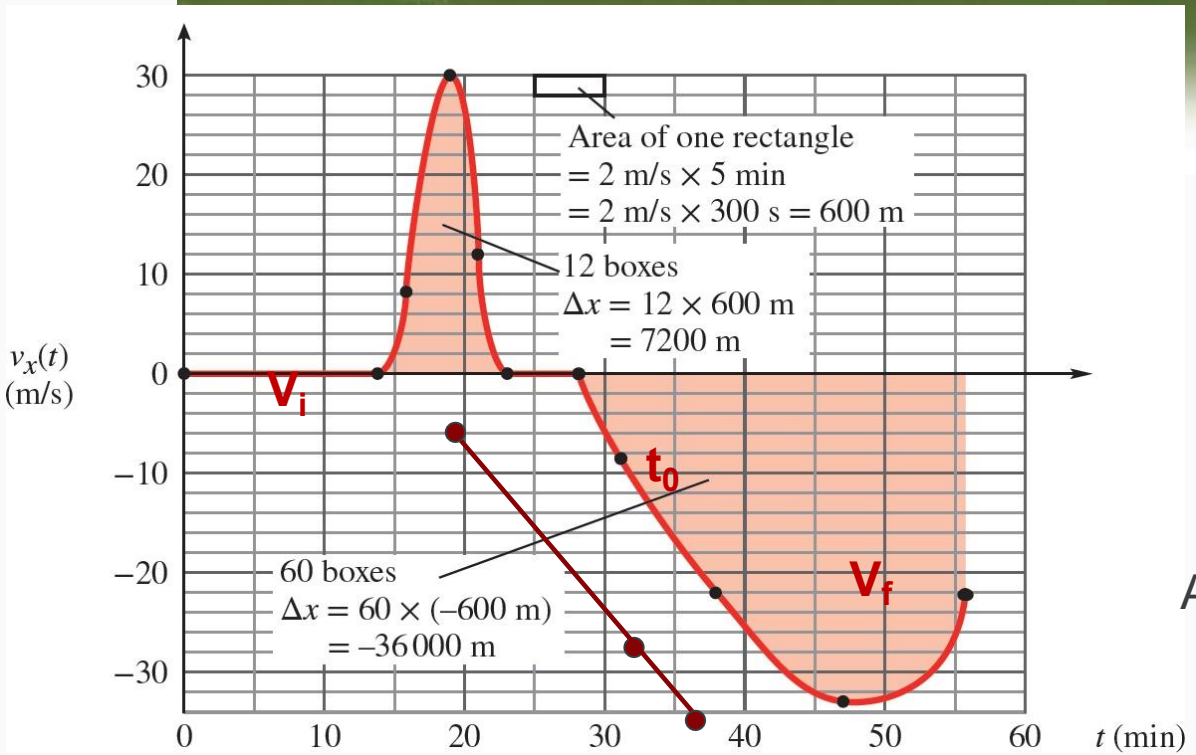


Sapendo che l'accelerazione di gravità è g=9.81m/s^2, esprimere l'accelerazione trovata in unità di g

$$\frac{15.43}{9.81} = 1.57\ volte$$

Accelerazione istantanea

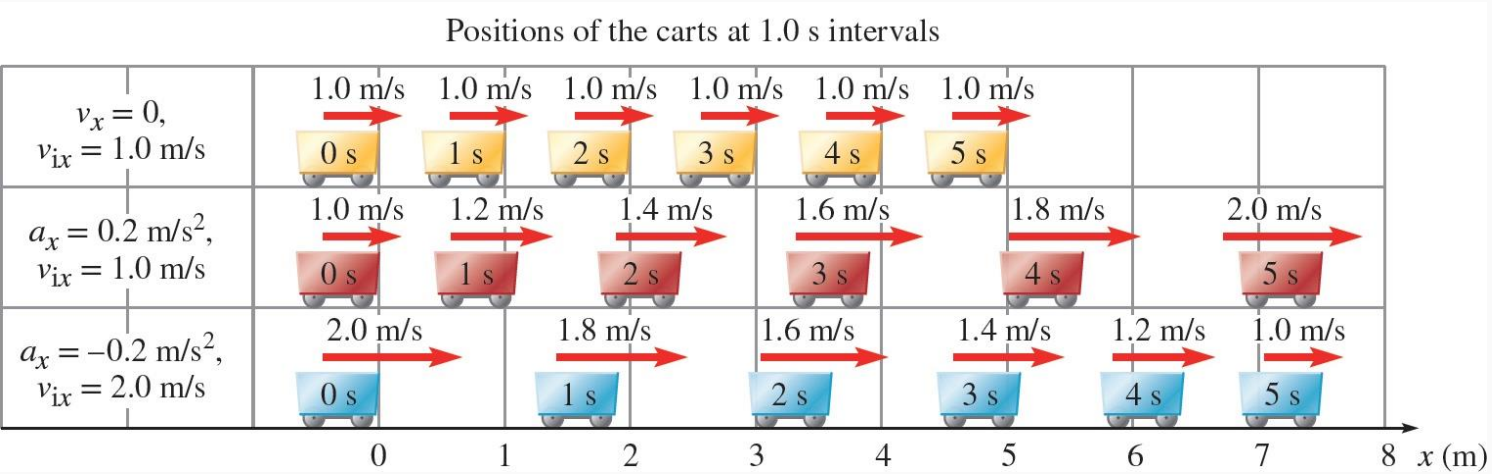




Rapidità a cui cambia la velocità

Accelerazione media $$a_{av,x} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Accelerazione istantanea $$a_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta v}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\bigg|_{t_0}$$



Accelerazione costante

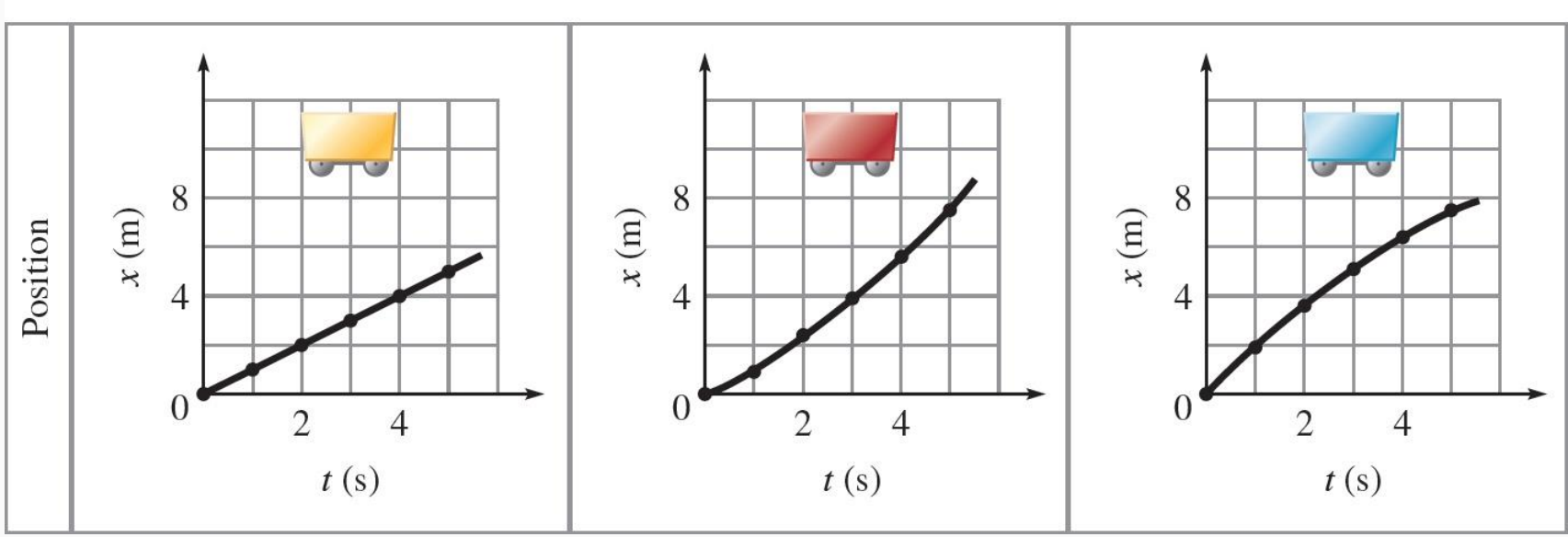
Velocità istantanea

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta x}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\bigg|_{t_0}$$

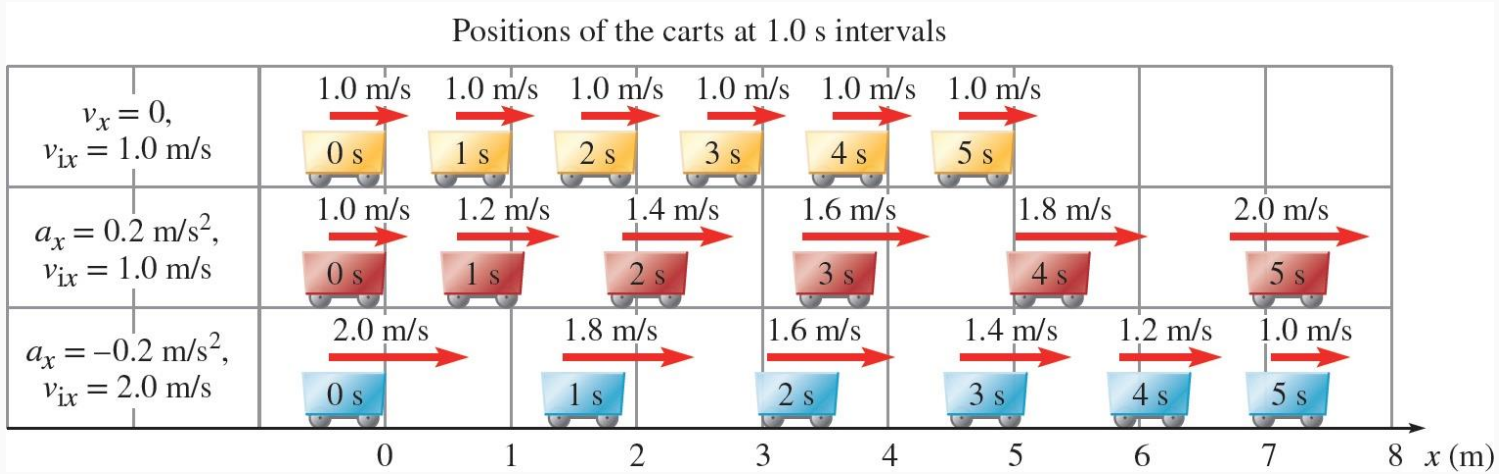
Posizione

Distanza percorsa

$$\Delta x = v_0 \Delta t$$



Diagrammi orari e grafici



Accelerazione costante

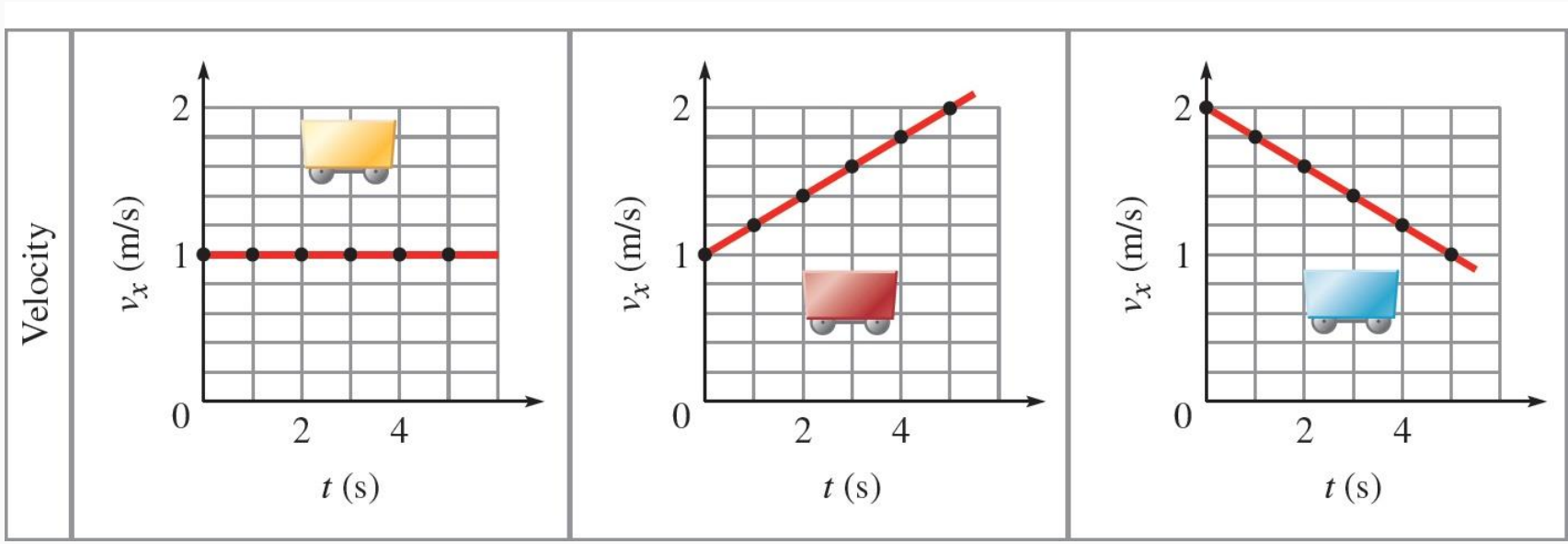
Accelerazione istantanea

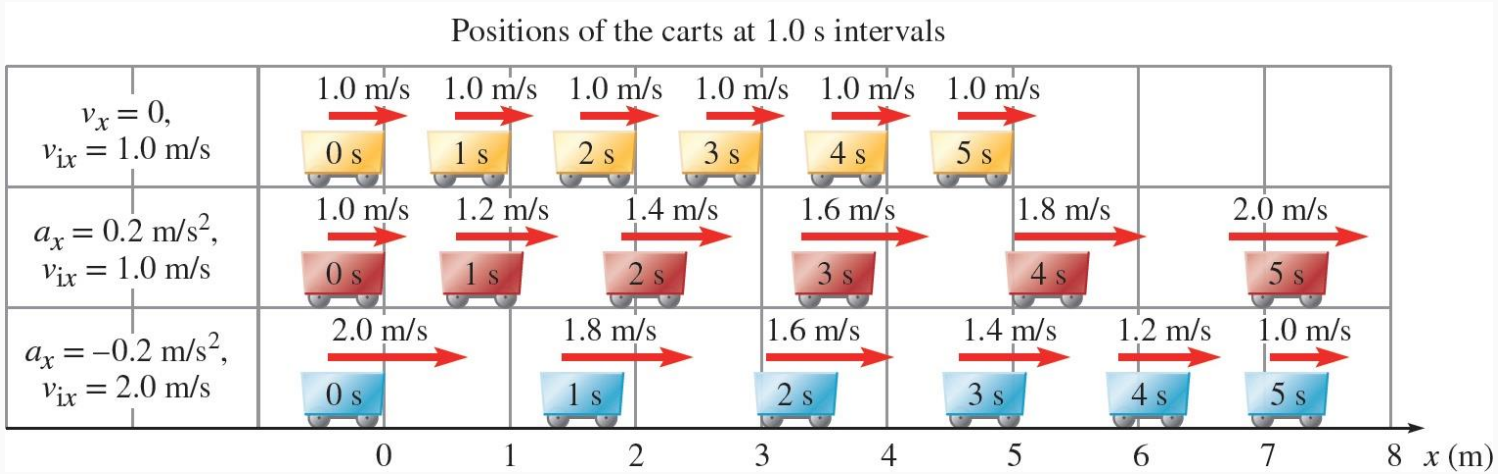
$$a_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta v}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\bigg|_{t_0}$$

Velocità

Distanza percorsa

$$\Delta x = v_0 \Delta t$$



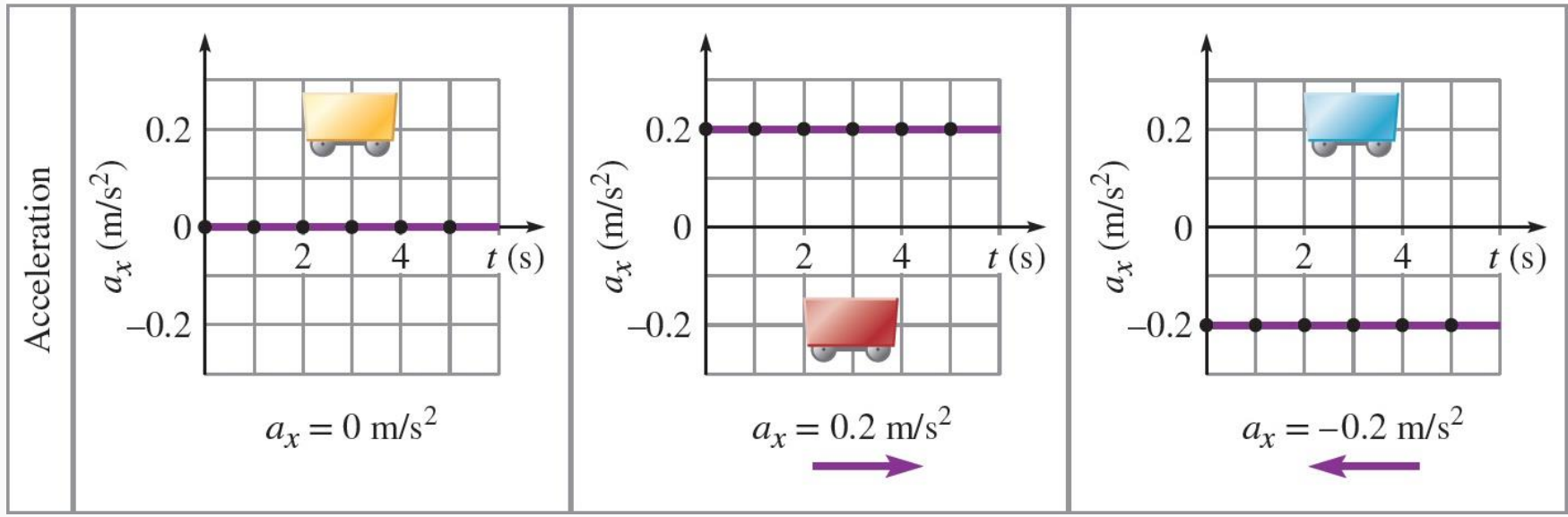


Accelerazione costante

Accelerazione

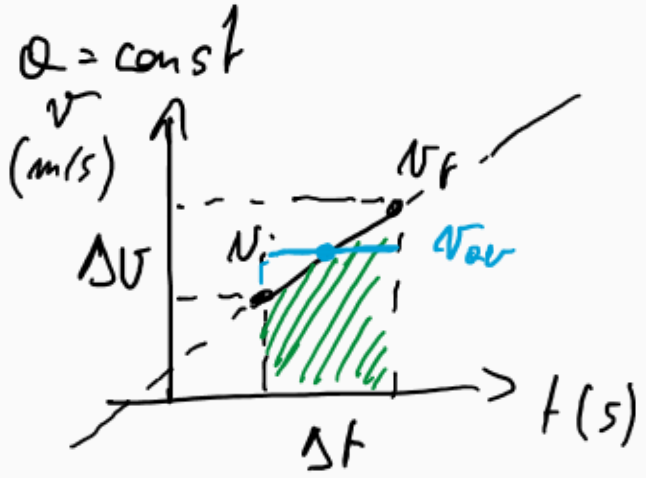
Variazione della velocità

$$\Delta v = a_0 \Delta t$$



Moto uniformemente accelerato

Due relazioni essenziali tra posizione, velocità e accelerazione ci permettono di trovare la posizione di un oggetto che si muove lungo una linea con accelerazione costante (se a è costante durante l'intero intervallo di tempo).



$$\Delta v = v_f - v_i = a\Delta t \longleftarrow$$ La velocità aumenta linearmente

$$\Delta x = x_f - x_i = v_{av,x}\Delta t = \frac{1}{2}(v_f + v_i)\Delta t \longleftarrow$$ *Solo perché costante*

$$\Delta x = v_i\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x$$

a è **costante**

Legge oraria

If $t_i = 0$ ➔ $\Delta t = t - ti = t$, if $\Delta x = x - x_i$

the motion equation becomes $x = x_i + v_i t + \frac{1}{2}a(t)^2$

Initial conditions ↗ ↖ physics

Moto rettilineo uniforme ($v = cost$)

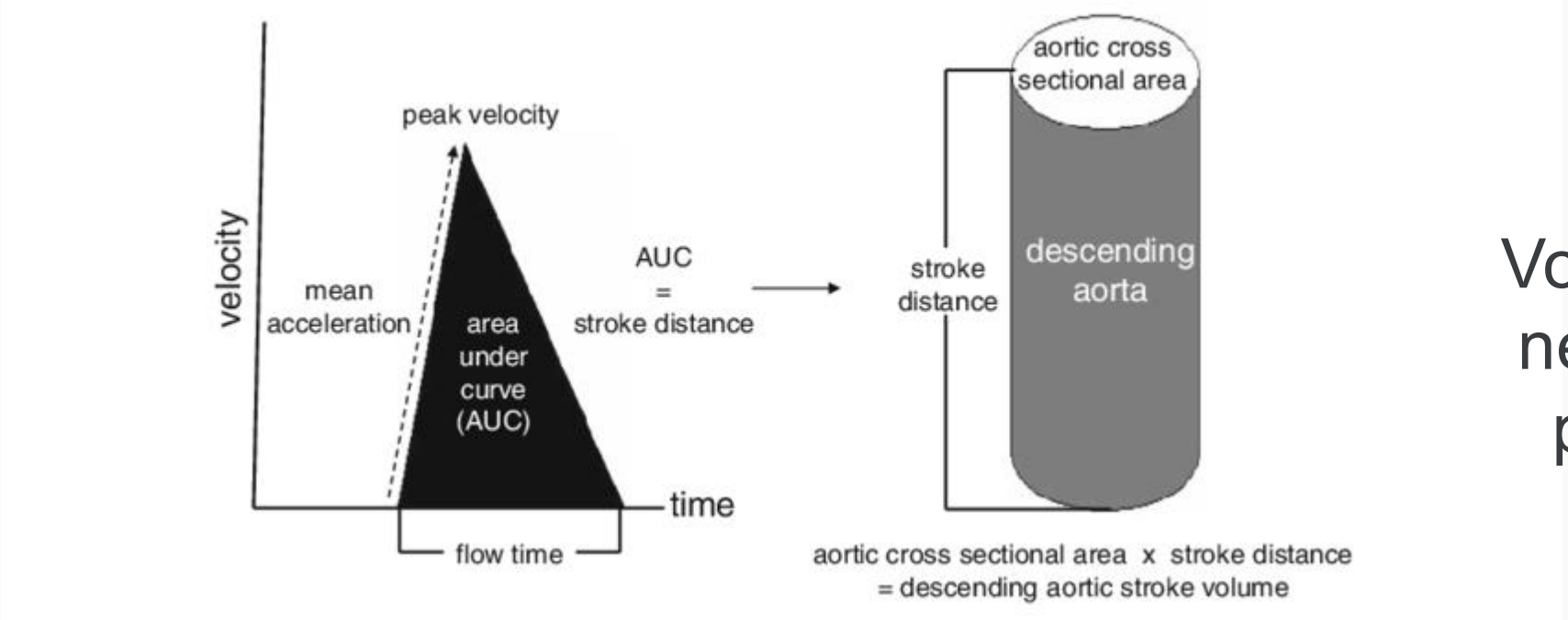
Legge oraria	$x(t) = x_0 + v\,t$
Velocità	$v = cost$
Accelerazione	$a = 0$

Moto rettilineo uniformemente accelerato ($a = cost$)

Legge oraria:	$x(t) = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}at^2$
Velocità	$v(t) = v_0 + at$
	$v^2(x) = v_0^2 + 2a(x - x_0)$
Accelerazione	$a = cost$

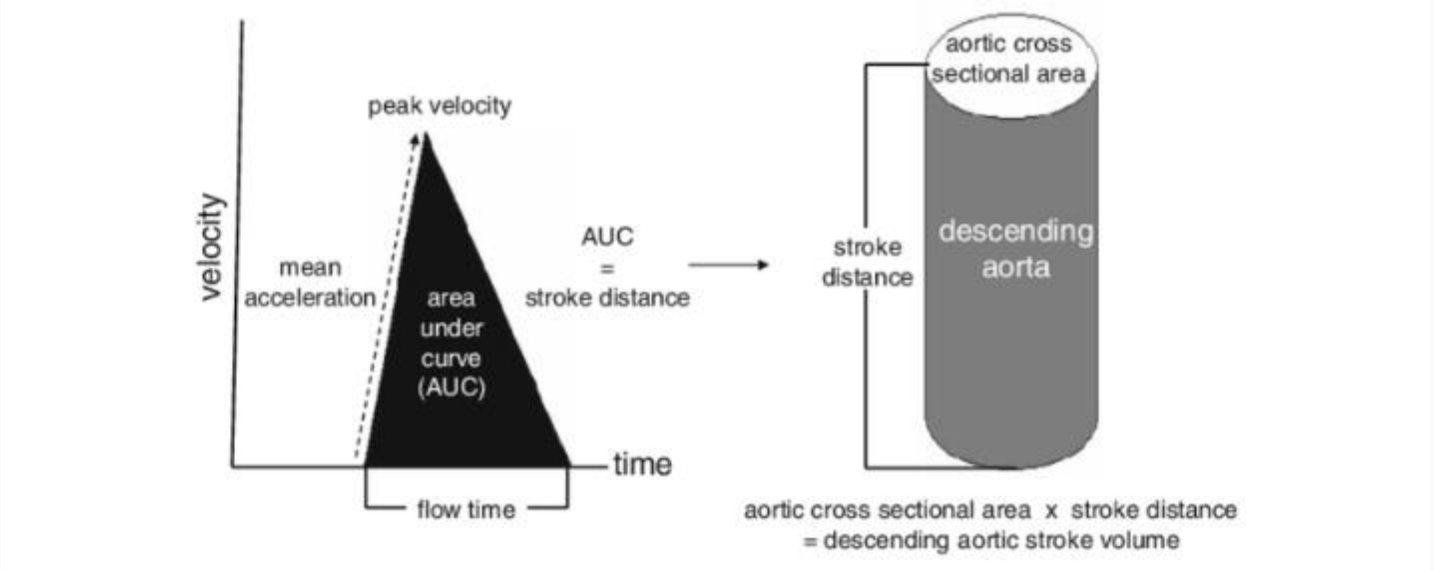
Si noti che primo è caso particolare del secondo

La massima accelerazione del sangue nell'aorta può essere utilizzata per testare la funzione ventricolare. Il periodo durante il quale si verifica la massima accelerazione del sangue nell'aorta è durante la prima parte dell'azione di pompaggio del ventricolo sinistro.
Durante questo periodo l'accelerazione è essenzialmente costante.
L'ecocardiografia Doppler utilizza gli ultrasuoni per misurare la velocità del sangue nell'aorta.



Volume spinto nell'aorta per pulsazione





I risultati per un paziente mostrano che l'aorta sanguigna inizia a una velocità di 0.10 m/s e subisce un'accelerazione costante per 30 ms, raggiungendo una velocità di picco di 1.30 m/s.

Qual è l'accelerazione?

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1.30\ m/s - 0.10\ m/s}{0.030\ s} = 40.00\ m/s^2$$

Quanto lontano viaggia il sangue?

$$\Delta x = v_{av}\Delta t = \frac{1}{2}\left(v_f + v_i\right)\Delta t$$

$$= \frac{1}{2}(1.30\ m/s + 0.10\ m/s) \times 0.030\ s = 0.021\ m$$



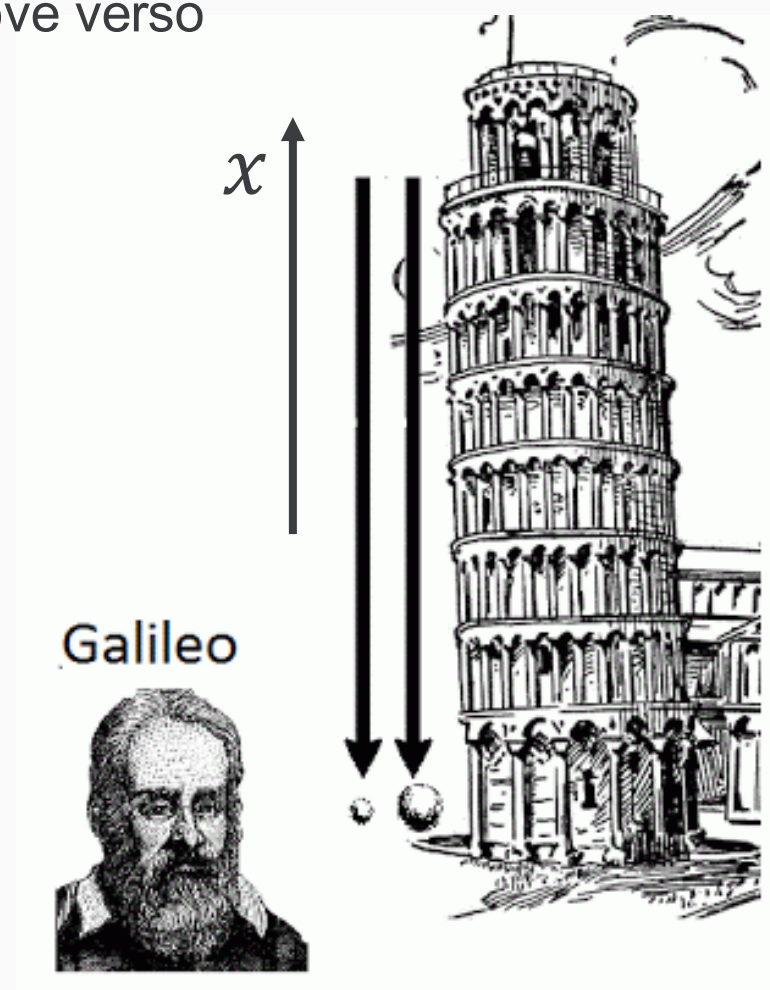


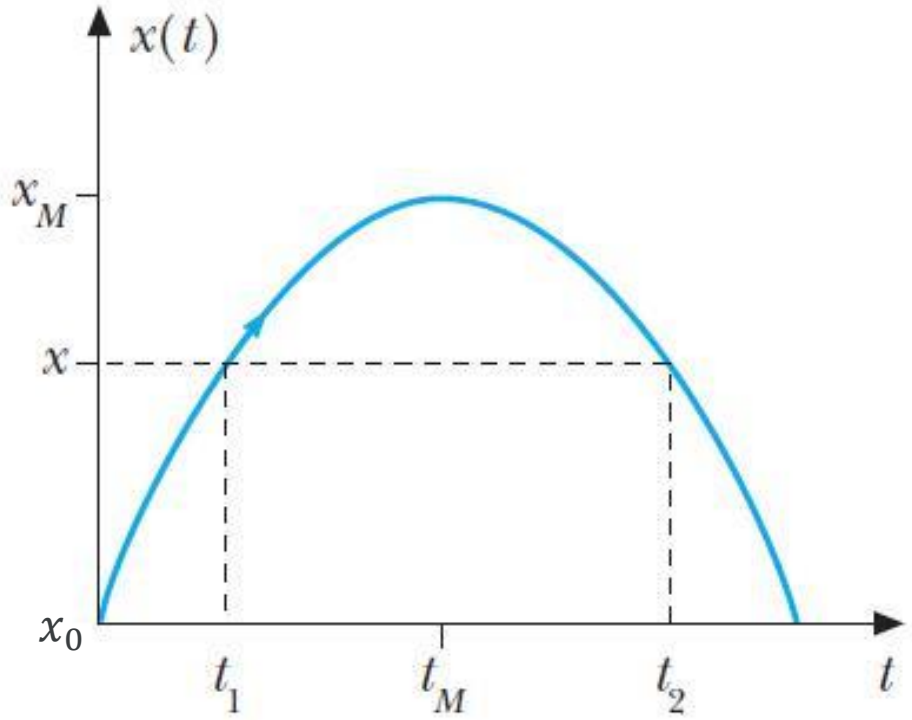
Moto verticale di un corpo

Un corpo lasciato cadere in vicinanza della superficie Terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante di $g = 9.81\ m/s^2$

Moto rettilineo uniformemente accelerato ($-g = cost$)

Legge oraria:	$x(t) = x_0 + v_0\, t - \frac{1}{2} g t^2$
Velocità	$v(t) = v_0 - gt$
	$v^2(x) = v_0^2 - 2g(x - x_0)$
Accelerazione	$\mathrm{a} = -g = cost$





Quando arriva al punto massimo t_M ?

$$v(t_M) = 0 = v_0 - gt_M$$

$$t_M[s] = \frac{v_0[m/s]}{g[m/s^2]}$$

Qual è l'altezza massima x_M ?

$$v^2(x_M) = 0 = v_0^2 - 2g(x_M - x_0)$$

$$x_M = x_0 + v_0^2/2g$$

Quando ripassa per x_0 ?

$$x_0 = x_0 + v_0 t_c - \frac{1}{2} g {t_c}^2 \qquad {t_c}^2 - \frac{2v_0}{g} t_c = 0$$

$$t_{c1} = 0 \qquad t_{c2} = \frac{2v_0}{g} = 2t_M$$

Un punto materiale viene lasciato cadere all'istante $t = 0$ con velocità iniziale nulla. Un secondo punto materiale viene lanciato verso il basso all'istante $t = t_0 > 0$, con velocità iniziale v_0. Riuscirà a raggiungere il primo punto?



Le leggi orarie dei moti sono $x_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ $x_2(t) = -v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$

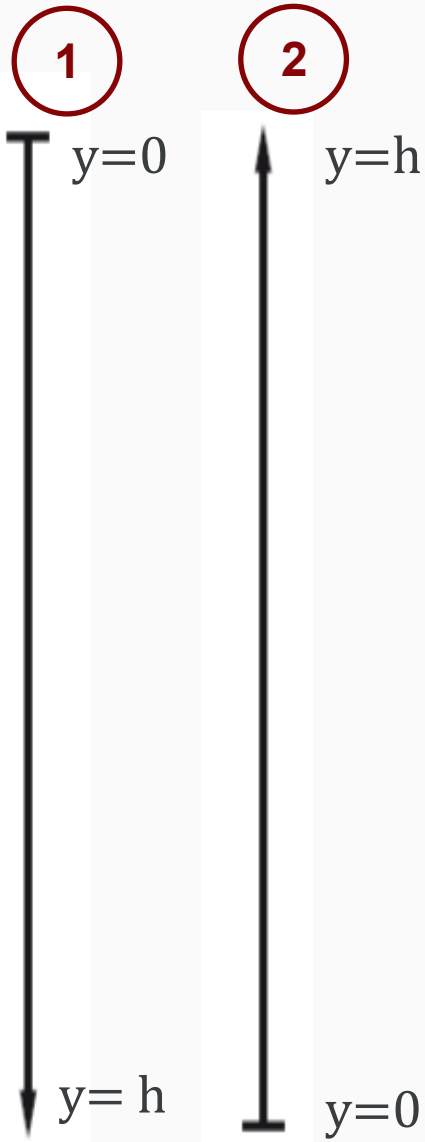
$$\boldsymbol{x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t})}$$

$$-\tfrac{1}{2}g\bar{t}^2 = -v_0(\bar{t} - t_0) - \tfrac{1}{2}g(\bar{t} - t_0)^2 = -v_0\bar{t} + v_0t_0 - \tfrac{1}{2}g\bar{t}^2 - \tfrac{1}{2}gt_0{}^2 + g\bar{t}t_0$$

$$2(v_0 - gt_0)\bar{t} = 2v_0t_0 - gt_0{}^2 = (2v_0 - gt_0)t_0$$

$$\boldsymbol{\bar{t} = \frac{t_0}{2}\frac{(2v_0 - gt_0)}{(v_0 - gt_0)}} \qquad \boldsymbol{\exists\, t_0 < \bar{t}} \quad \boldsymbol{v_0 > gt_0}$$

Esercizio tuffo



Mi tuffo da una scogliera da fermo da una altezza h di 12 metri.

- A che velocità impatto sul mare?
- Quanto tempo all'impatto?

Risolvere nei 2 sistemi di riferimento

1 $$y(t) = h = \frac{1}{2} g(t)^2$$

2 $$y(t) = 0 = h - \frac{1}{2} g(t)^2$$

$$\boldsymbol{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 f$$

$$f(0) = A$$
$$f'(0) = B$$

$$f(t) = A\cos\omega t + \frac{B}{\omega}\sin\omega t$$
$$f'(t) = -A\omega\sin\omega t + B\cos\omega t$$
$$f''(t) = -A\omega^2\cos\omega t - \omega B\sin\omega t = -\omega^2 f(t)$$

Formule di addizione e sottrazione	
$\sin(\alpha+\beta)$	$\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha-\beta)$	$\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$$A = C\sin\varphi$$
$$\frac{B}{\omega} = C\cos\varphi$$

$$\boldsymbol{f(t)} = A\cos\omega t + \frac{B}{\omega}\sin\omega t = C\sin\varphi\cos\omega t + C\cos\varphi\sin\omega t = \boldsymbol{C\,sin(\omega t+\varphi)}$$

ω è la **pulsazione**

Se T è il periodo allora

$$2\pi = \omega \cdot T \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad rad\ s^{-1}$$

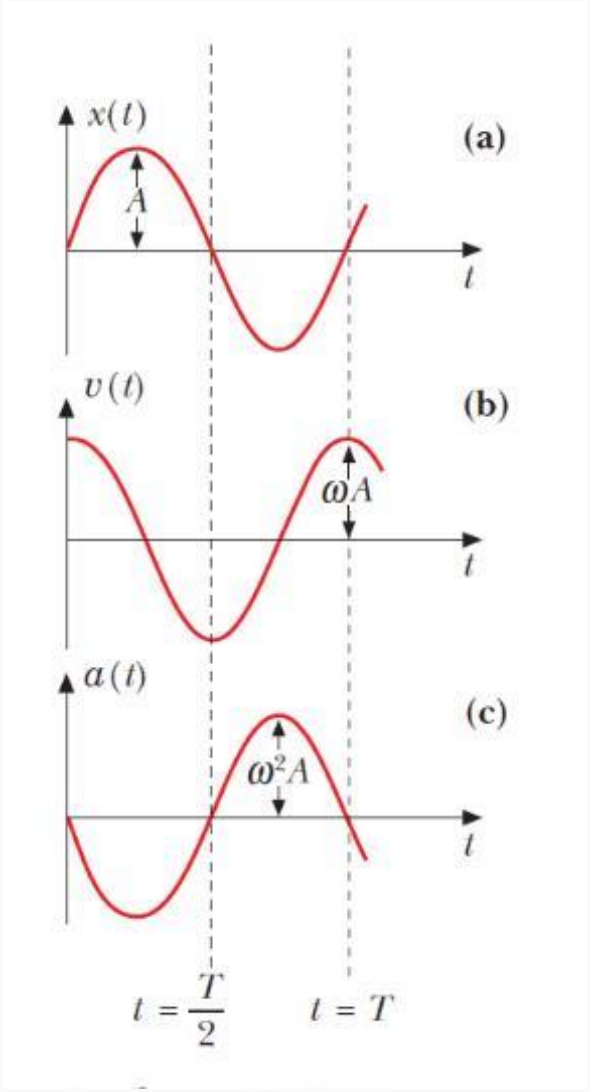
ν è la **frequenza**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$ Hz, hertz, s^{-1}

$$\boldsymbol{x(t) = A\,sin(\omega t + \varphi)}$$

$$\boldsymbol{v(t) = \omega A\,cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\boldsymbol{a(t) = -\omega^2 A\,sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)}$$



Accelerazione in funzione della posizione

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad a\,dx = v\,dv \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} a(x)dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}{v_0}^2$$

Moto uniformemente accelerato

$$\boldsymbol{v^2(x) = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Moto armónico semplice

$$a(x) = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} a(x)dx = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x dx = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

Se $x_0 = 0$ e $v_0 = \omega A$ $\qquad \boldsymbol{v^2(x) = \omega^2\left(A^2 - x^2\right)}$

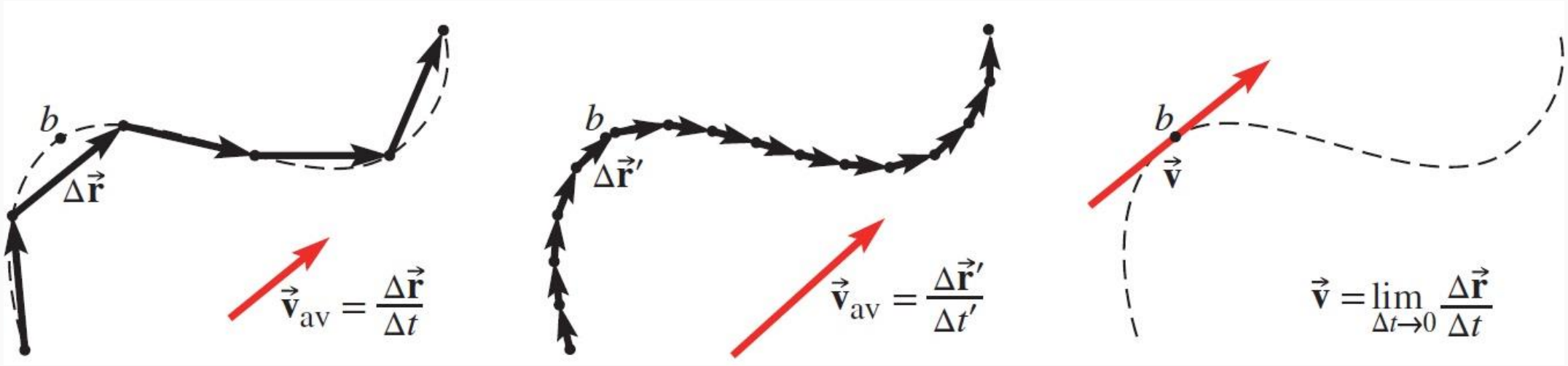
Velocità in più dimensioni

Spostamento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ y(t+\Delta t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

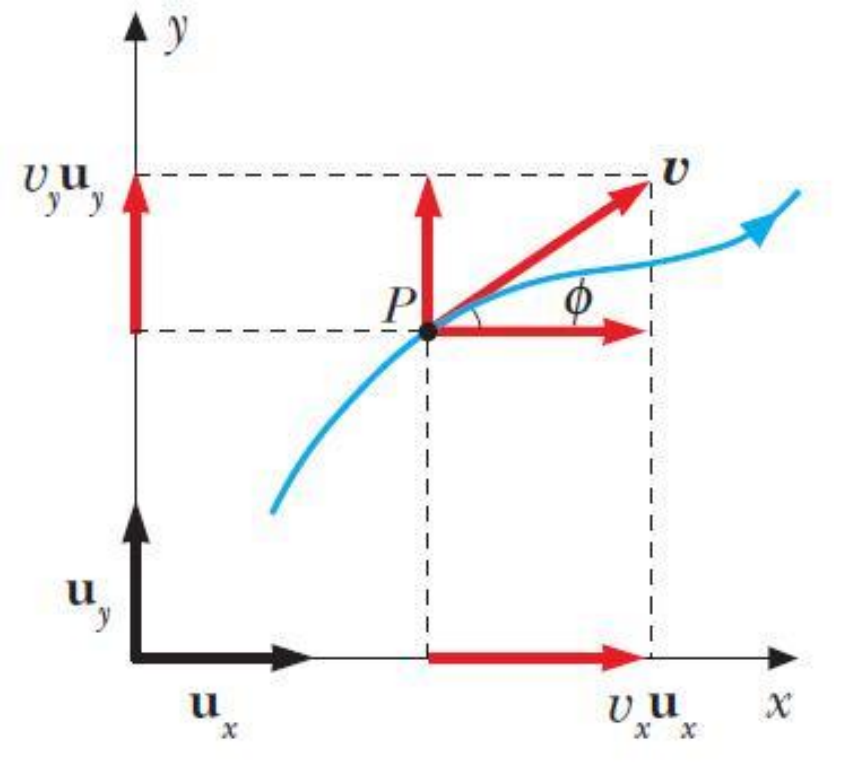
Velocità istantanea

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \qquad v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{and} \quad v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$



Decreasing Δt

Velocità istantanea in più dimensioni



$$d\vec{r} = dr\,\hat{u}_T = dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y + dz\,\hat{u}_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\,\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\,\hat{u}_z = v_x\,\hat{u}_x + v_y\,\hat{u}_y + v_z\,\hat{u}_z$$



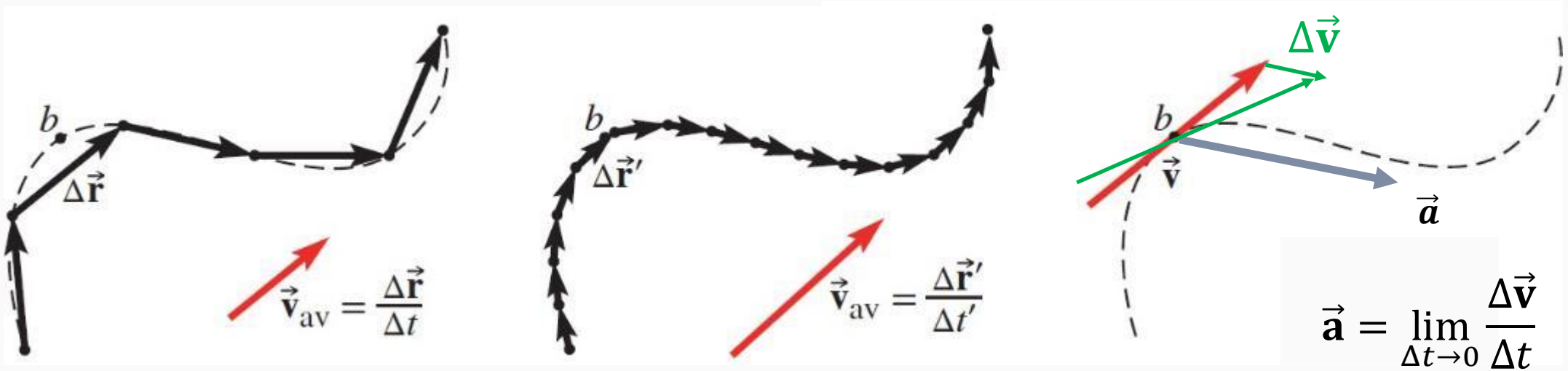
Accelerazione

Il vettore di accelerazione è parallelo alla variazione istantanea di velocità ed è diretto sempre verso la concavità della curva di traiettoria

Una variazione di direzione e non di grandezza della velocità dà un'accelerazione (moto circolare uniforme)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{u}_z$$

$$= a_x\,\hat{u}_x + a_y\,\hat{u}_y + a_z\,\hat{u}_z$$



$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \leftrightarrow \quad v_x = \frac{dx}{dt}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}; \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

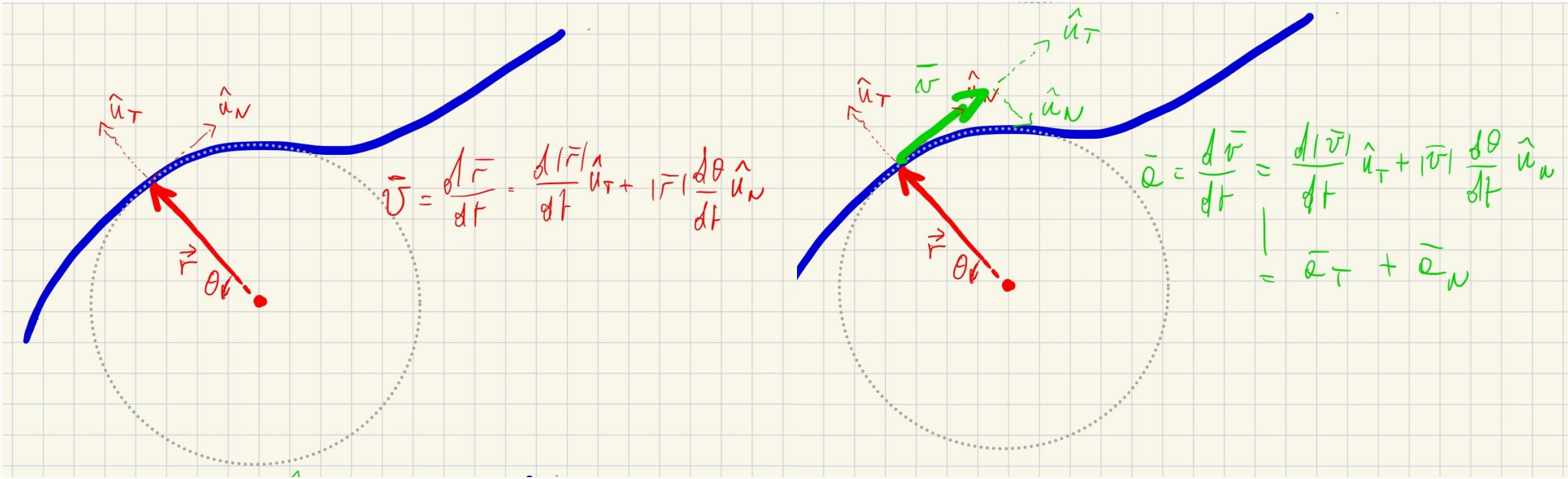
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)dt \quad \leftrightarrow \quad x = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)dt; \qquad y = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t)dt; \qquad z = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(t)dt$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad \leftrightarrow \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}; \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}; \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(t)dt \quad \leftrightarrow \quad v_x = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t)dt; \qquad v_y = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(t)dt; \qquad v_z = v_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_z(t)dt$$

velocità

accelerazione

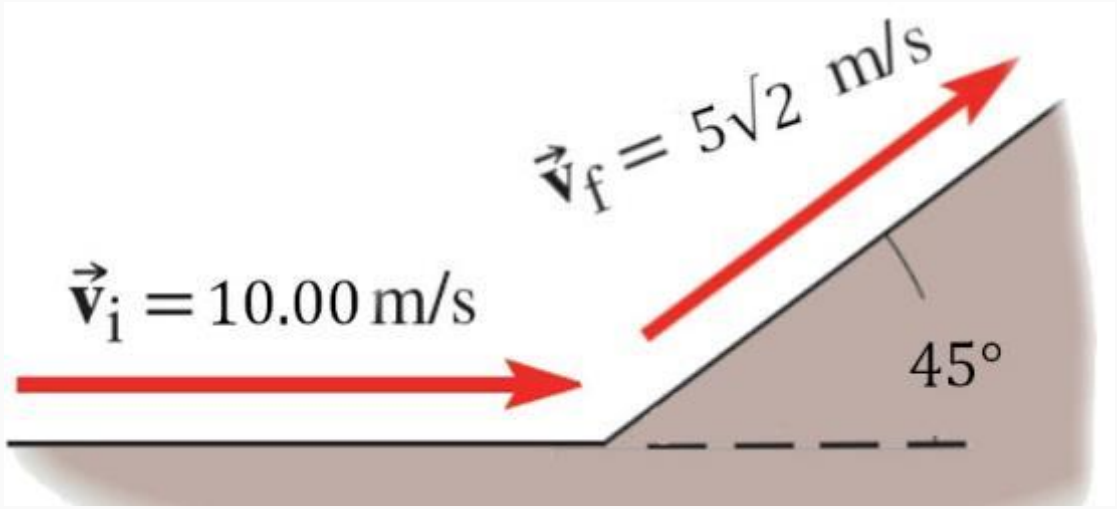


Example 3.5

Un pattinatore in linea sta viaggiando su una strada pianeggiante con una velocità di 10,00 m/s; 100.0 s dopo sta scalando una collina con un angolo di inclinazione di 45.0° ad una velocità di 5√2 m/s.



1. Qual è il cambiamento nella sua velocità?
2. Qual è la sua accelerazione media durante l'intervallo di tempo di 100.0 s?

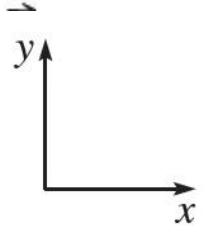




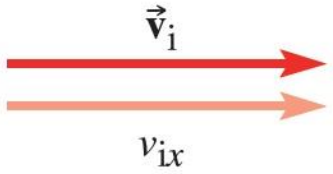
Example 3.5

La variazione di velocità non è di 1,79 m/s (=8,94 m/s−7,15 m/s). Questo è il cambiamento di velocità.

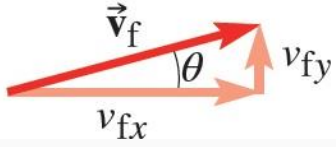
La variazione di velocità si trova sottraendo il vettore di velocità iniziale dal vettore di velocità finale.



$$\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{f} - \vec{\mathbf{v}}_\mathrm{i}$$



$$v_{iy} = 0 \quad \text{and} \quad v_{ix} = v_\mathrm{i} = 10.00\ \mathrm{m/s}$$

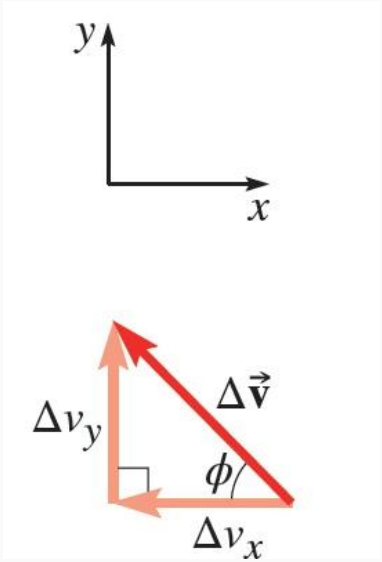


$$v_{fx} = v_\mathrm{f} \cos\theta = 5\sqrt{2}\ \mathrm{m/s} \times 1/\sqrt{2} = 5.00\ \mathrm{m/s}$$
$$v_{fy} = v_\mathrm{f} \sin\theta = 5\sqrt{2}\ \mathrm{m/s} \times 1/\sqrt{2} = 5.00\ \mathrm{m/s}$$



$$\Delta v_x = v_{fx} - v_{ix} = (5.00 - 10.00)\ \mathrm{m/s} = -5.00\ \mathrm{m/s}$$
$$\Delta v_y = v_{fy} - v_{iy} = (5.00 - 0)\ \mathrm{m/s} = +5.00\ \mathrm{m/s}$$

Example 3.5



$$(|\Delta\vec{\mathbf{v}}|)^2 = (\Delta v_x)^2 + (\Delta v_y)^2$$
$$= (-5.00\ \text{m/s})^2 + (5.00\ \text{m/s})^2$$
$$= 50.00\ (\text{m/s})^2$$
$$|\Delta\vec{\mathbf{v}}| = 5\sqrt{2}\ \text{m/s}$$

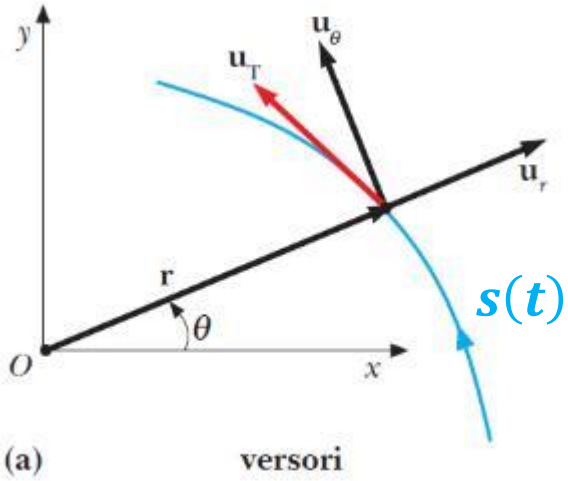
$$\tan\phi = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}} = \left|\frac{\Delta v_y}{\Delta v_x}\right| = \frac{5.00\ \text{m/s}}{5.00\ \text{m/s}} = 1.00$$

$$\phi = (\tan 1.00)^{-1} = 45.0°$$

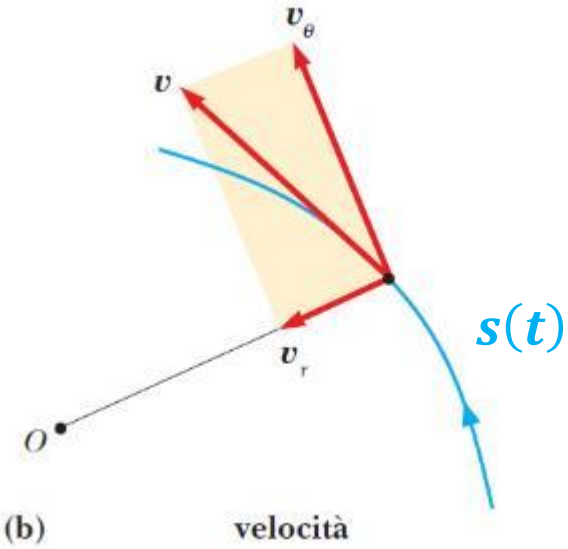
La direzione dell'accelerazione media è la stessa della direzione di v: 45.0 sopra l'asse x negativo.

$$|\vec{\mathbf{a}}_{\text{av}}| = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2}}{\Delta t} = \frac{5\sqrt{2}\ \text{m/s}}{100.0\ \text{s}} = 0.0229\ \text{m/s}^2$$

E in coordinate polari?



(a) versori



(b) velocità

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta \iff r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\hat{u}_r + r\frac{d\,\hat{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

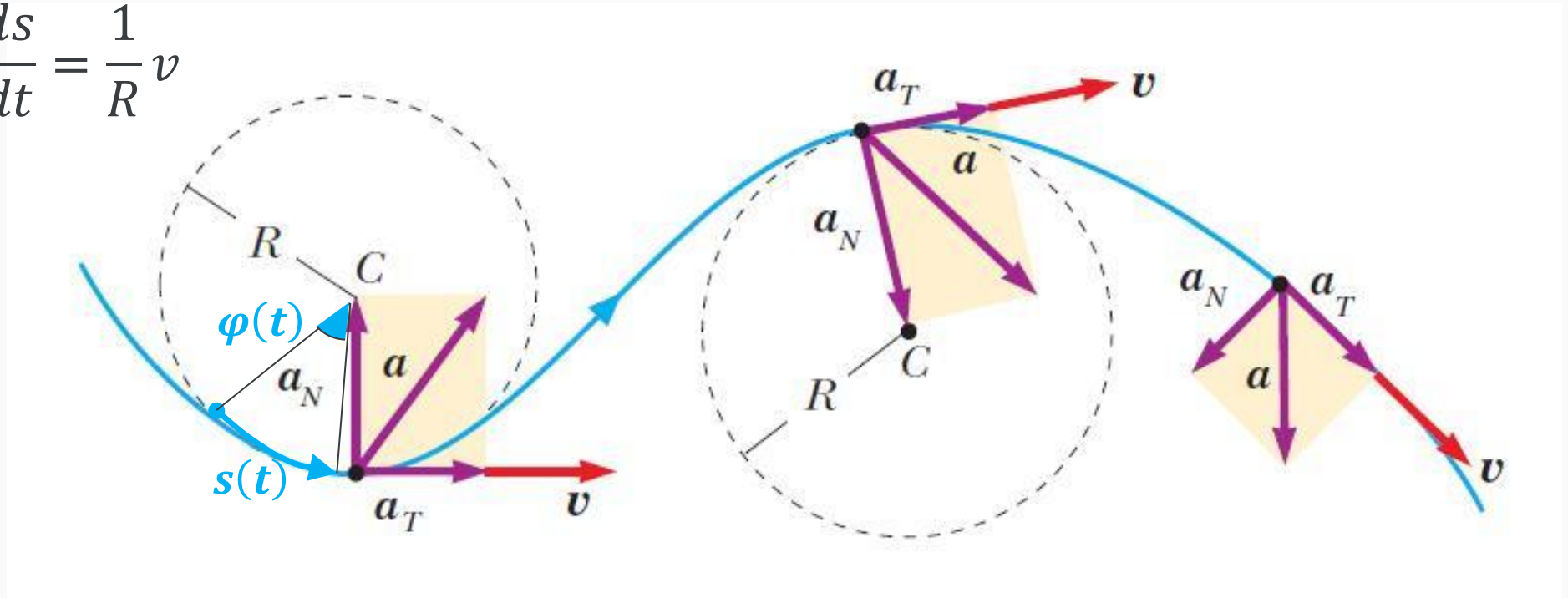
$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\hat{u}_T = v\,\hat{u}_T$$

La velocità è sempre tangente alla traiettoria, ma può essere scomposta lungo il vettore lungo il raggio di curvature ed ortogonale ad esso.

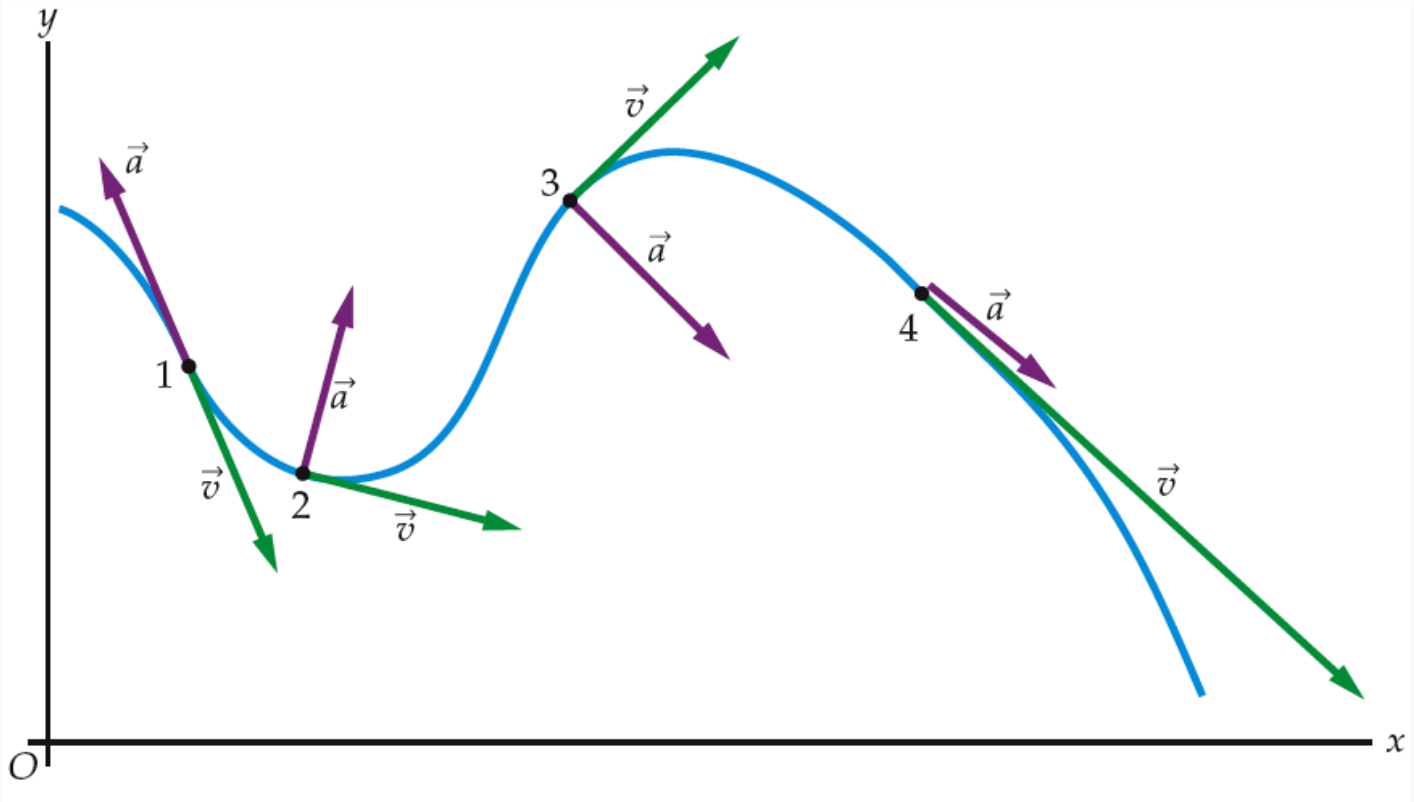
$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

E l'accelerazione in coordinate polari?

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$$



$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\,\hat{u}_T) = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + v\frac{d\,\hat{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + v\frac{d\varphi}{dt}\,\hat{u}_N = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

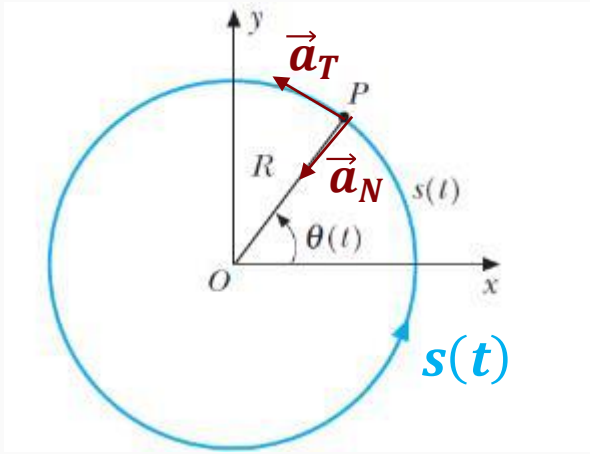


Il vettore velocità punta sempre nella direzione del moto.
Il vettore accelerazione può puntare in qualsiasi direzione.

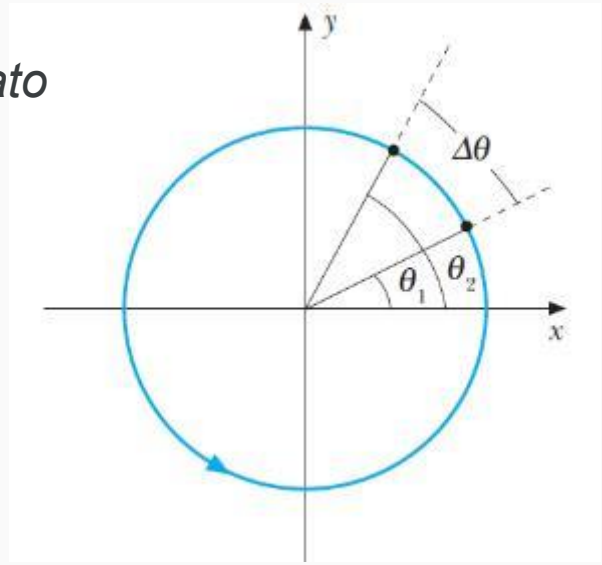
Moto circolare – $R = costante$

In un moto circolare la velocità anche se in modulo costante **cambia continuamente direzione**.

Il moto è quindi accelerato e ha una accelerazione diversa da zero diretta verso il centro della circonferenza, detta **accelerazione centripeta $\vec{a}_N$**.



Se $v = costante$ allora il moto si dice *moto circolare uniforme*
Se $a_T = costante$ allora il moto si dice *moto circolare uniformemente accelerato*



Positivo senso antiorario

La traiettoria $s(t)$ è descritta dall'angolo $\theta(t)$ ➡ $\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$

Spostamento angolare e velocità

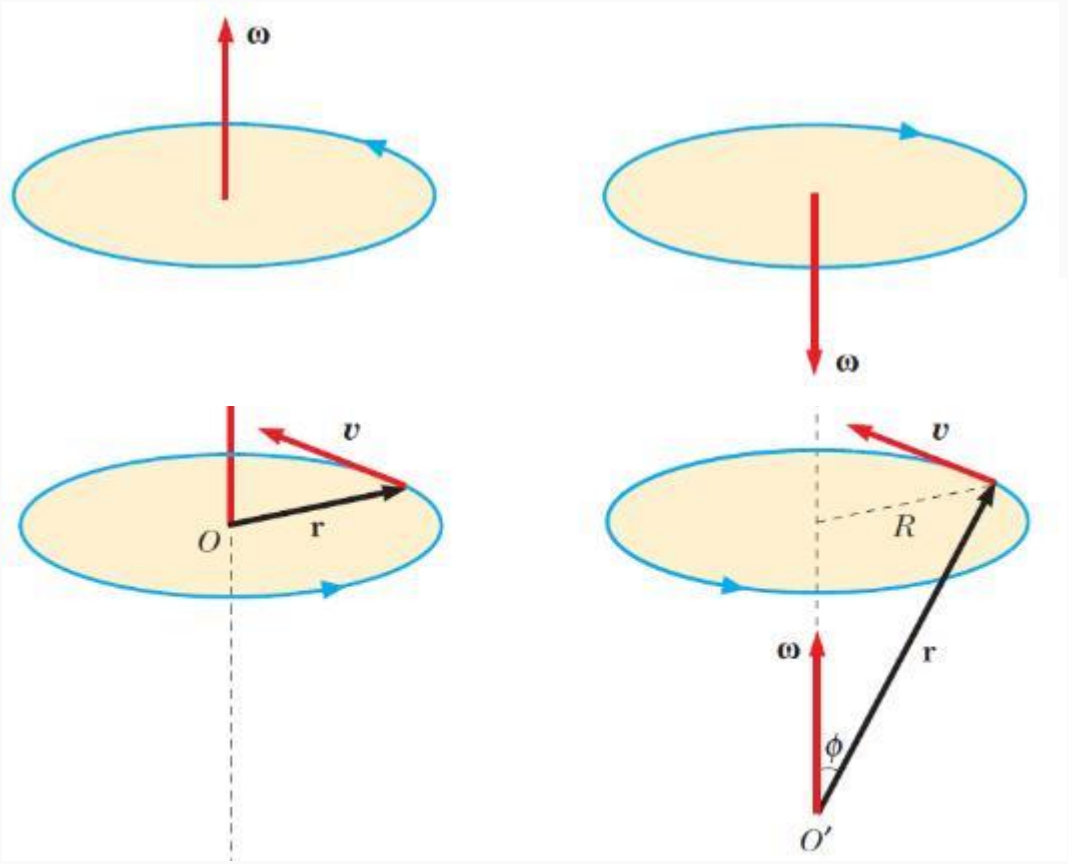
Definizione di **spostamento angolare**: $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \ \ rad$

Definizione di **velocità angolare istantanea**:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \ \ \frac{rad}{s} = 2\pi f$$

Velocità lineare vs velocità angolare

Per un punto che si muove in una traiettoria circolare di raggio R, la distanza lineare percorsa lungo la traiettoria circolare durante uno spostamento angolare di $\Delta\theta$ (in radianti) è la lunghezza dell'arco $s = R\,\Delta\theta$



$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt} = \mathrm{R}\omega$$

Espressione vettoriale

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Se $v = costante$ → *moto circolare uniforme*

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

$$s(t) = s_0 + vt$$

Se $a_T = costante$ → *moto circolare uniformemente accelerato*

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = R\frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$v(t) = v_0 + a_T t$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_T t^2$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \rightarrow \alpha d\theta = \omega d\omega$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2$$

Esercizio – accelerazione non costante

Descrivere il moto circolare in cui $\alpha = -k\omega$, con la costante k positiva.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -k\omega \rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -kdt \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \omega_0 e^{-kt}$$

Moto smorzato esponenzialmente

Se l'angolo iniziale θ_0 è nullo, quale è l'angolo di arresto?

$$\theta(\infty) = \int_0^\infty \omega(t)dt = -\frac{\omega_0}{k} e^{-kt}\Big|_0^\infty = \frac{\omega_0}{k}$$

Esercizio – moto circolare armonico

Descrivere il moto circolare in cui $\alpha = -\mathrm{k}^2\theta$.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} = -\mathrm{k}^2\theta \rightarrow \omega d\omega = -\mathrm{k}^2\theta d\theta$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}\omega^2\Big|_{\omega_0}^{\omega} = -\mathrm{k}^2\frac{1}{2}\theta^2\Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

per $\omega_0 = 0$

$$\omega^2 + \mathrm{k}^2\theta^2 = \mathrm{k}^2\theta_0^2$$

Ma allora

$$\theta = \theta_0 \ \sin(\mathrm{k}t + \varphi)$$

$$\omega = \mathrm{k}\theta_0 \cos(\mathrm{k}t + \varphi)$$

Notazione vettoriale

La velocità angolare è un vettore: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

→ Anche l'accelerazione è un vettore:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

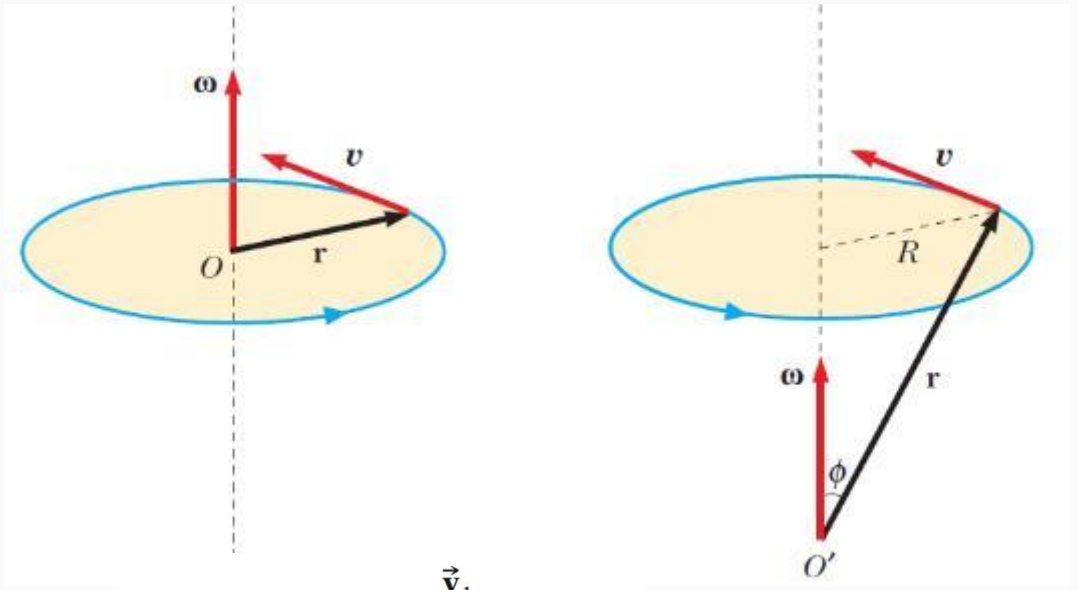
$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

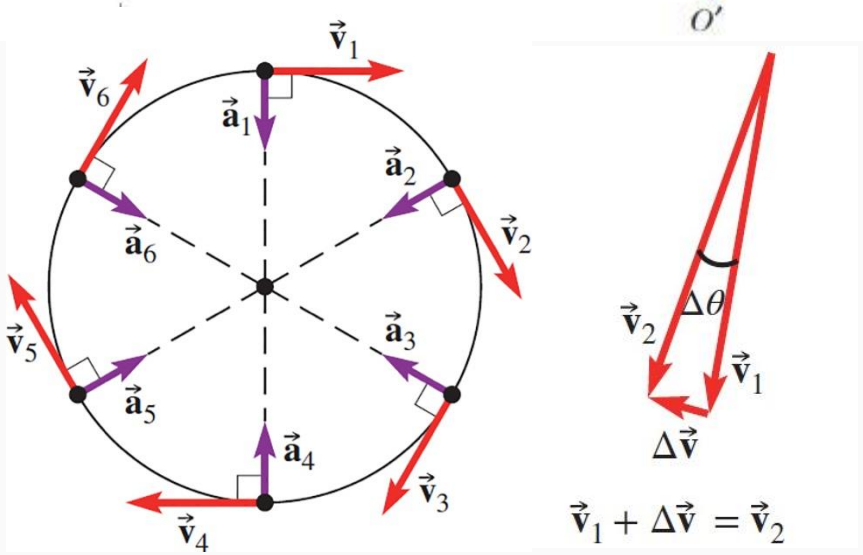
Accelerazione tangenziale o angolare

$$a_T = \alpha \mathrm{R}$$

Accelerazione centripeta

$$a_N = \omega^2 R = v\omega$$

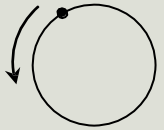
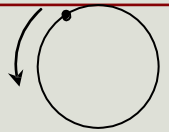
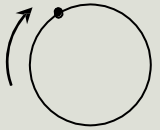
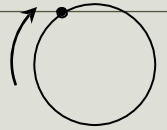




Esercizio

Una ruota panoramica alla fiera della contea locale può ruotare in entrambe le direzioni durante una corsa.

Completare la tabella seguente indicando il segno della velocità angolare e dell'accelerazione angolare agli istanti indicati.

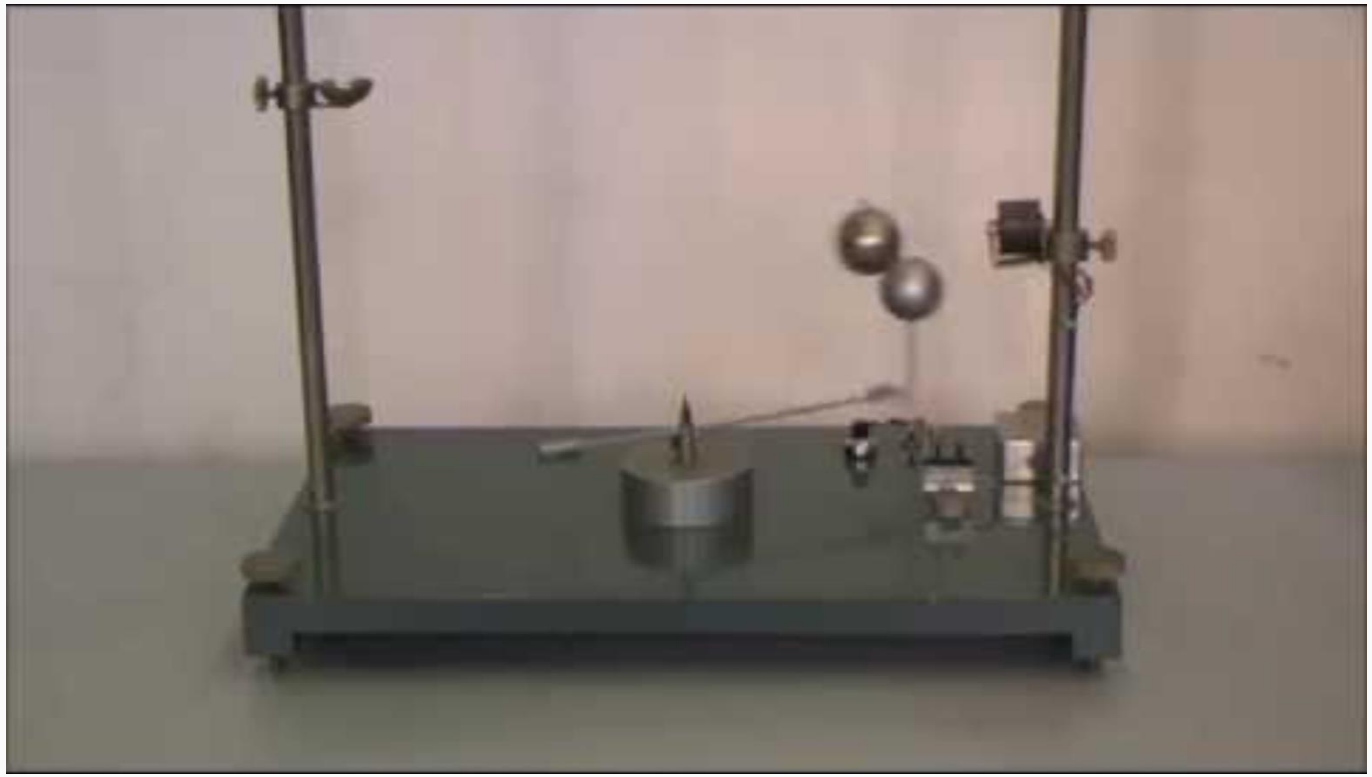
Situazione		Segno di ω	Segno di α
accelera			
rallenta			
si ferma per un istante, ruotava in senso antiorario			
accelera			
rallenta			

Se $v = costante$ → *moto circolare uniforme*

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$
$$s(t) = s_0 + vt$$

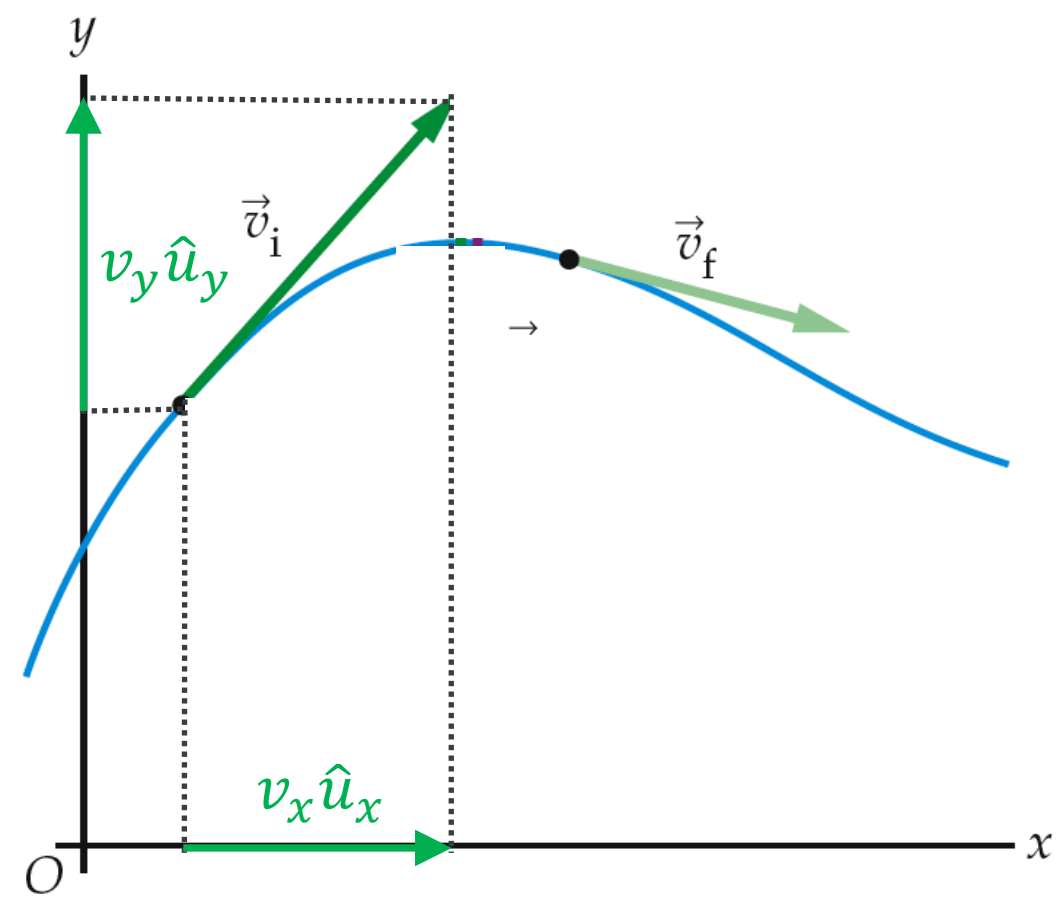
Proiettando sugli assi cartesiani

$$x(t) = \mathrm{R}\cos(\omega t + \theta_0)$$
$$\mathrm{y}(t) = \mathrm{R}\sin(\omega t + \theta_0)$$



Il moto circolare è la composizione di due moti armonici

La velocità è un vettore come tutti gli altri
→ Si può scomporre lungo gli assi.



Prendiamo il vettore velocita $\vec{v}$ applicato nel punto P.

Le sue componenti nel sistema di riferimento xOy, saranno v_x e v_y

Inoltre varranno le seguenti regole/notazioni:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y$$

$$\vec{v} = v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y$$

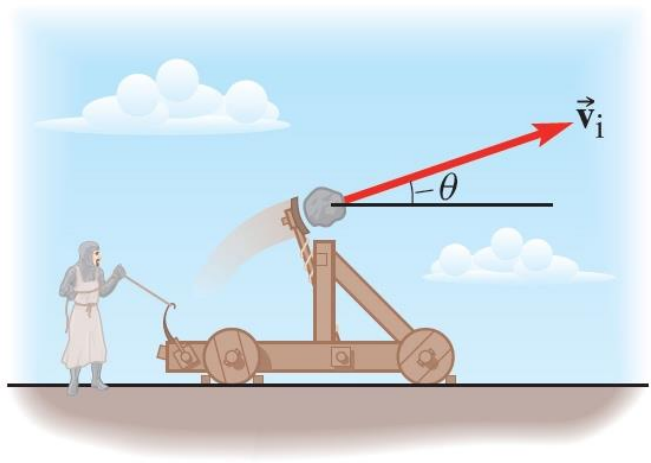
$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

SCOMPOSIZIONE DEL MOTO!!!

Il moto di un corpo si puo studiare (una volta scelto un opportuno sistema di riferimento) SCOMPONENDO IL MOVIMENTO sugli assi coordinati

La SCELTA DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO diventa fondamentale nella risoluzione dei problemi

Quale è la traiettoria?
Quale è la massima altezza raggiunta?
Quale è la massima gittata?

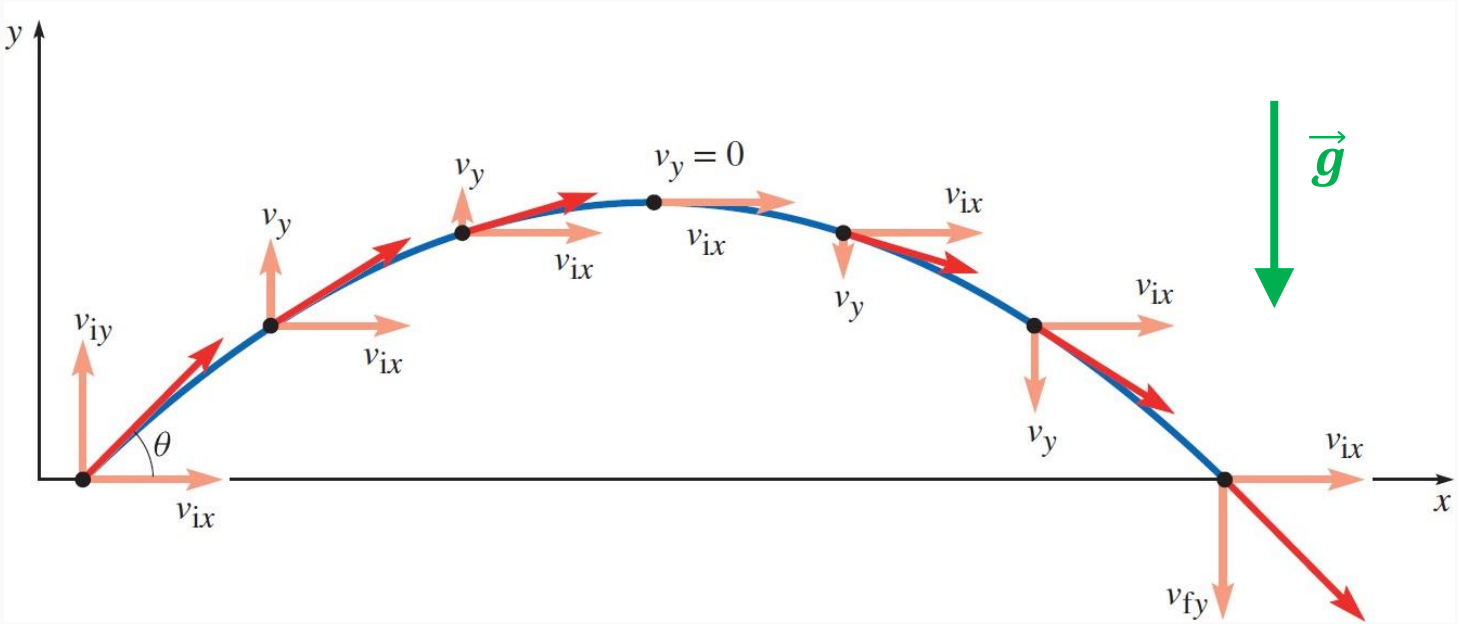


Accelerazione $\boldsymbol{a = -\vec{g} = -g\hat{u}_y}$ solo lungo $\hat{u}_y$

Velocità iniziale nel piano $\hat{u}_x\hat{u}_y$

$$v_{iy} = v_i \operatorname{sen}\theta$$
$$v_{ix} = v_i \cos\theta$$

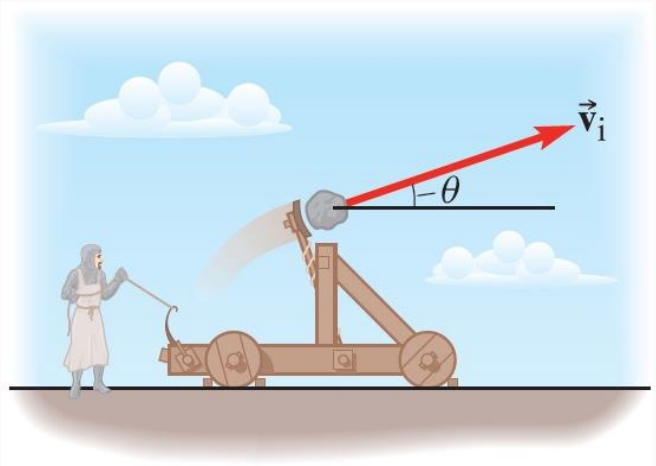
- Il moto è solo nel piano $\hat{u}_x\hat{u}_y$
- Nel piano $\hat{u}_x$ moto uniforme
- Nel piano $\hat{u}_y$ moto uniformemente accelerato



Moto del proiettile

Velocità

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt = \vec{v}_0 - gt\hat{u}_y$$
$$= (v_\mathrm{i} \cos\theta)\hat{u}_\mathrm{x} + (v_\mathrm{i} \sin\theta - gt)\hat{u}_y$$



Leggi orarie

$$x = v_\mathrm{i} t \cos\theta \qquad y = v_\mathrm{i} t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Traiettoria

Si trova esprimendo t tramite x

$$y = v_\mathrm{i} \left(\frac{x}{v_i \cos\theta}\right) \sin\theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_i \cos\theta}\right)^2$$

$$y = x \,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{1}{2} \frac{g}{{v_i}^2 \cos^2\theta} x^2$$

È una parabola!

Gittata

$$0 = x\,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{1}{2}\frac{g}{{v_i}^2\cos^2\theta}x^2$$

Per simmetria
Posizione del massimo

Impongo $y = 0$ nella traiettoria

$$x_{G1} = 0 \qquad x_{G2} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\theta\,{v_i}^2\cos^2\theta}{g} = \frac{{v_i}^2}{g}2\cos\theta\sin\theta = \frac{{v_i}^2}{g}\sin 2\theta = 2x_M$$

Gittata massima

$$\frac{dx_2}{d\theta} = \frac{{v_i}^2}{g}\frac{d(\sin 2\theta)}{d\theta} = 2\frac{{v_i}^2}{g}\cos 2\theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}\,, x_{G2} = \frac{{v_i}^2}{g}$$

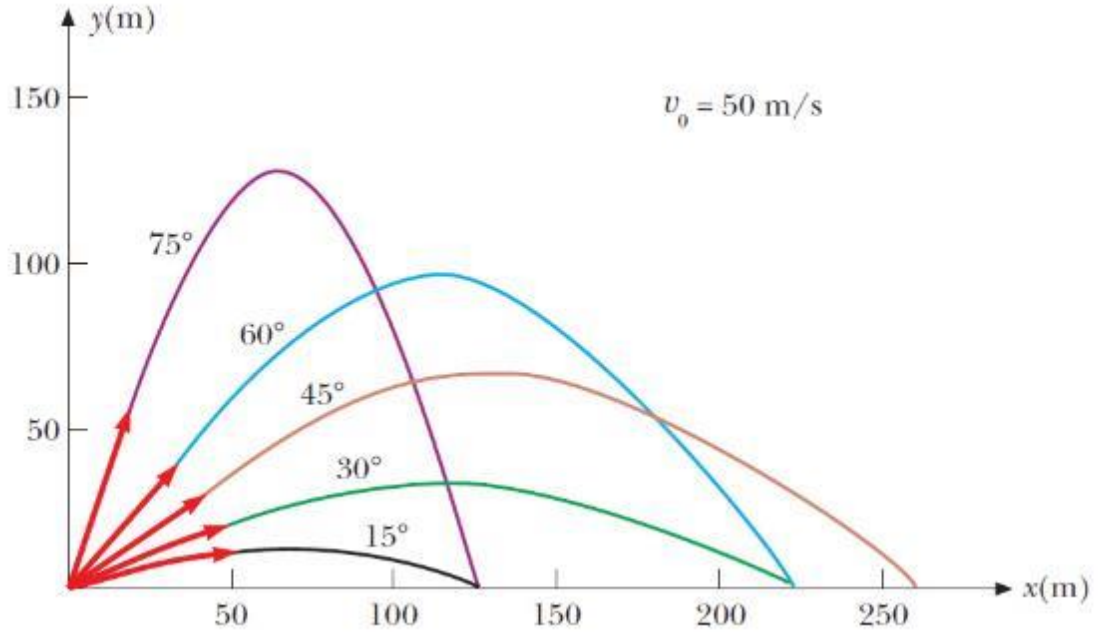
Altezza massima

$$y(x_M) = y_M = \frac{{v_i}^2\sin^2\theta}{2g}$$

Tempo di volo

$$x_{G2} = v_i t_{G2}\cos\theta$$

$$t_{G2} = \frac{v_i}{g}\sin\theta$$

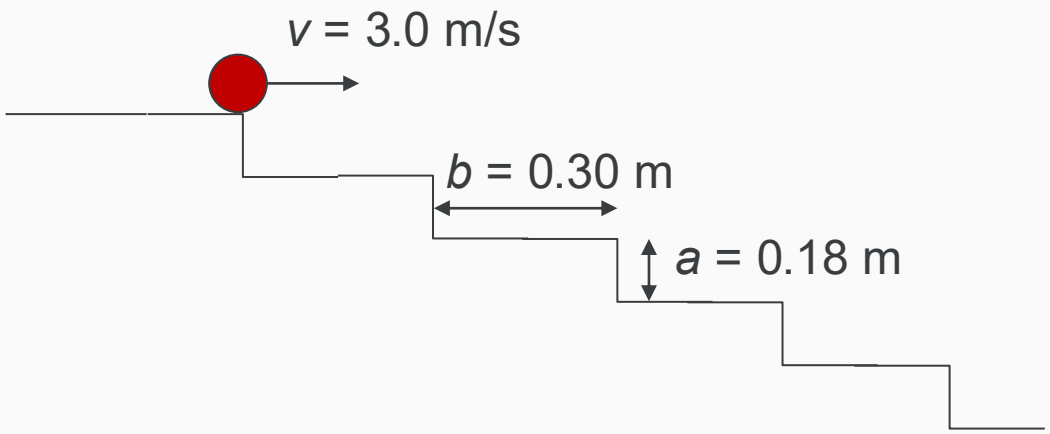


Exercise

Una biglia rotola in modo da essere proiettata orizzontalmente rispetto al pianerottolo superiore di una scala.

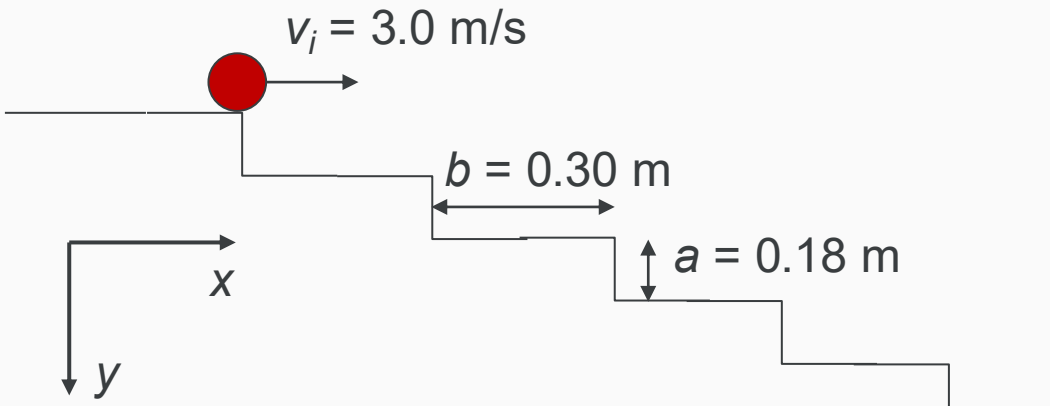
La velocità iniziale della biglia è di 3.0 m/s.
Ogni gradino è alto 0.18 m (a) e largo 0.30 m (b).

Quale gradino colpisce per primo la biglia?





Soluzione



Strategia definiamo +*y* rivolto verso il basso.

$$v_{iy} = 0, \quad v_{ix} = v_x = v_i$$

$$\rightarrow \quad \Delta x = v_i \Delta t \quad \text{e} \quad \Delta y = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

Definiamo il numero del gradino $n = \frac{x}{b} = \frac{y}{a}$

Tale che
n da 0 a 1 rappresenta il gradino 1
n da 1 a 2 rappresenta il gradino 2, etc.

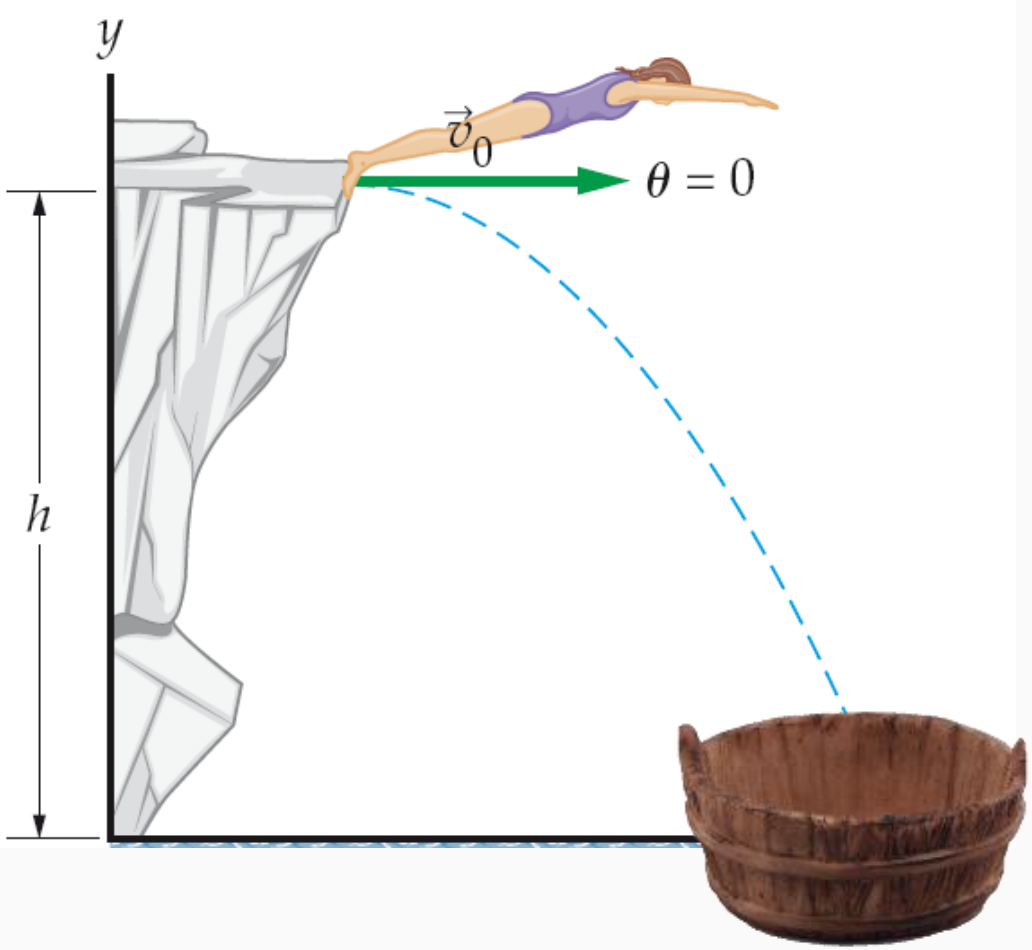
All'istante $\bar{t}$ la biglia colpisce l' *n*-esimo gradino

$$\rightarrow \quad nb = v_i \bar{t}, \quad na = \frac{1}{2} g \bar{t}^2 \quad \rightarrow \quad na = \frac{1}{2} g \left(\frac{nb}{v_i} \right)^2 \quad \rightarrow \quad n = \frac{2a}{b^2} \frac{v_i^2}{g} = 3.7$$

Il valore di n è tra 3 e 4, quindi la biglia colpisce il gradino numero 4.



Esercizio



Tuffo da $h = 12m$

Con che velocità devo lanciarmi (in orizzontale) per atterrare su una tinozza posta a $x_t = 5m$ di distanza?

A che velocità arrivo sulla tinozza?

Leggi orarie

$$x = v_0 t$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$t_t = \sqrt{\frac{h \cdot 2}{g}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 2}{g}} \approx \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{10}} \approx \frac{5}{3} [\mathrm{s}]$$

$$v_0 = \frac{x_t}{t_t} = \frac{12 \cdot 3}{5} \approx 7 \ [\mathrm{m/s}]$$

Se un punto $\boldsymbol{P}$ si muove lungo una **traiettoria** $s(t)$, in un sistema di riferimento con una **origine** O e un **posizione** $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = OP = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y + z(t)\hat{u}_z$$

velocità $\vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_T = v\hat{u}_T$$

accelerazione $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Il moto può essere scomposto lungo gli assi del **sistema di riferimento**.

Le leggi orarie si ottengono risolvendo le relative equazioni differenziali.

Moto oscillatorio

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 2\pi\mathrm{f}$$

Moto circolare

$\mathrm{R} = \mathrm{cost}$
distanza dall'asse di rotazione

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\mathrm{R}}$$

$$v = \omega \times r$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{a}_{\mathrm{T}} + \vec{a}_{\mathrm{N}}$$

Verifica concetti

Discutere la differenza tra il concetto di velocità media e velocità istantanea

Dimostrare la legge del moto uniforme a partire dalla equazione differenziale $dx = v\,dt$

Che cosa cambia nelle equazioni del moto tra moto in 1 e 2 dimensioni?

Perché si può operare la scomposizione del moto nelle componenti?

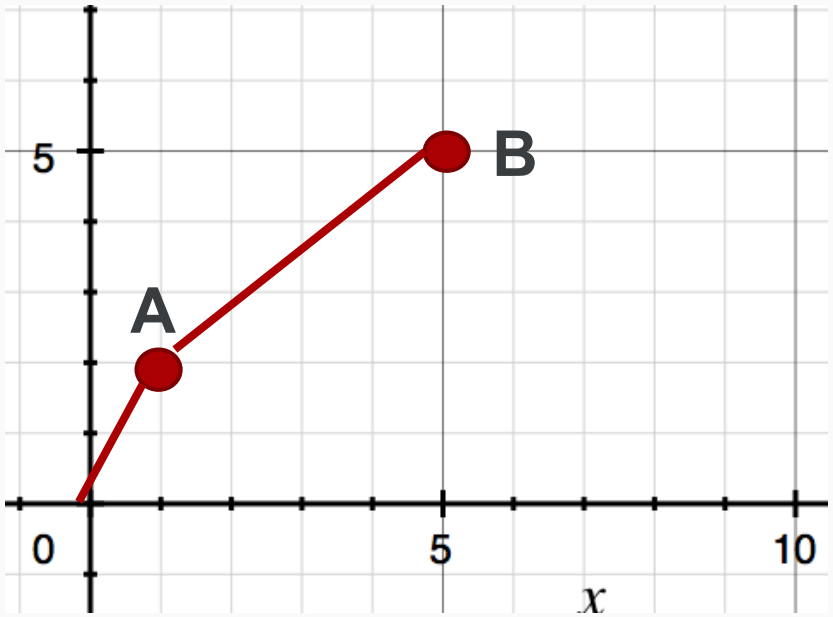
È importante la scelta del sistema di riferimento nello studio del moto? Motivare

Lungo una traiettoria come sono diretti i vettori spostamento, velocita istantanea, accelerazione istantanea?

Lungo una traiettoria, il vettore velocità media e il vettore velocità istantanea sono paralleli?

Controllare che tutte le grandezze nelle equazioni del moto abbiamo la stessa dimensione fisica (es [L]/[T])

Esercizi per casa



Q: dati i due punti sul piano x,y, A=(1,2) e B=(5,5), sapendo che il tratto OA è stato effettuato in 1 sec, e AB in 2 sec, calcolare:

- Componenti e Modulo della velocità media nel tratto OB
- Componenti e Modulo Accelerazione media nel tratto OB

- Q: Sono su un elicottero fermo a 10mila metri dal suolo. Mi lanciano fuori, quando ci metto a cadere? (ipotesi = no attrito atmosferico)
- Q: Sono su un elicottero che sta cadendo a 70km/h e si trova a 10mila metri dal suolo. Mi lanciano fuori, quando ci metto a cadere? (ipotesi = no attrito atmosferico)
- Q: Mi tuffo da una roccia alla 15m. A che velocità arrivo a toccare l'acqua?
- Q: Lancio un sasso ad un angolo di 30 gradi con v=10m/s, dopo quanto tocca terra? A che distanza? Quale è la massima altezza raggiunta?