

# Corso di Fisica Generale – Pt1

## Chimica Industriale 25/26



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

## Lez 2. Cinematica

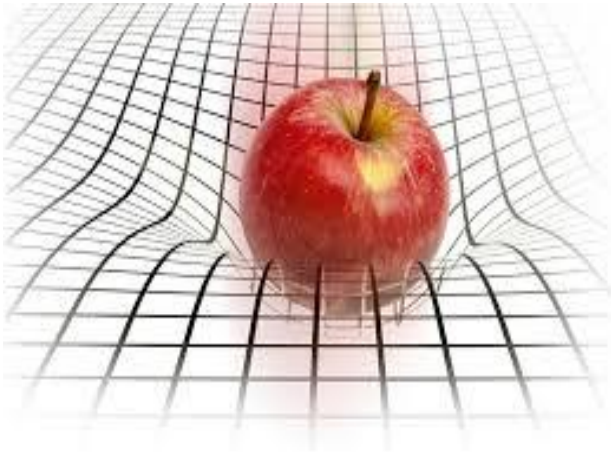
Docente:

Alessandro Patelli  
*[alessandro.patelli@unipd.it](mailto:alessandro.patelli@unipd.it)*





# Perché ci interessa studiare il moto dei corpi?



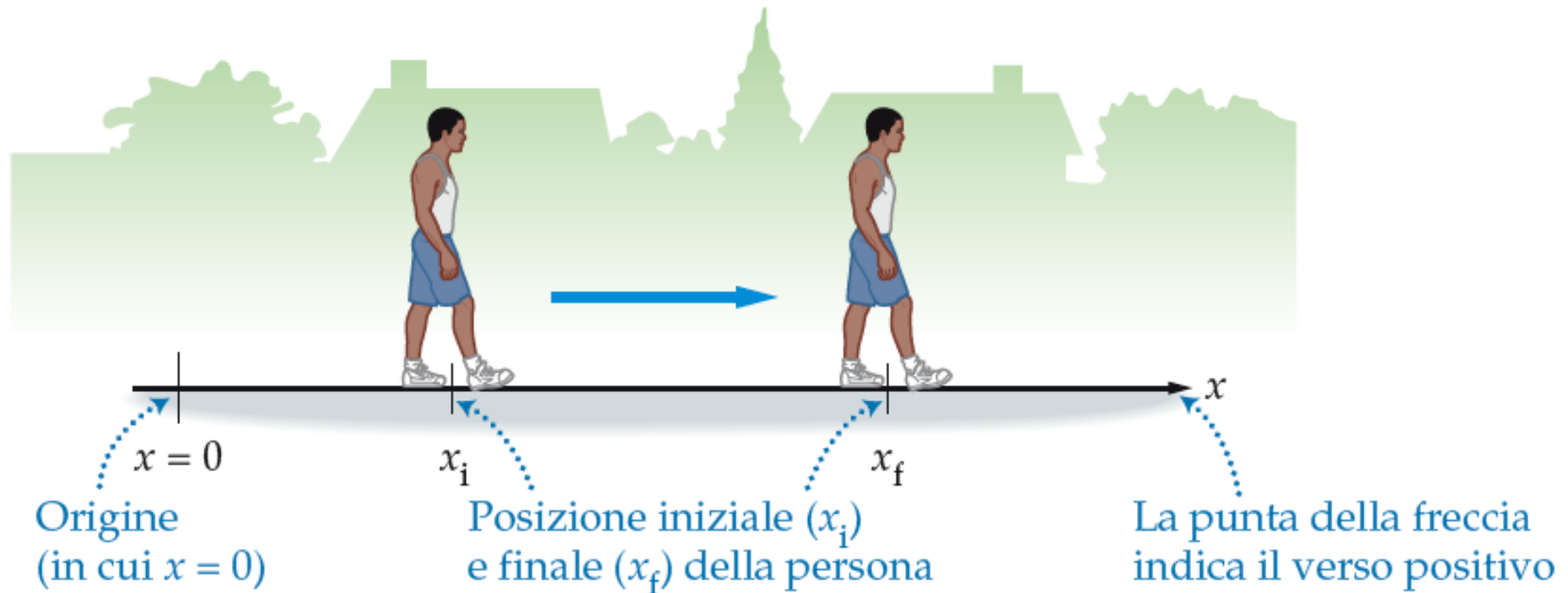
Ci sono varie ragioni:

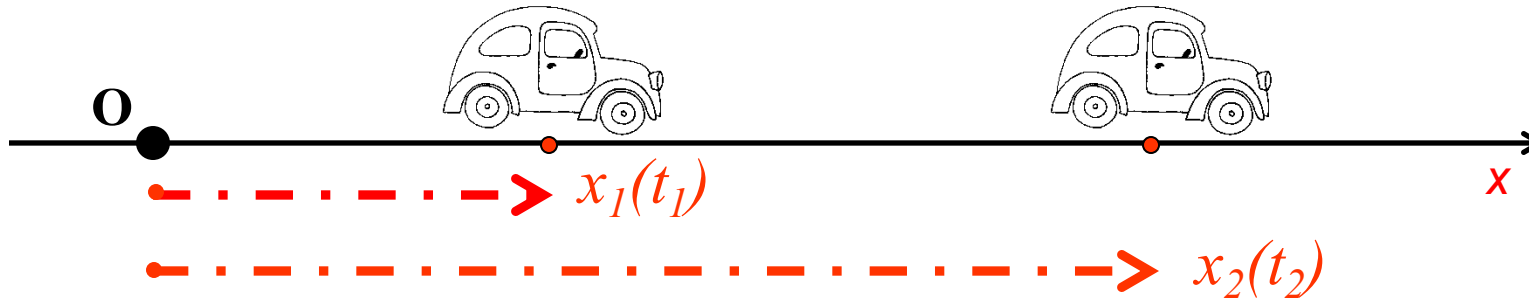
1. come vedremo più avanti, senza le interazioni (forze), non succedrebbe niente, e **le forze della natura generano sempre “movimento” (attenzione però a cosa intendiamo)**
2. **le leggi** che definiamo in questa parte, saranno **molto generali e usate in altri ambiti** (termodinamica, elettromagnetismo, onde)
3. impariamo una cosa fondamentale: **procedere per approssimazioni successive**
4. Una legge sola può spiegare “caduta della mela” e il “moto dei pianeti”



|                         |       |                                                                                                                                        |                                                                                                                            |
|-------------------------|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cinematica<br>del punto | 1D    | Posizione, spostamento<br>Velocità<br>Moto rettilineo uniforme<br>Accelerazione<br>Moto uniformemente accelerato<br>Equazioni del moto | <b>La Cinematica descrive il moto<br/>di un punto o di un corpo<br/>indipendentemente dalla causa<br/>del moto</b>         |
| Cinematica<br>del punto | 2-3 D | Posizione, spostamento<br>Velocità<br>Accelerazione<br>Equazioni del moto                                                              | <b>La Cinematica descrive i<br/>parametri del moto (posizione,<br/>velocità e accelerazione) in<br/>funzione del tempo</b> |
| Circular motion         |       | Spostamento angolare<br>Velocità angolare<br>Accelerazione angolare                                                                    |                                                                                                                            |

- Il primo passo nella descrizione del moto consiste nello stabilire un **sistema di coordinate (di riferimento)** che definisce la posizione.
- Spesso la **scelta è arbitraria**, ma alcuni SDR sono meglio di altri



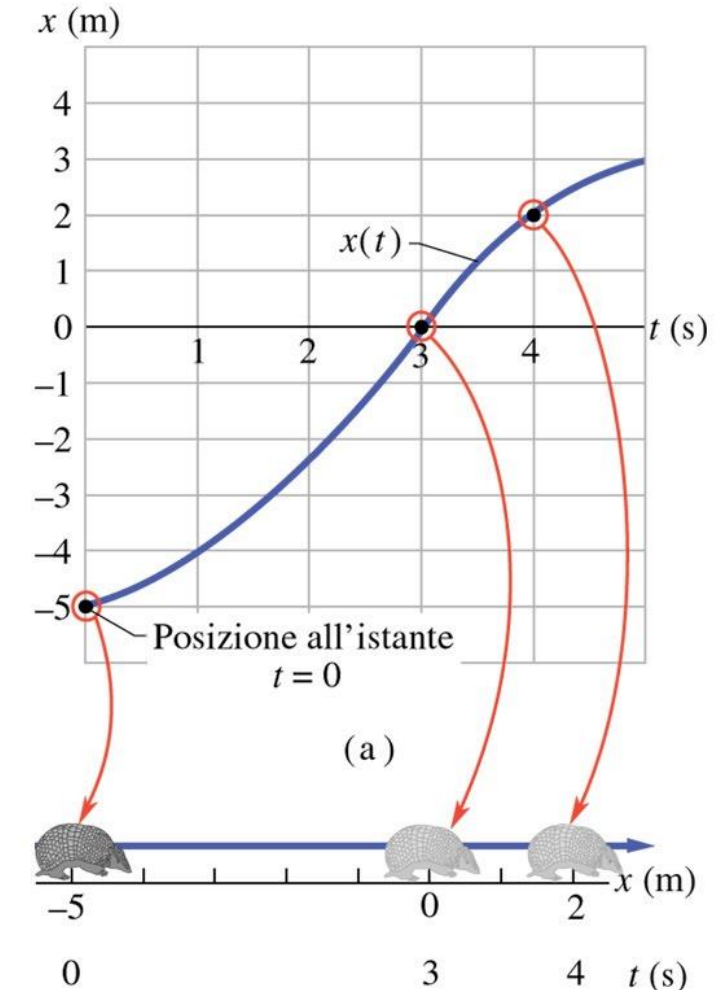


In una dimensione non serve notazione vettoriale  
La differenza  $x_2 - x_1$  tra la posizione finale e la posizione iniziale è chiamata **spostamento**  $\Delta x$ :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

La legge che per ciascun istante  $t$  mi dà la posizione  $x(t)$  è detta **LEGGE ORARIA**.

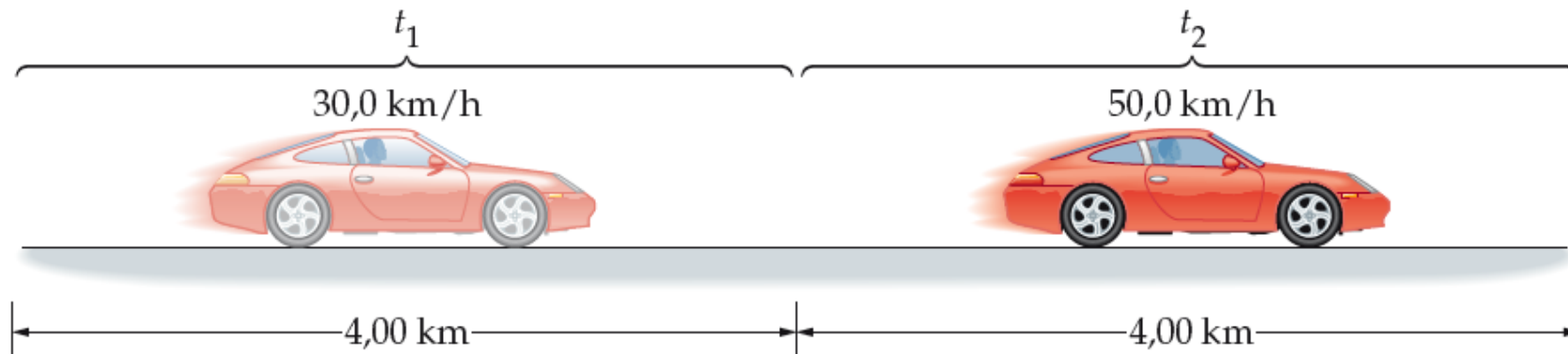
↳ Per ogni  $t$  (tempo)



La velocità media è definita come il rapporto tra la distanza percorsa e il tempo impiegato:

$$velocità\ media = \frac{distanza\ percorsa}{tempo\ impiegato} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \langle v \rangle$$

Supponiamo che una macchina percorra 4 km a 30km/h e poi altri 4km a 50km/h, quale è la sua velocità media?



$$\text{Risposta: } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8\text{ km}}{t_1 + t_2} = \frac{8\text{ km}}{\frac{4\text{ km}}{30\text{ km/h}} + \frac{4\text{ km}}{50\text{ km/h}}} = 37.5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



Velocità istantanea

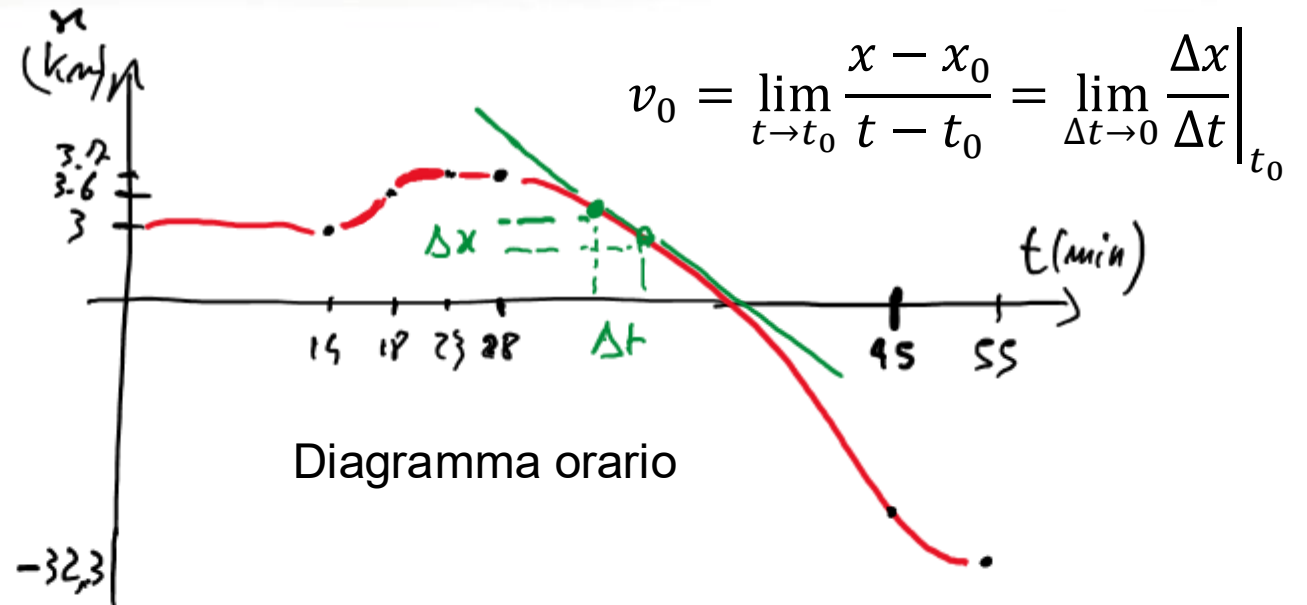
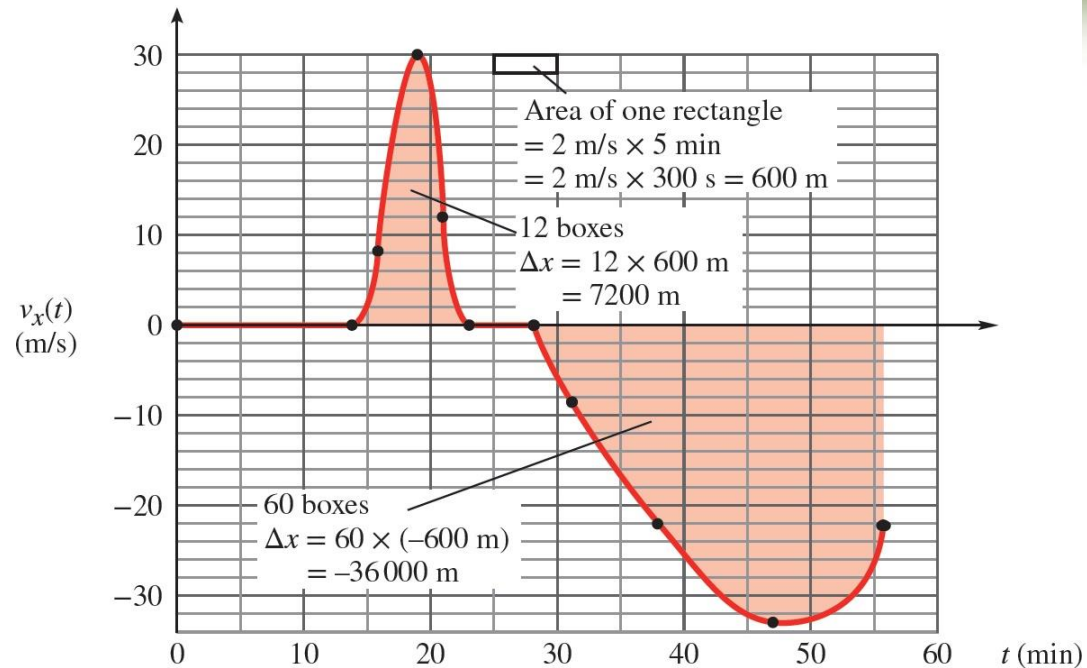


Diagramma orario



# Velocità come derivata prima della posizione

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



$$dx = v \cdot dt$$

Il significato della "d" di derivata è un **significato matematico** molto particolare, però una volta scritto "dx" è come se fosse un numero, si può moltiplicare, dividere, etc.

Quella che vedete sopra è una semplicissima **"equazione differenziale"**  
Per risolverla bisogna **"integrare"** l'equazione differenziale



# Caso del moto rettilineo uniforme

Moto rettilineo uniforme  $\rightarrow$  velocità è costante e "va dritto"

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \longrightarrow \quad dx = v dt$$

Eq. differenziale di primo grado.  
Metto le condizioni a contorno

$$x(t_0) = x_0$$

Integrando

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt \quad \longrightarrow \quad (x - x_0) = v(t - t_0)$$

Quindi

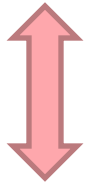
**Legge oraria del moto!**

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$





$$\langle a \rangle = \frac{\text{variazione velocità}}{\text{tempo trascorso}}$$



$$\langle a \rangle = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

- Grandezza è  $[L]/[t^2]$ . Unità di misura  $m/s^2$  (ma anche  $km/h^2$ )
- Ogni grandezza che si esprime in lunghezza/(tempo al quadrato) è una accelerazione
- **Accelerazione istantanea** come prima
- L'accelerazione è la **derivata prima della velocità rispetto al tempo**
- ... ma anche la **derivata seconda rispetto dello spazio rispetto al tempo**



Una macchina da formula 1 va da 0 a 100 km/h in 1.8 secondi. Quale è la sua accelerazione media?

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{100 \frac{km}{h} - 0}{1.8s - 0} = \frac{100 km}{h} * \frac{1}{1.8s} = 55.6 \frac{km/h}{s}$$



Quanti metri al secondo quadro?

$$55 \frac{km/h}{s} \frac{m/s}{3.6 km/h} = 15,43 m/s^2$$

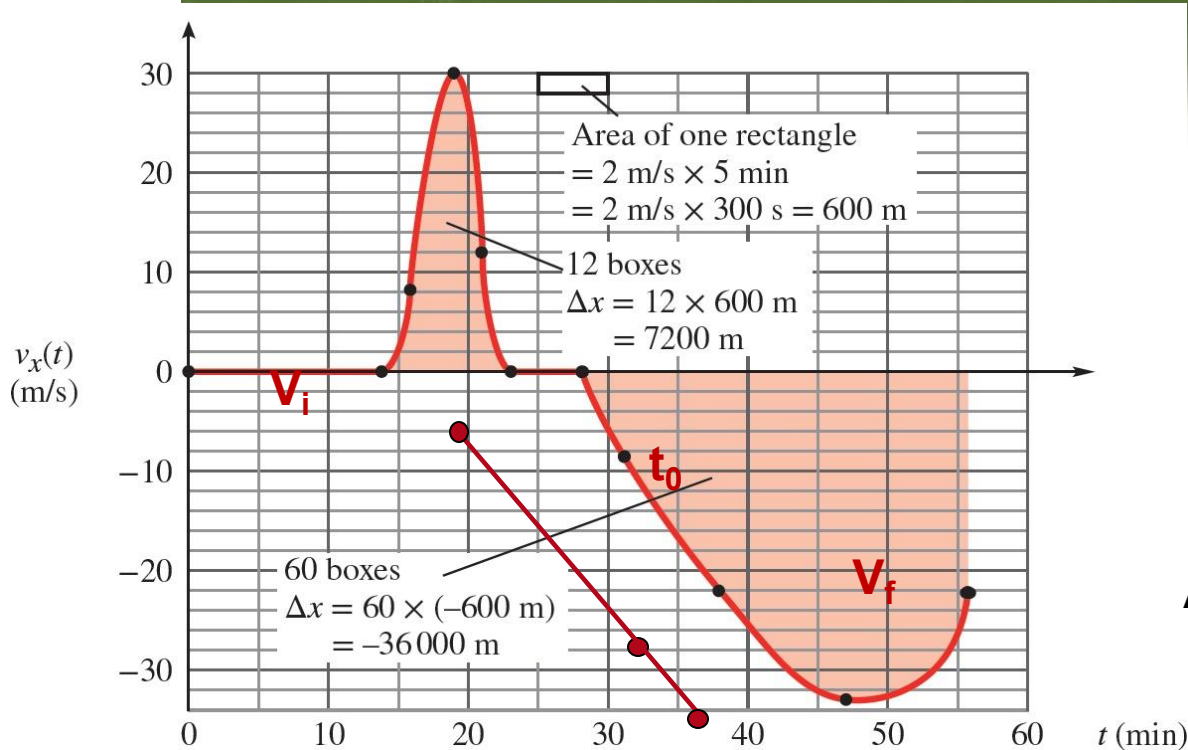
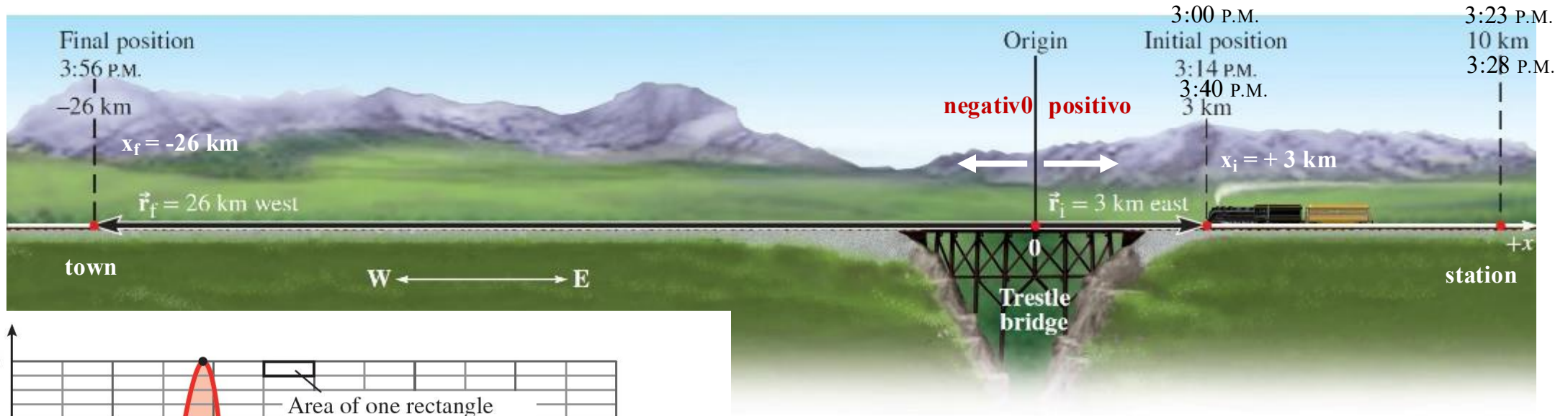


Sapendo che l'accelerazione di gravità è  $g=9.81m/s^2$ , esprimere l'accelerazione trovata in unità di g

$$\frac{15.43}{9.81} = 1.57 \text{ volte}$$



# Accelerazione istantanea



Rapidità a cui cambia la velocità

Accelerazione media

$$a_{av,x} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

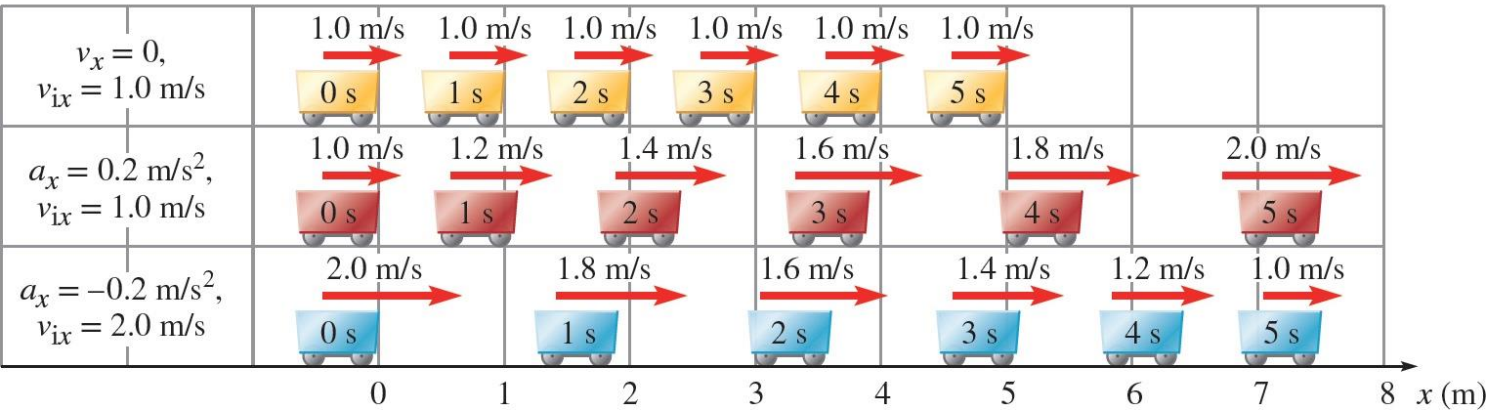
Accelerazione istantanea

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta v}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \Big|_{t_0}$$



# Diagrammi orari e grafici

Positions of the carts at 1.0 s intervals



## Accelerazione costante

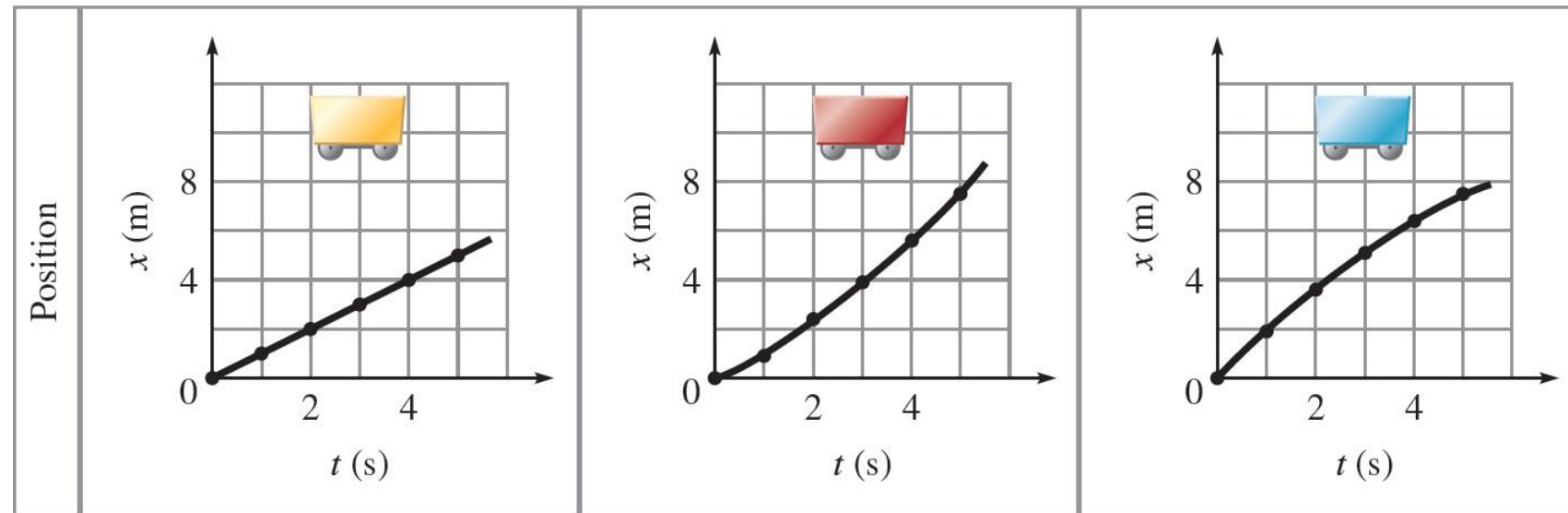
Velocità istantanea

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta x}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Big|_{t_0}$$

## Posizione

Distanza percorsa

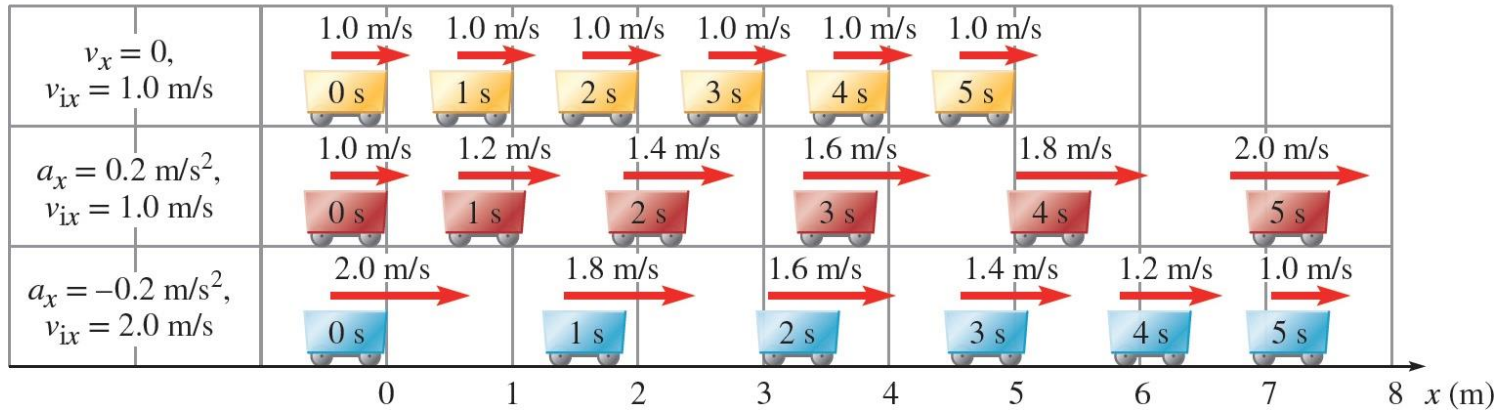
$$\Delta x = v_0 \Delta t$$





# Diagrammi orari e grafici

Positions of the carts at 1.0 s intervals



## Accelerazione costante

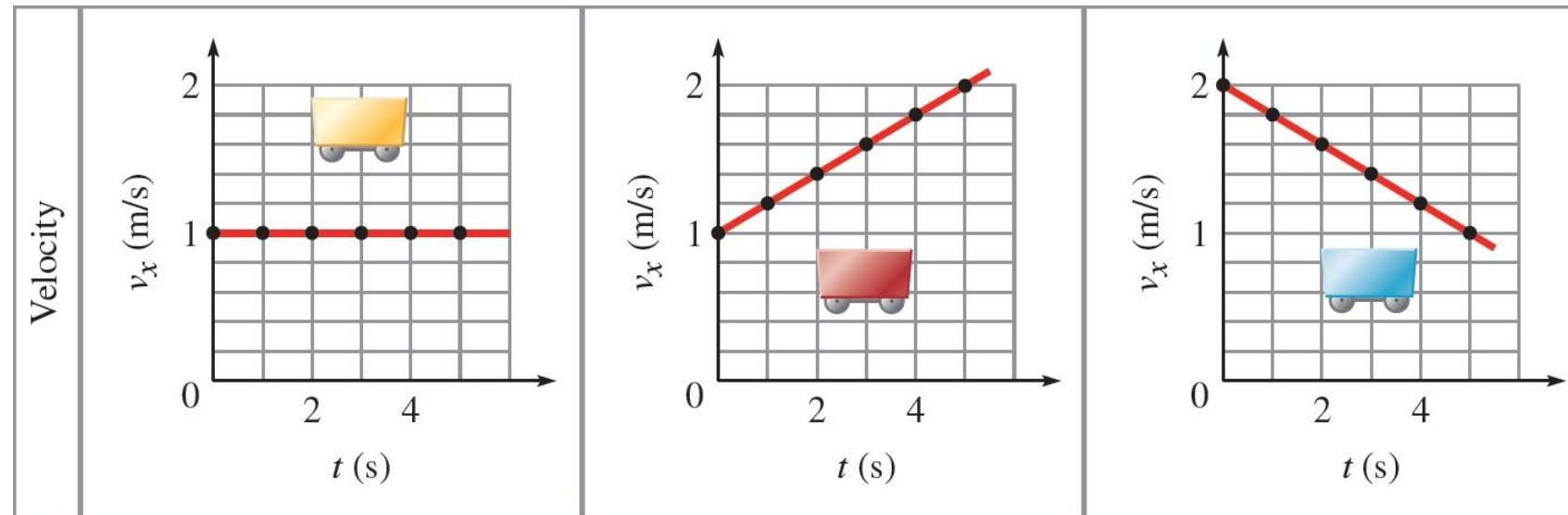
Accelerazione istantanea

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta v}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \Big|_{t_0}$$

## Velocità

Distanza percorsa

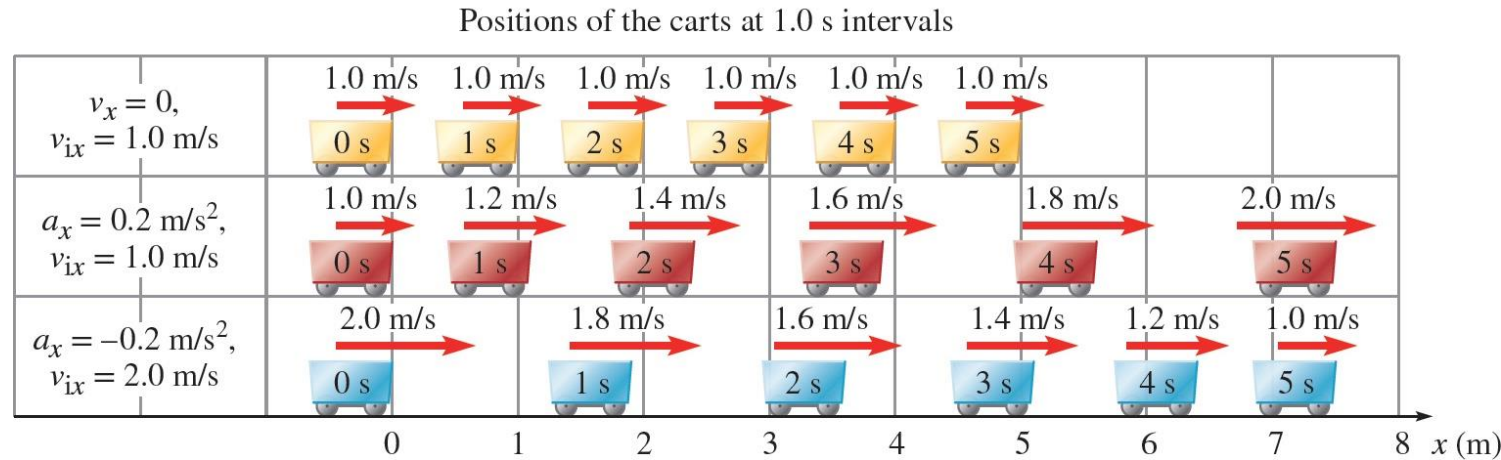
$$\Delta x = v_0 \Delta t$$





# Diagrammi orari e grafici

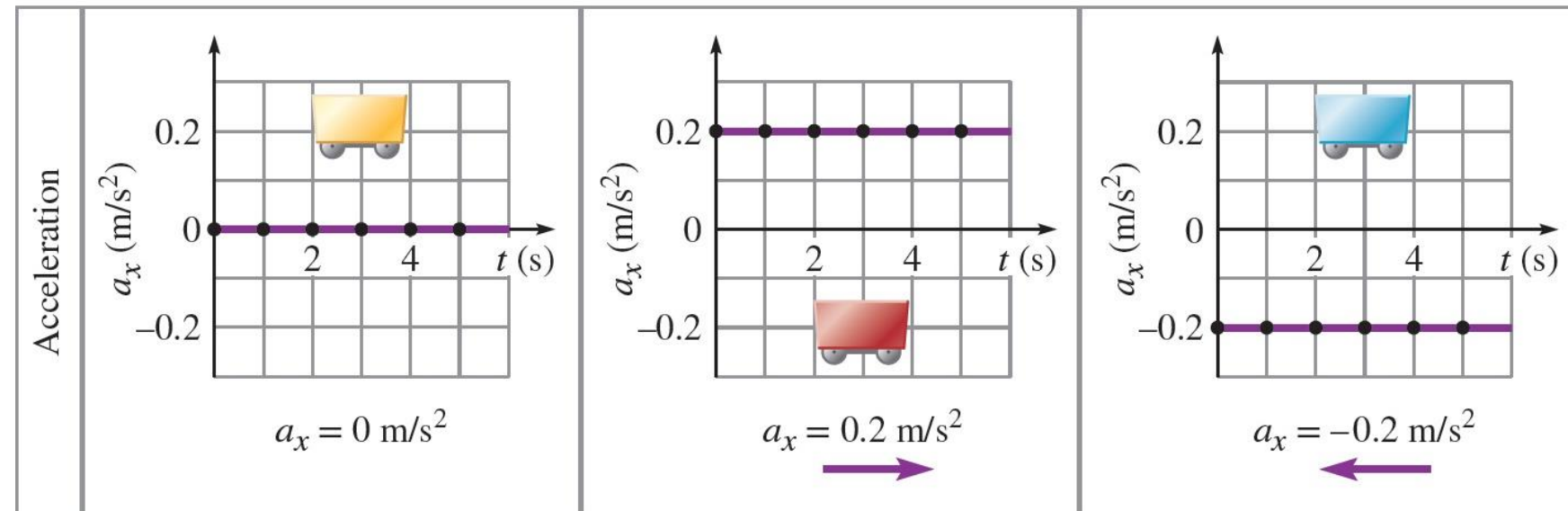
## Accelerazione costante



## Accelerazione

Variazione della velocità

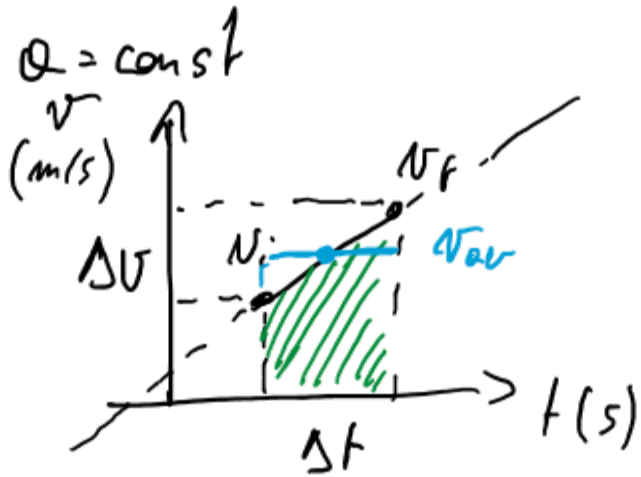
$$\Delta v = a_0 \Delta t$$





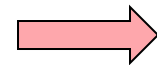
# Moto uniformemente accelerato

Due relazioni essenziali tra posizione, velocità e accelerazione ci permettono di trovare la posizione di un oggetto che si muove lungo una linea con accelerazione costante (se  $a$  è costante durante l'intero intervallo di tempo).



$$\Delta v = v_f - v_i = a\Delta t \quad \leftarrow \text{La velocità aumenta linearmente}$$

$$\Delta x = x_f - x_i = v_{av,x}\Delta t = \frac{1}{2}(v_f + v_i)\Delta t \quad \leftarrow \text{Solo perché costante}$$



$$\Delta x = v_i\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$
$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x$$

**$a$  è costante**

**Legge oraria**

If  $t_i = 0 \Rightarrow \Delta t = t - t_i = t$ , if  $\Delta x = x - x_i$

the motion equation becomes

$$x = x_i + v_i t + \frac{1}{2}a(t)^2$$

Initial conditions

physics

## Moto **rettilineo uniforme** ( $v = cost$ )

Legge oraria  $x(t) = x_0 + v t$

Velocità  $v = cost$

Accelerazione  $a = 0$

## Moto **rettilineo uniformemente accelerato** ( $a = cost$ )

Legge oraria:  $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

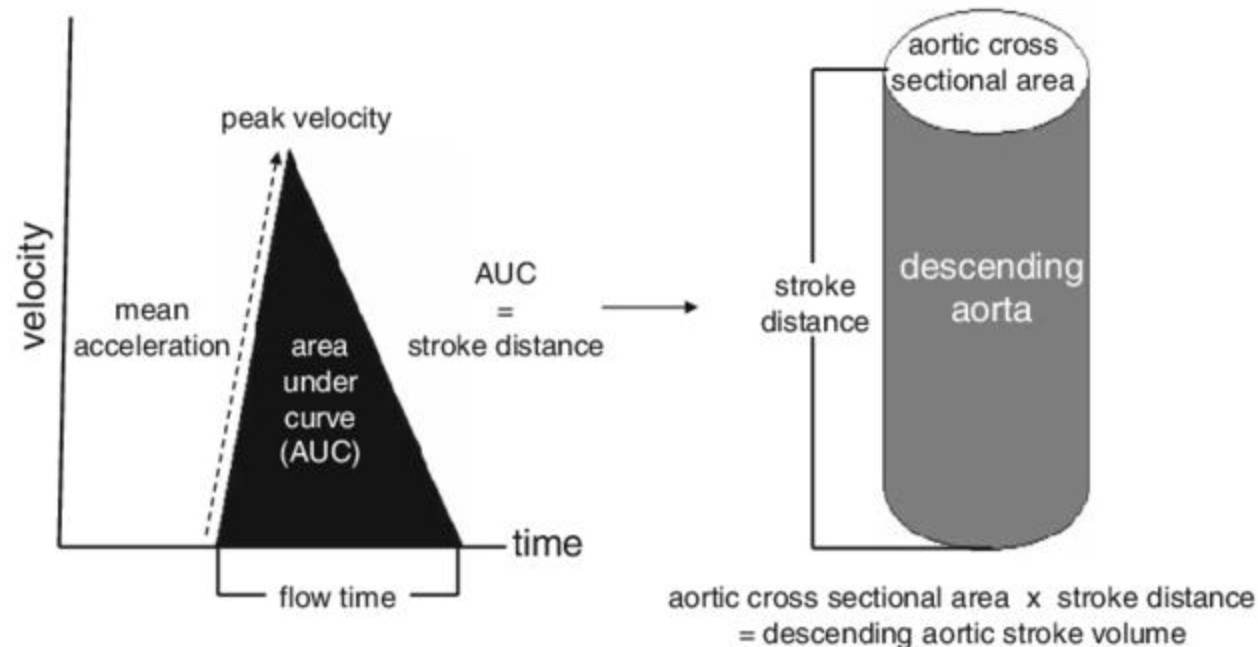
Velocità  $v(t) = v_0 + at$

$$v^2(x) = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Accelerazione  $a = cost$

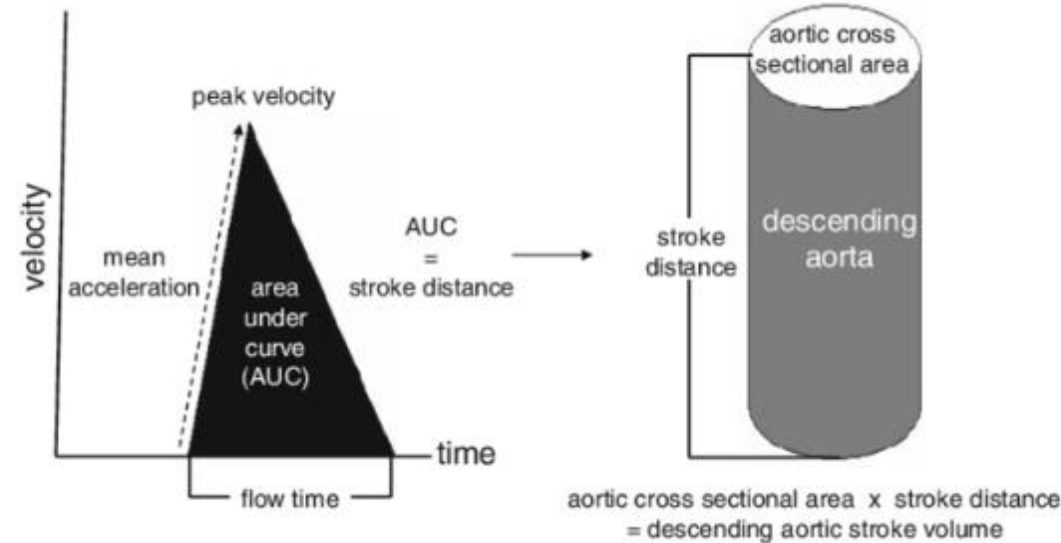
Si noti che primo è caso particolare del secondo

La massima accelerazione del sangue nell'aorta può essere utilizzata per testare la funzione ventricolare. Il periodo durante il quale si verifica la massima accelerazione del sangue nell'aorta è durante la prima parte dell'azione di pompaggio del ventricolo sinistro. Durante questo periodo l'accelerazione è essenzialmente costante. L'ecocardiografia Doppler utilizza gli ultrasuoni per misurare la velocità del sangue nell'aorta.



Volume spinto  
nell'aorta per  
pulsazione





I risultati per un paziente mostrano che l'aorta sanguigna inizia a una velocità di 0.10 m/s e subisce un'accelerazione costante per 30 ms, raggiungendo una velocità di picco di 1.30 m/s.

Qual è l'accelerazione?

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1.30 \text{ m/s} - 0.10 \text{ m/s}}{0.030 \text{ s}} = 40.00 \text{ m/s}^2$$

Quanto lontano viaggia il sangue?

$$\begin{aligned} \Delta x &= v_{av} \Delta t = \frac{1}{2} (v_f + v_i) \Delta t \\ &= \frac{1}{2} (1.30 \text{ m/s} + 0.10 \text{ m/s}) \times 0.030 \text{ s} = 0.021 \text{ m} \end{aligned}$$





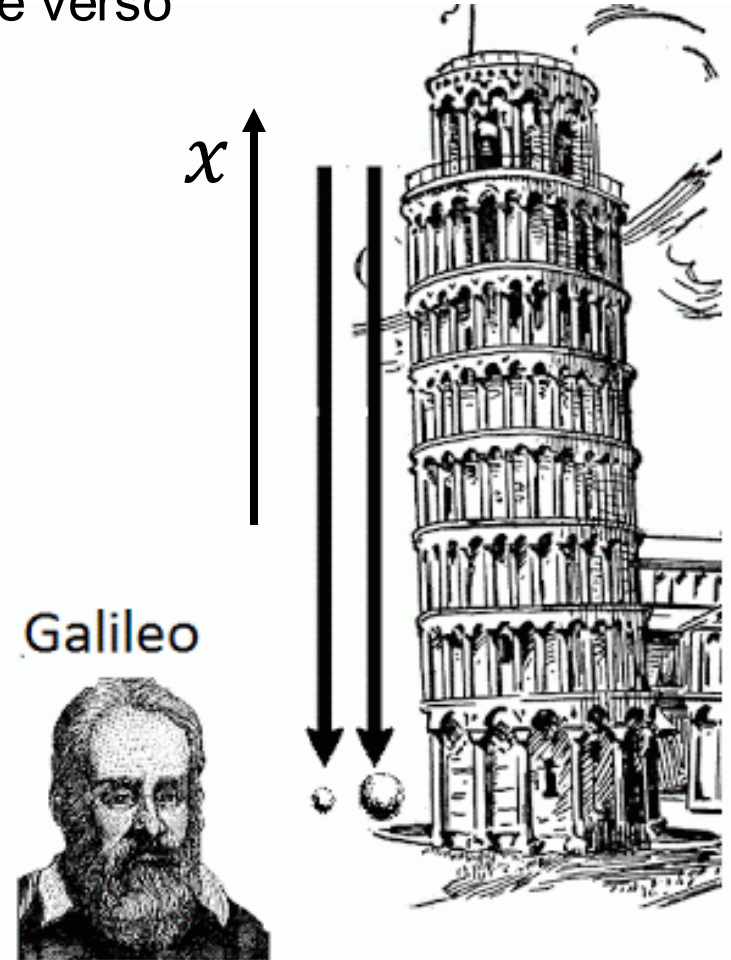
Un corpo lasciato cadere in vicinanza della superficie Terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante di  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

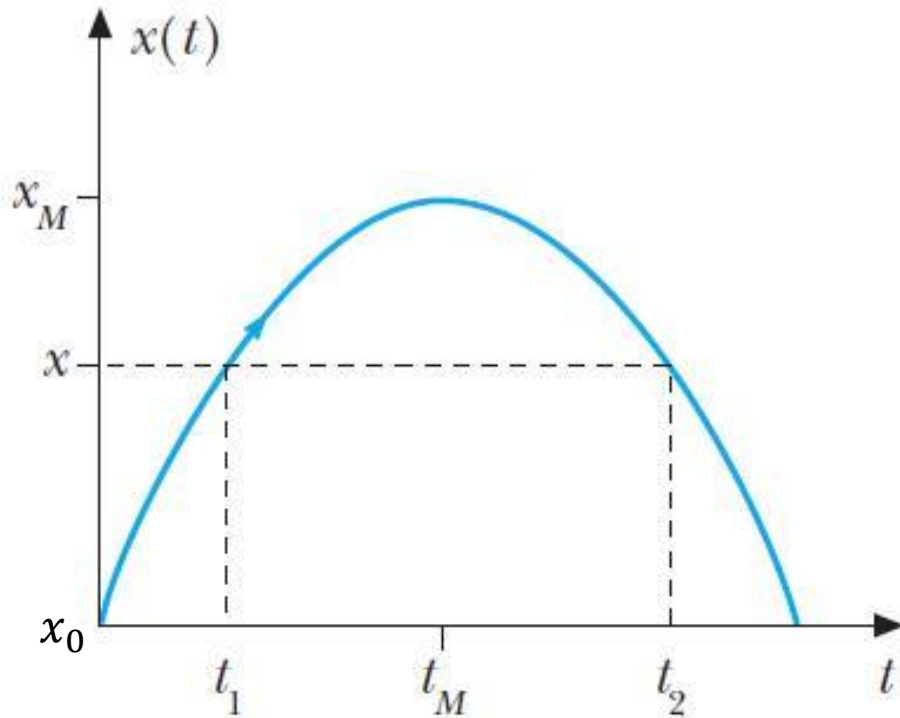
Moto **rettilineo uniformemente accelerato**  
( $-g = \text{cost}$ )

Legge oraria:  $x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

Velocità  $v(t) = v_0 - gt$   
 $v^2(x) = v_0^2 - 2g(x - x_0)$

Accelerazione  $a = -g = \text{cost}$





Quando arriva al punto massimo  $t_M$  ?

$$v(t_M) = 0 = v_0 - gt_M$$

$$t_M[s] = \frac{v_0[m/s]}{g[m/s^2]}$$

Qual è l'altezza massima  $x_M$  ?

$$v^2(x_M) = 0 = v_0^2 - 2g(x_M - x_0)$$

$$x_M = x_0 + v_0^2/2g$$

Quando ripassa per  $x_0$  ?

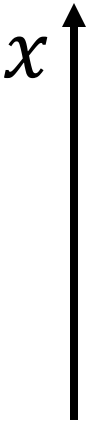
$$x_0 = x_0 + v_0 t_c - \frac{1}{2} g t_c^2 \quad t_c^2 - \frac{2v_0}{g} t_c = 0$$

$$t_{c1} = 0 \quad t_{c2} = \frac{2v_0}{g} = 2t_M$$



# Moto verticale di un corpo

Un punto materiale viene lasciato cadere all'istante  $t = 0$  con velocità iniziale nulla. Un secondo punto materiale viene lanciato verso il basso all'istante  $t = t_0 > 0$ , con velocità iniziale  $v_0$ . Riuscirà a raggiungere il primo punto?



Le leggi orarie dei moti sono  $x_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2$   $x_2(t) = -v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$

$$x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t})$$

$$-\cancel{\frac{1}{2}g\bar{t}^2} = -v_0(\bar{t} - t_0) - \frac{1}{2}g(\bar{t} - t_0)^2 = -v_0\bar{t} + v_0t_0 - \cancel{\frac{1}{2}g\bar{t}^2} - \frac{1}{2}gt_0^2 + g\bar{t}t_0$$

$$2(v_0 - gt_0)\bar{t} = 2v_0t_0 - gt_0^2 = (2v_0 - gt_0)t_0$$

$$\bar{t} = \frac{t_0(2v_0 - gt_0)}{2(v_0 - gt_0)} \quad \begin{matrix} \exists t_0 < \bar{t} \\ v_0 > gt_0 \end{matrix}$$



Mi tuffo da una scogliera da fermo da una altezza  $h$  di 12 metri.

- A che velocità impatto sul mare?
- Quanto tempo all'impatto?

Risolvere nei 2 sistemi di riferimento

1

$$y(t) = h = \frac{1}{2} g(t)^2$$

2

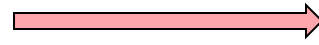
$$y(t) = 0 = h - \frac{1}{2} g(t)^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



# Moto armónico semplice

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 t$$



$$f(0) = A$$

$$f'(0) = B$$

$$f(t) = A \cos \omega t + \frac{B}{\omega} \sin \omega t$$

$$f'(t) = -A\omega \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$f''(t) = -A\omega^2 \cos \omega t - \omega B \sin \omega t = -\omega^2 f(t)$$

Formule di addizione e sottrazione

|                        |                                                       |
|------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\sin(\alpha + \beta)$ | $\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$ |
| $\sin(\alpha - \beta)$ | $\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$ |

$$A = C \sin \varphi$$

$$\frac{B}{\omega} = C \cos \varphi$$

$$f(t) = A \cos \omega t + \frac{B}{\omega} \sin \omega t = C \sin \varphi \cos \omega t + C \cos \varphi \sin \omega t = \mathbf{C \sin(\omega t + \varphi)}$$



# Moto armónico semplice

$\omega$  è la **pulsazione**

Se  $T$  è il periodo allora

$$2\pi = \omega \cdot T \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{rad s}^{-1}$$

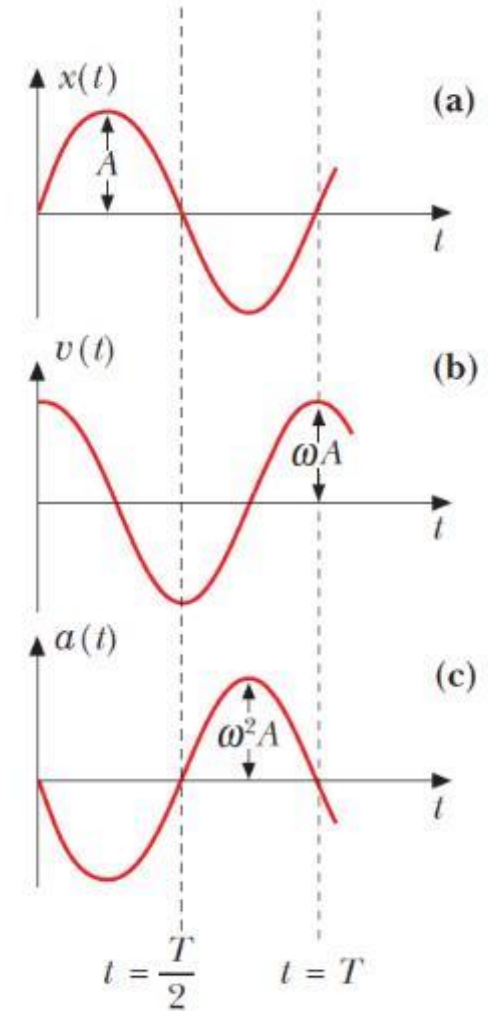
$\nu$  è la **frequenza**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{Hz, hertz, s}^{-1}$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} a(t) &= -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) \\ &= -\omega^2 x(t) \end{aligned}$$





# Accelerazione in funzione della posizione

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad a \, dx = v \, dv \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x a(x) \, dx = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

## Moto uniformemente accelerato

$$v^2(x) = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

## Moto armónico semplice

$$a(x) = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x a(x) \, dx = -\omega^2 \int_{x_0}^x x \, dx = -\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 - x_0^2) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

$$\text{Se } x_0 = 0 \text{ e } v_0 = \omega A \quad v^2(x) = \omega^2 (A^2 - x^2)$$



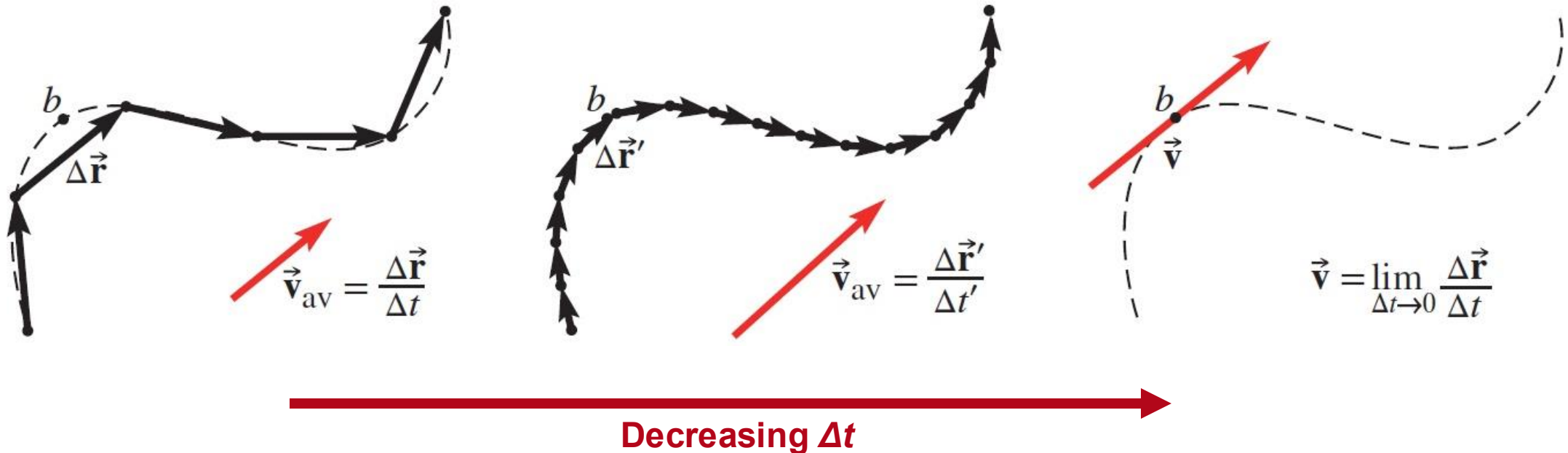
# Velocità in più dimensioni

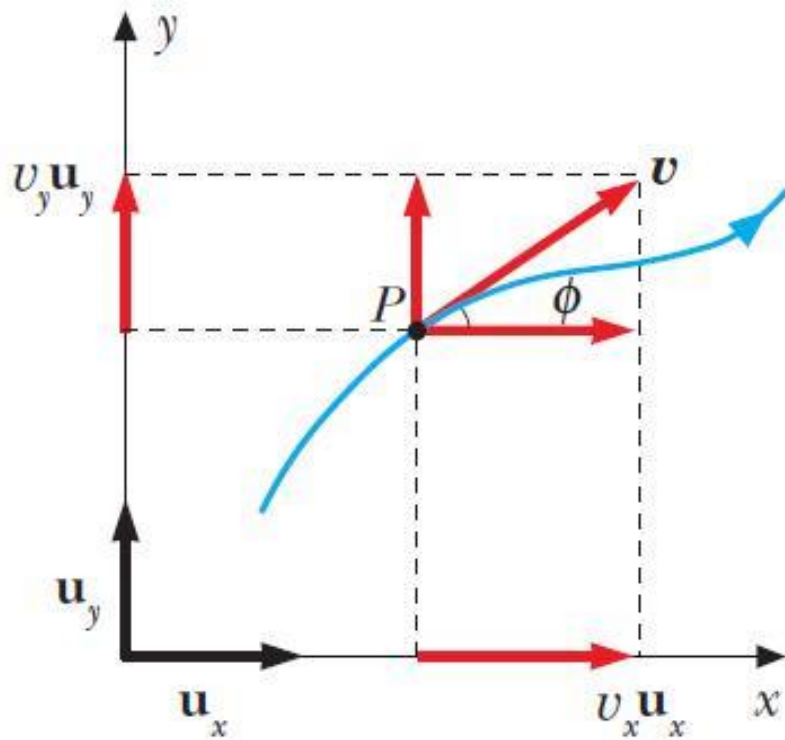
## Spostamento

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ y(t + \Delta t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

## Velocità istantanea

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{and} \quad v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$





$$d\vec{r} = dr \hat{u}_T = dx \hat{u}_x + dy \hat{u}_y + dz \hat{u}_z$$

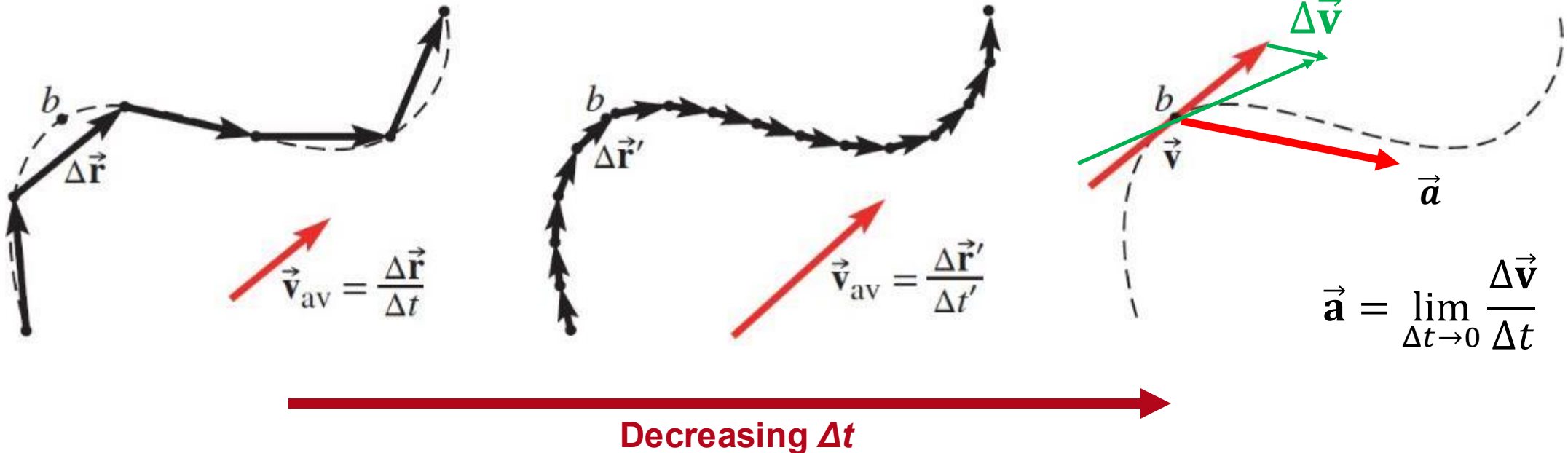
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{u}_x + \frac{dy}{dt} \hat{u}_y + \frac{dz}{dt} \hat{u}_z = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y + v_z \hat{u}_z$$



Il vettore di accelerazione è parallelo alla variazione istantanea di velocità ed è diretto sempre verso la concavità della curva di traiettoria

Una variazione di direzione e non di grandezza della velocità dà un'accelerazione (moto circolare uniforme)

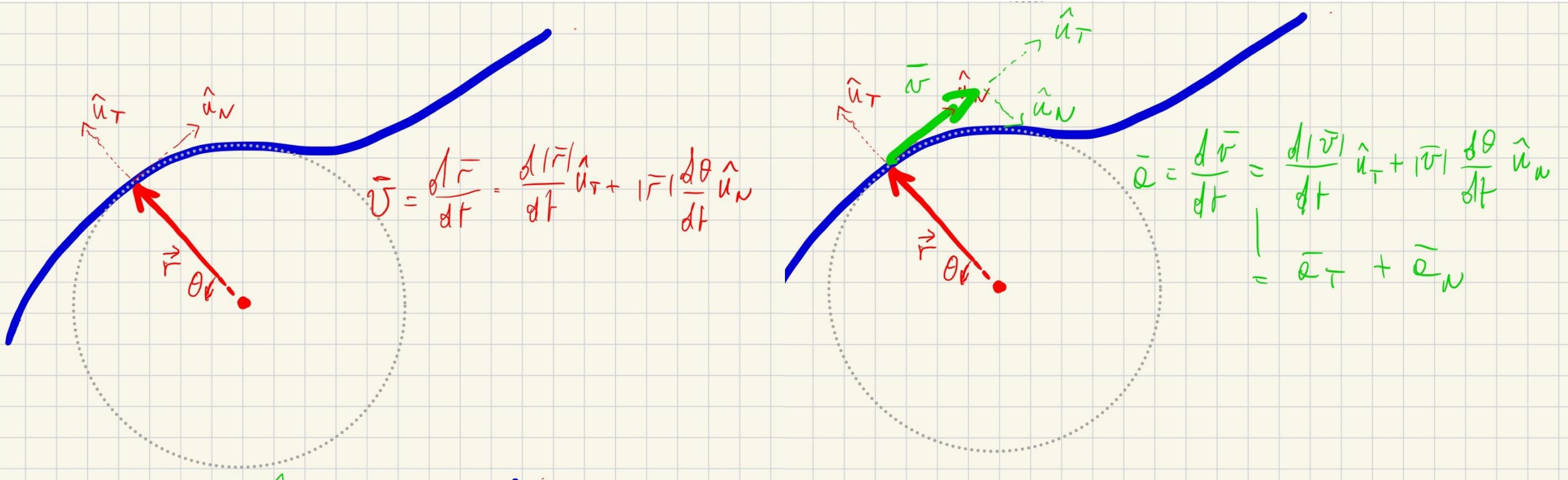
$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{u}_z \\ &= a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} & \Leftrightarrow & \quad v_x = \frac{dx}{dt}; & \quad v_y = \frac{dy}{dt}; & \quad v_z = \frac{dz}{dt} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt & \Leftrightarrow & \quad x = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t) dt; & \quad y = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(t) dt; & \quad z = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(t) dt \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} & \Leftrightarrow & \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}; & \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}; & \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t) dt & \Leftrightarrow & \quad v_x = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t) dt; & \quad v_y = v_y(t_0) + \int_{t_0}^t a_y(t) dt; & \quad v_z = v_z(t_0) + \int_{t_0}^t a_z(t) dt \end{aligned}$$

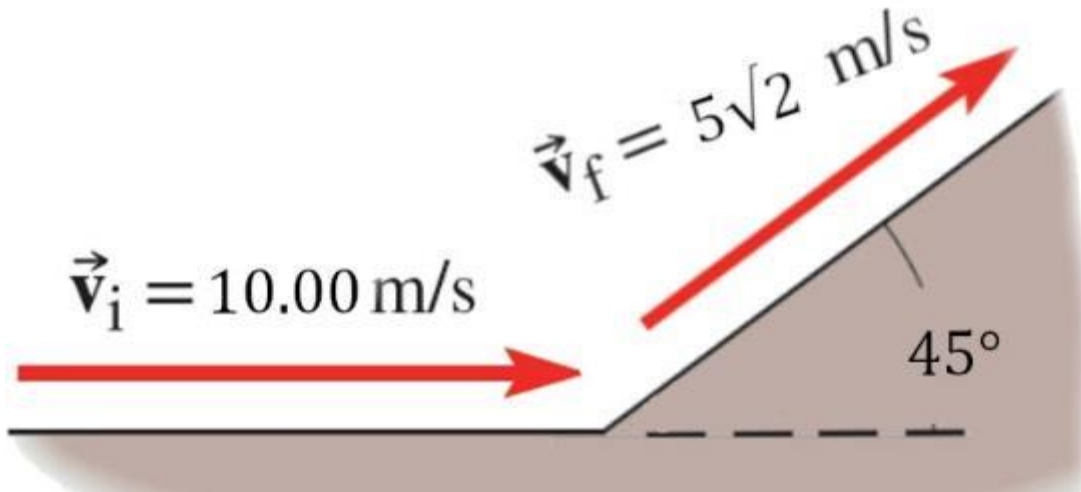
## velocità

## accelerazione



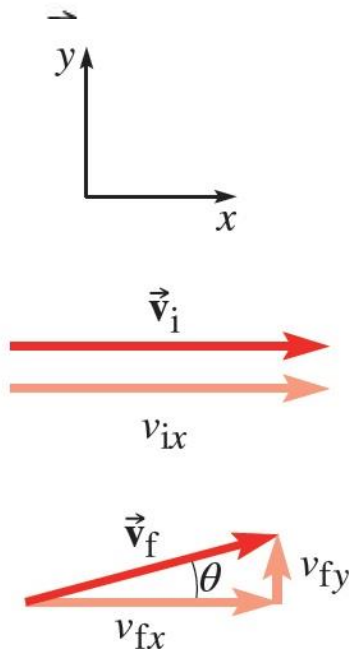
Un pattinatore in linea sta viaggiando su una strada pianeggiante con una velocità di  $10,00 \text{ m/s}$ ;  $100.0 \text{ s}$  dopo sta scalando una collina con un angolo di inclinazione di  $45.0^\circ$  ad una velocità di  $5\sqrt{2} \text{ m/s}$ .

1. Qual è il cambiamento nella sua velocità?
2. Qual è la sua accelerazione media durante l'intervallo di tempo di  $100.0 \text{ s}$ ?





La variazione di velocità non è di 1,79 m/s (=8,94 m/s–7,15 m/s). Questo è il cambiamento di velocità.  
La variazione di velocità si trova sottraendo il vettore di velocità iniziale dal vettore di velocità finale.

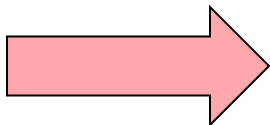


$$\vec{v}_f - \vec{v}_i$$

$$v_{iy} = 0 \quad \text{and} \quad v_{ix} = v_i = 10.00 \text{ m/s}$$

$$v_{fx} = v_f \cos \theta = 5\sqrt{2} \text{ m/s} \times 1/\sqrt{2} = 5.00 \text{ m/s}$$

$$v_{fy} = v_f \sin \theta = 5\sqrt{2} \text{ m/s} \times 1/\sqrt{2} = 5.00 \text{ m/s}$$

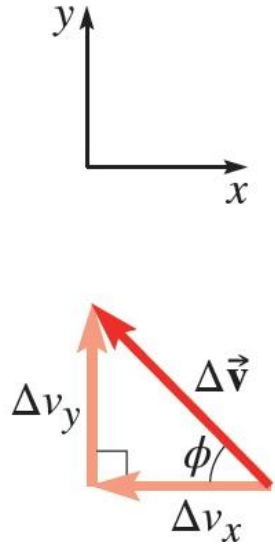


$$\Delta v_x = v_{fx} - v_{ix} = (5.00 - 10.00) \text{ m/s} = -5.00 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_y = v_{fy} - v_{iy} = (5.00 - 0) \text{ m/s} = +5.00 \text{ m/s}$$



## Example 3.5



$$\begin{aligned}(|\Delta \vec{v}|)^2 &= (\Delta v_x)^2 + (\Delta v_y)^2 \\ &= (-5.00 \text{ m/s})^2 + (5.00 \text{ m/s})^2 \\ &= 50.00 (\text{m/s})^2\end{aligned}$$

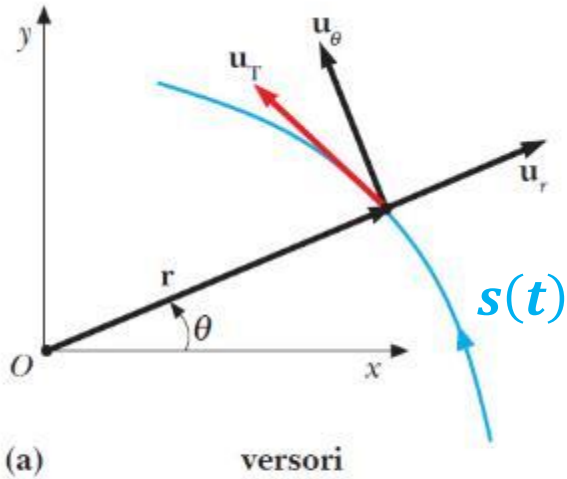
$$|\Delta \vec{v}| = 5\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$\tan \phi = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}} = \left| \frac{\Delta v_y}{\Delta v_x} \right| = \frac{5.00 \text{ m/s}}{5.00 \text{ m/s}} = 1.00$$

$$\phi = (\tan 1.00)^{-1} = 45.0^\circ$$

La direzione dell'accelerazione media è la stessa della direzione di  $v$ :  $45.0$  sopra l'asse  $x$  negativo.

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2}}{\Delta t} = \frac{5\sqrt{2} \text{ m/s}}{100.0 \text{ s}} = 0.0229 \text{ m/s}^2$$

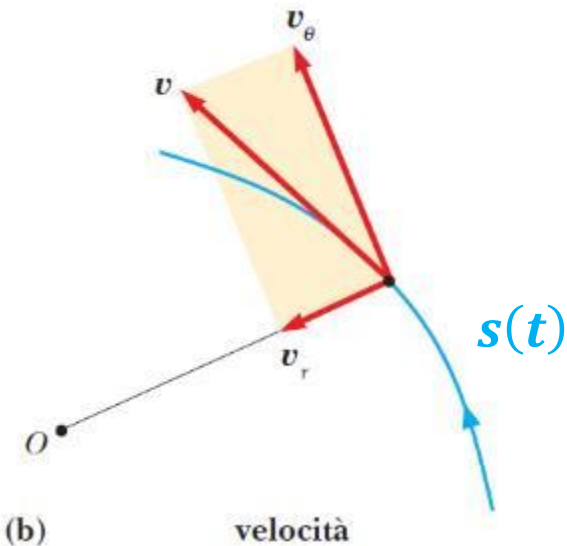


$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_T = v \hat{u}_T$$

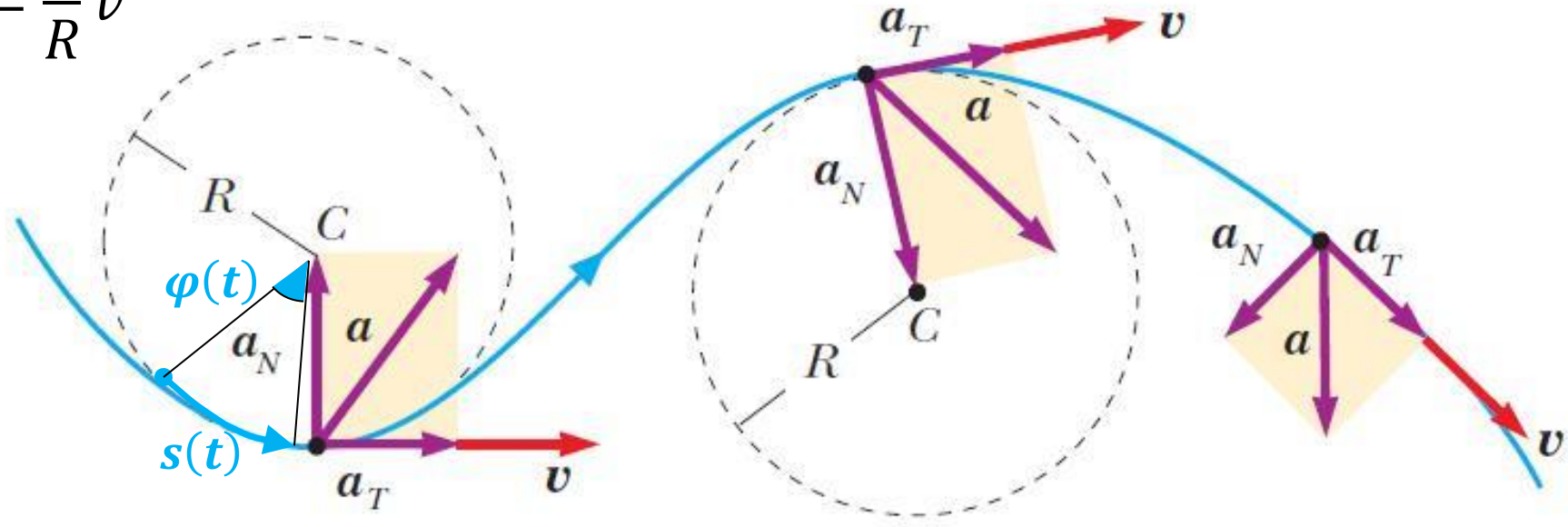
La velocità è sempre tangente alla traiettoria, ma può essere scomposta lungo il vettore lungo il raggio di curvature ed ortogonale ad esso.



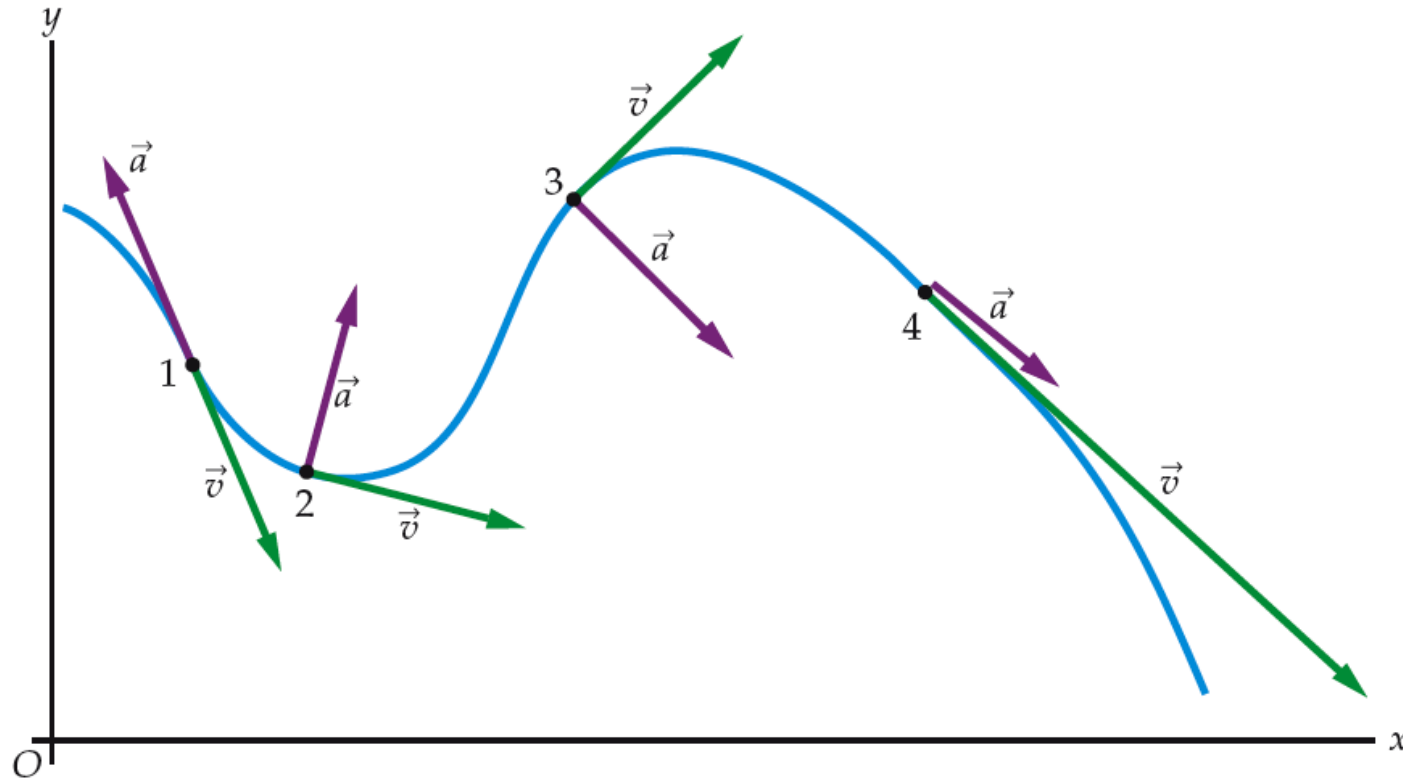
$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

# E l'accelerazione in coordinate polari?

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$



$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (v \hat{u}_T) = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + v \frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + v \frac{d\varphi}{dt} \hat{u}_N = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + \frac{v^2}{R} \hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$



Il vettore velocità punta sempre nella direzione del moto.  
Il vettore accelerazione può puntare in qualsiasi direzione.



## Moto circolare – $R = \text{costante}$

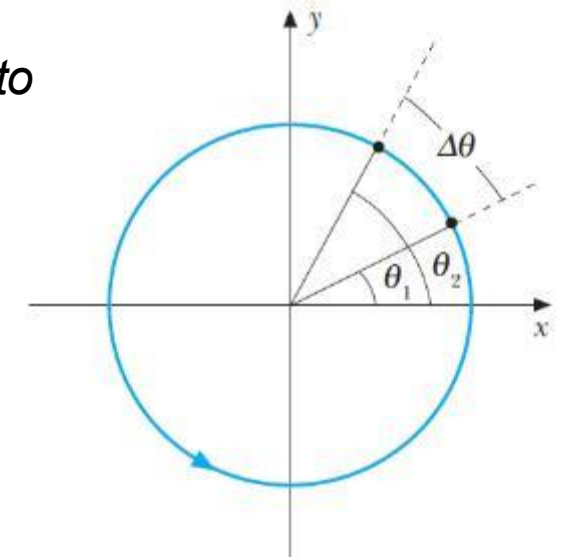
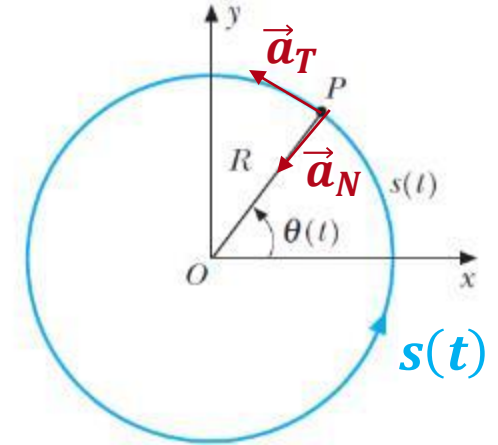
In un moto circolare la velocità anche se in modulo costante **cambia continuamente direzione**.

Il moto è quindi accelerato e ha una accelerazione diversa da zero diretta verso il centro della circonferenza, detta **accelerazione centripeta**  $\vec{a}_N$ .

Se  $v = \text{costante}$  allora il moto si dice *moto circolare uniforme*

Se  $a_T = \text{costante}$  allora il moto si dice *moto circolare uniformemente accelerato*

La traiettoria  $s(t)$  è descritta dall'angolo  $\theta(t)$   $\Rightarrow \theta(t) = \frac{s(t)}{R}$



Positivo senso antiorario



# Spostamento angolare e velocità

Definizione di **spostamento angolare**:  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \text{ rad}$

Definizione di **velocità angolare istantanea**:

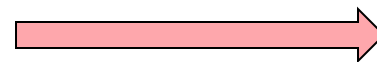
$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2\pi f$$

## Velocità lineare vs velocità angolare

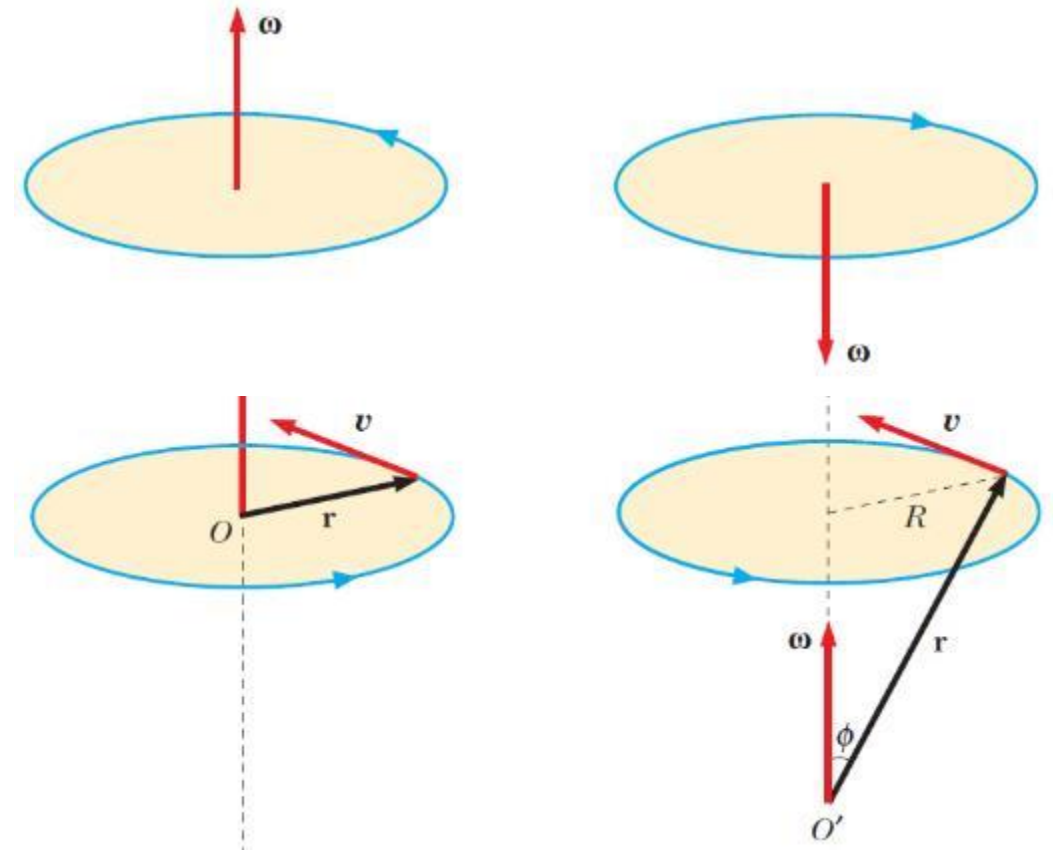
Per un punto che si muove in una traiettoria circolare di raggio  $R$ , la distanza lineare percorsa lungo la traiettoria circolare durante uno spostamento angolare di  $\Delta\theta$  (in radianti) è la lunghezza dell'arco  $s = R \Delta\theta$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt} = R\omega$$

Espressione vettoriale

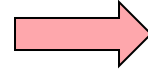


$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Se  $v = \text{costante} \rightarrow \text{moto circolare uniforme}$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$



$$s(t) = s_0 + vt$$

Se  $a_T = \text{costante} \rightarrow \text{moto circolare uniformemente accelerato}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = R \frac{d^2s}{dt^2} = R \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$



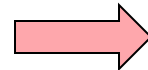
$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$v(t) = v_0 + a_T t$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_T t^2$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \rightarrow \alpha d\theta = \omega d\omega$$



$$\int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2$$



## Esercizio – accelerazione non costante

Descrivere il moto circolare in cui  $\alpha = -k\omega$ , con la costante  $k$  positiva.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -k\omega \rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -k dt \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \omega_0 e^{-kt}$$

Moto smorzato esponenzialmente

Se l'angolo iniziale  $\theta_0$  è nullo, quale è l'angolo di arresto?

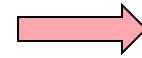
$$\theta(\infty) = \int_0^{\infty} \omega(t) dt = -\frac{\omega_0}{k} e^{-kt} \Big|_0^{\infty} = \frac{\omega_0}{k}$$



## Esercizio – moto circolare armonico

Descrivere il moto circolare in cui  $\alpha = -k^2\theta$ .

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} = -k^2\theta \rightarrow \omega d\omega = -k^2\theta d\theta$$



per

$$\omega_0 = 0$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 \Big|_{\omega_0}^{\omega} = -k^2 \frac{1}{2}\theta^2 \Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

$$\omega^2 + k^2\theta^2 = k^2\theta_0^2$$

Ma allora

$$\theta = \theta_0 \sin(kt + \varphi)$$

$$\omega = k\theta_0 \cos(kt + \varphi)$$



# Notazione vettoriale

La velocità angolare è un vettore:  $\vec{v}$   
 $= \vec{\omega} \times \vec{r}$

→ Anche l'accelerazione è un vettore:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

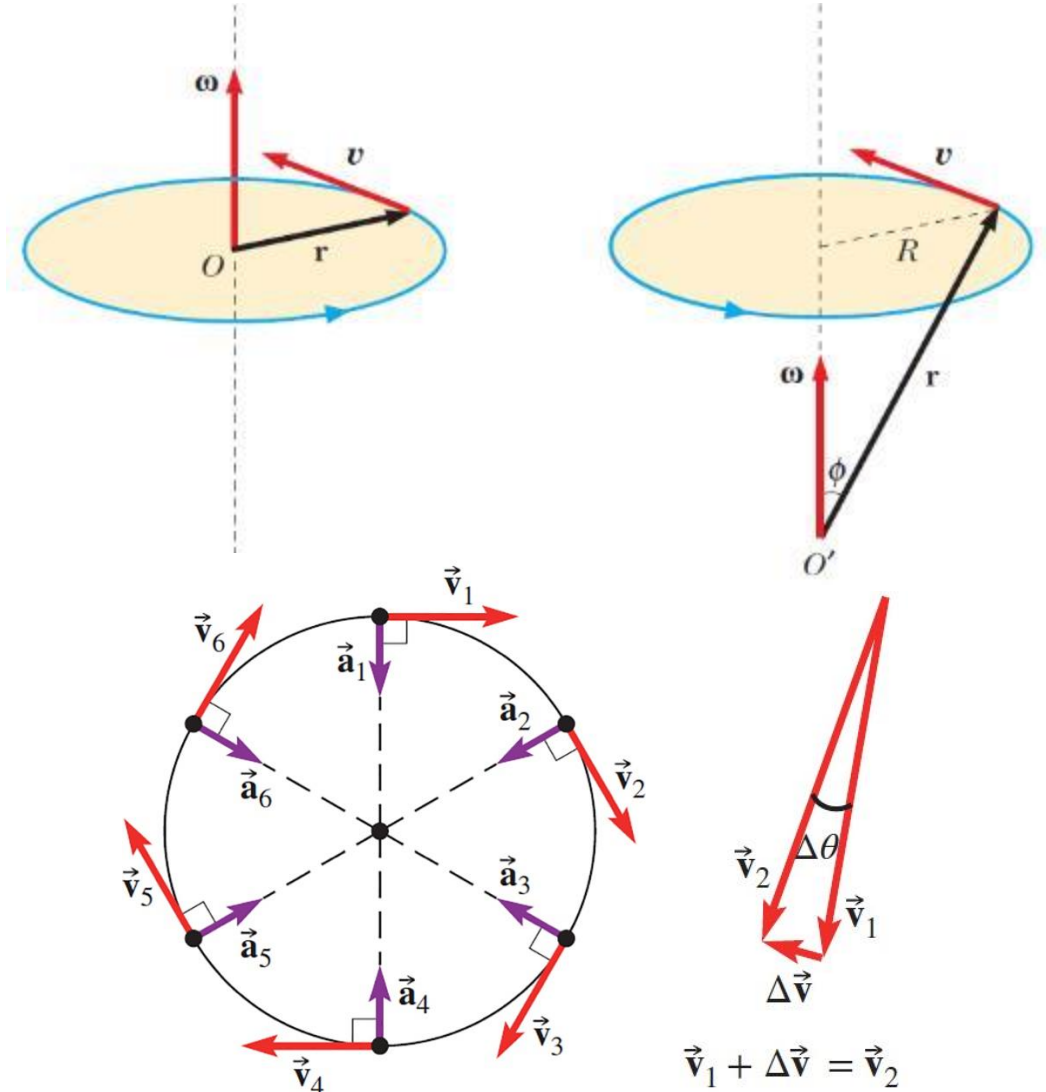
$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Accelerazione  
tangenziale o  
angolare

$$a_T = \alpha R$$

Accelerazione  
centripeta

$$a_N = \omega^2 R$$
$$= v\omega$$

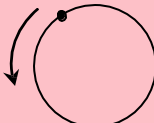
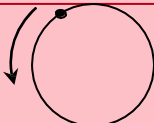
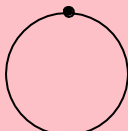
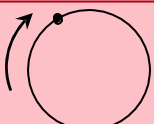
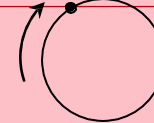




# Esercizio

Una ruota panoramica alla fiera della contea locale può ruotare in entrambe le direzioni durante una corsa.

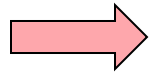
Completare la tabella seguente indicando il segno della velocità angolare e dell'accelerazione angolare agli istanti indicati.

| Situazione                                                  |                                                                                       | Segno di $\omega$ | Segno di $\alpha$ |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------|
| <b>accelera</b>                                             |    |                   |                   |
| <b>rallenta</b>                                             |    |                   |                   |
| <b>si ferma per un istante, ruotava in senso antiorario</b> |    |                   |                   |
| <b>accelera</b>                                             |   |                   |                   |
| <b>rallenta</b>                                             |  |                   |                   |



# Moto circolare e moto armonico

Se  $v = \text{costante} \rightarrow \text{moto circolare uniforme}$



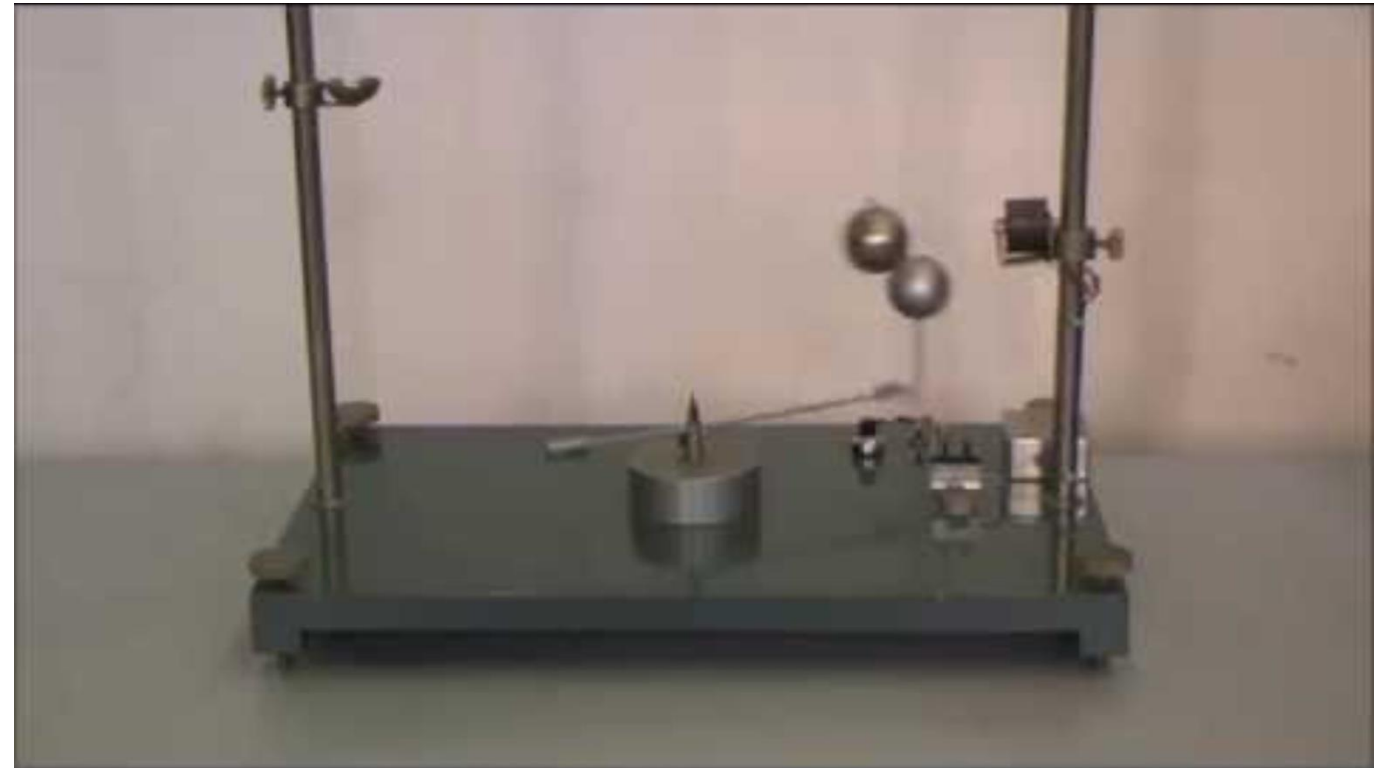
$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

$$s(t) = s_0 + vt$$

Proiettando sugli assi cartesiani

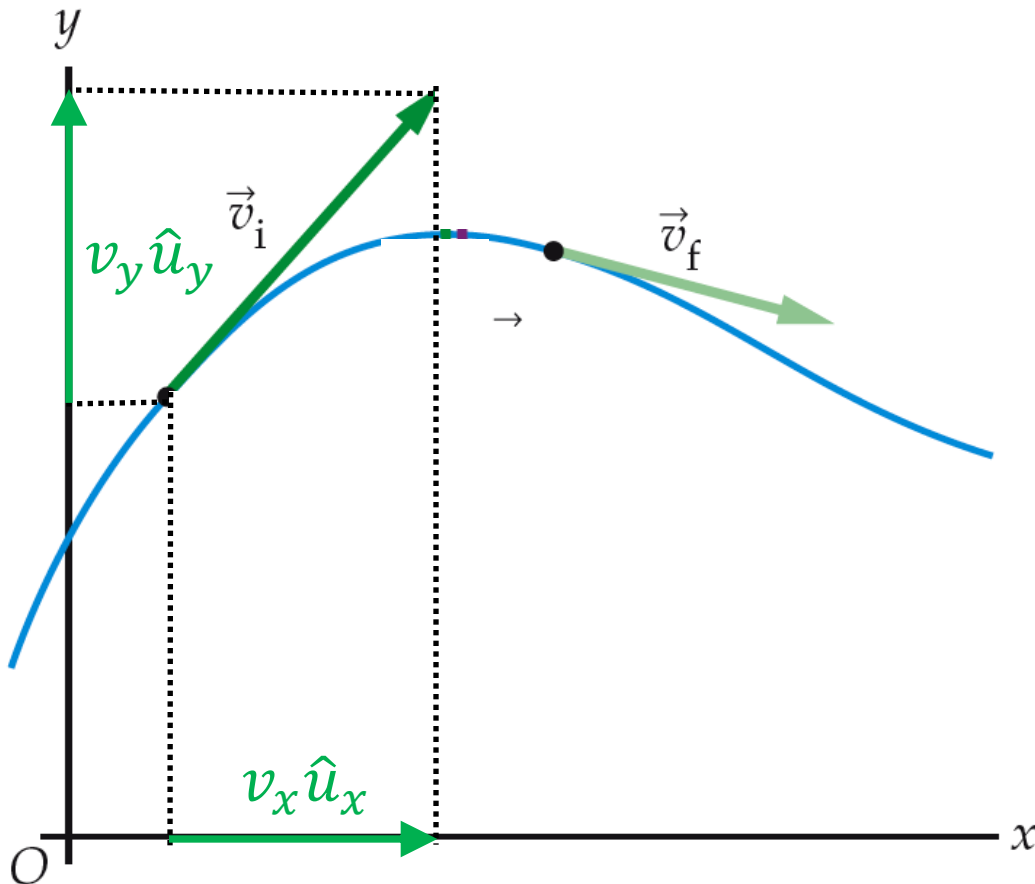
$$x(t) = R \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$y(t) = R \sin(\omega t + \theta_0)$$



**Il moto circolare è la composizione di due moti armonici**

La velocità è un vettore come tutti gli altri  
→ Si può scomporre lungo gli assi.



Prendiamo il vettore velocità  $\vec{v}$  applicato nel punto P.

Le sue componenti nel sistema di riferimento  $xOy$ , saranno  $v_x$  e  $v_y$

Inoltre varranno le seguenti regole/notazioni:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = \frac{dx}{dt} \hat{u}_x + \frac{dy}{dt} \hat{u}_y$$

$$\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



# SCOMPOSIZIONE DEL MOTO!!!

Il moto di un corpo si può studiare (una volta scelto un opportuno sistema di riferimento) **SCOMPONENDO IL MOVIMENTO** sugli assi coordinati

La **SCELTA DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO** diventa fondamentale nella risoluzione dei problemi

Quale è la traiettoria?

Quale è la massima altezza raggiunta?

Quale è la massima gittata?

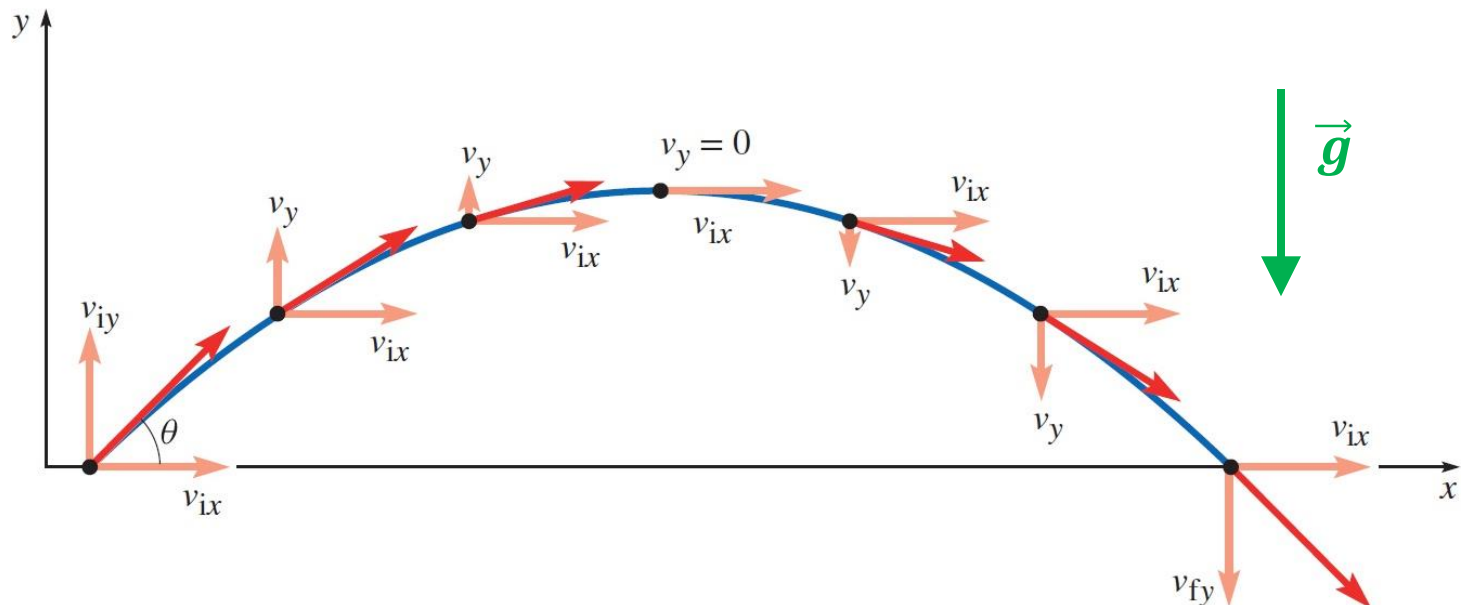
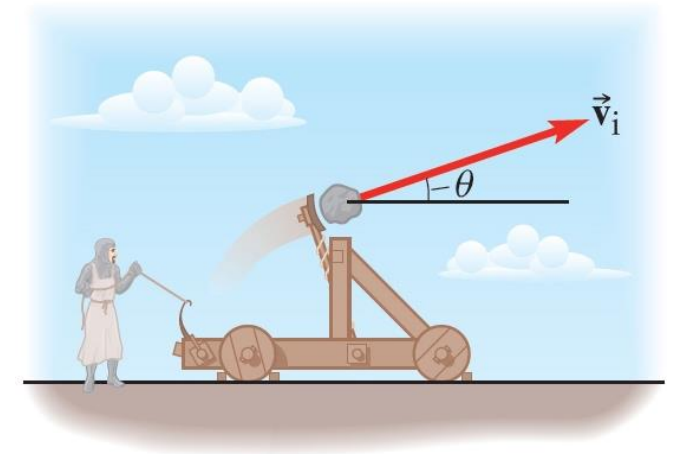
Accelerazione  $\mathbf{a} = -\vec{g} = -g\hat{u}_y$  solo lungo  $\hat{u}_y$

Velocità iniziale nel piano  $\hat{u}_x\hat{u}_y$

$$v_{iy} = v_i \sin \theta$$

$$v_{ix} = v_i \cos \theta$$

- Il moto è solo nel piano  $\hat{u}_x\hat{u}_y$
- Nel piano  $\hat{u}_x$  moto uniforme
- Nel piano  $\hat{u}_y$  moto uniformemente accelerato

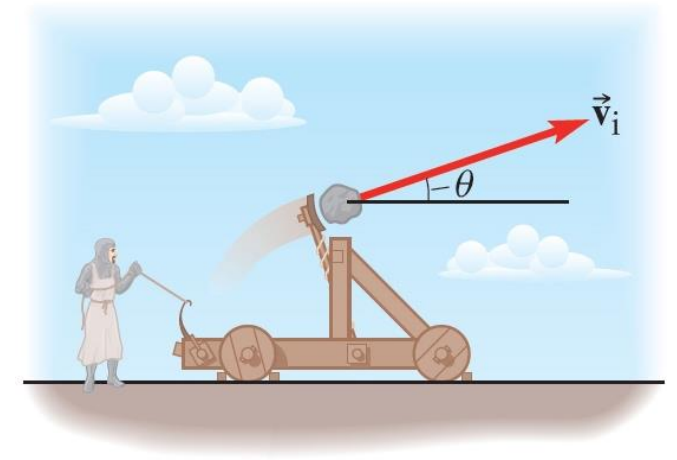




# Moto del proiettile

Velocità

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt = \vec{v}_0 - gt\hat{u}_y \\ &= (v_i \cos \theta)\hat{u}_x + (v_i \sin \theta - gt)\hat{u}_y\end{aligned}$$



Leggi orarie

$$x = v_i t \cos \theta \qquad y = v_i t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Traiettoria

Si trova esprimendo  $t$  tramite  $x$

$$\begin{aligned}y &= v_i \left( \frac{x}{v_i \cos \theta} \right) \sin \theta - \frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_i \cos \theta} \right)^2 \\ y &= x \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} \frac{g}{v_i^2 \cos^2 \theta} x^2\end{aligned}$$

**È una parabola!**



# Moto del proiettile

## Gittata

$$0 = x \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} \frac{g}{v_i^2 \cos^2 \theta} x^2$$

Impongo  $y = 0$   
nella traiettoria

$$x_{G1} = 0 \quad x_{G2} = \frac{2 \operatorname{tg} \theta v_i^2 \cos^2 \theta}{g} = \frac{v_i^2}{g} 2 \cos \theta \sin \theta = \frac{v_i^2}{g} \sin 2\theta = 2x_M$$

Per simmetria  
Posizione del  
massimo



Gittata  
massima

$$\frac{dx_2}{d\theta} = \frac{v_i^2}{g} \frac{d(\sin 2\theta)}{d\theta} = 2 \frac{v_i^2}{g} \cos 2\theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, x_{G2} = \frac{v_i^2}{g}$$

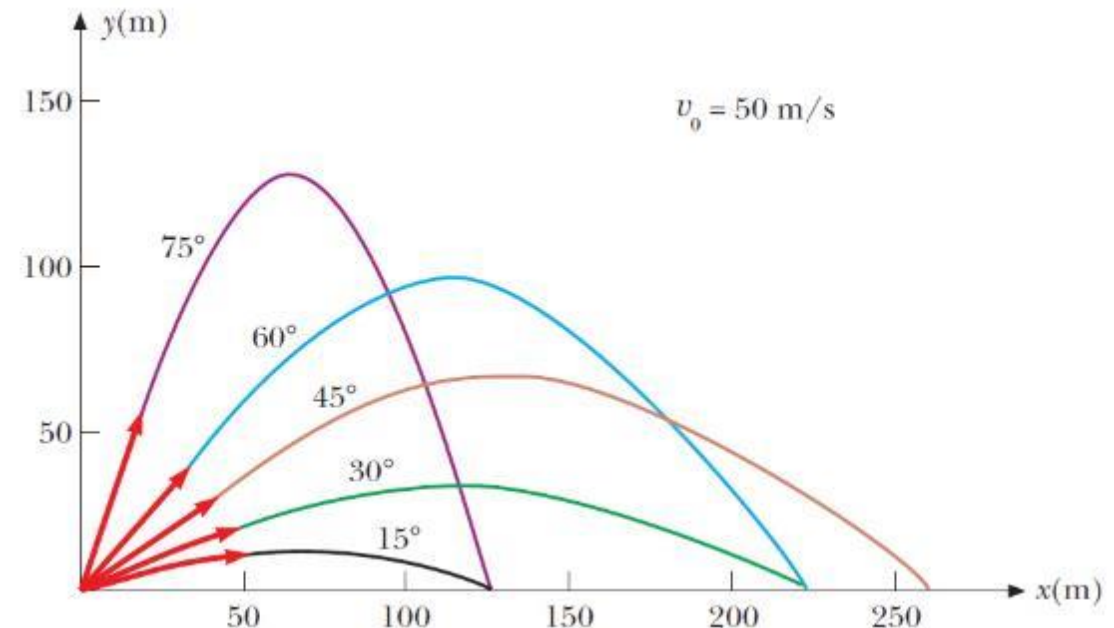
## Altezza massima

$$y(x_M) = y_M = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

## Tempo di volo

$$x_{G2} = v_i t_{G2} \cos \theta$$

$$t_{G2} = \frac{v_i}{g} \sin \theta$$



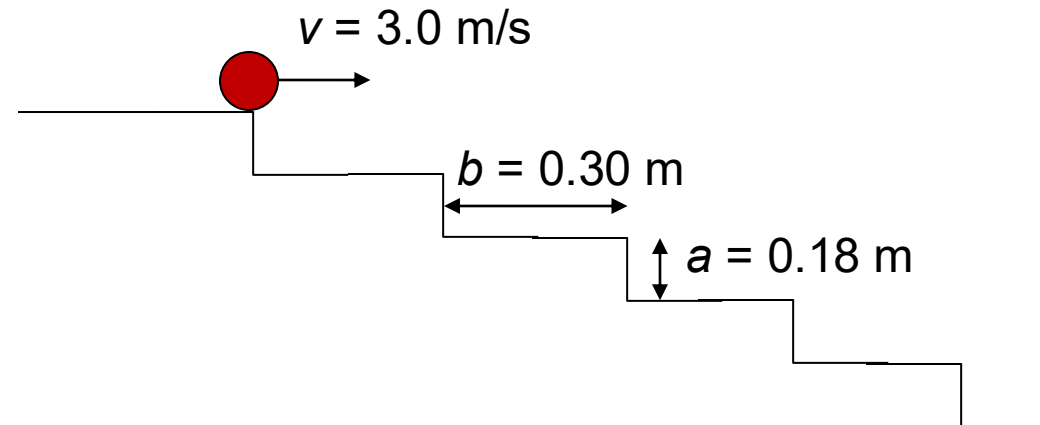


## Exercise

Una biglia rotola in modo da essere proiettata orizzontalmente rispetto al pianerottolo superiore di una scala.

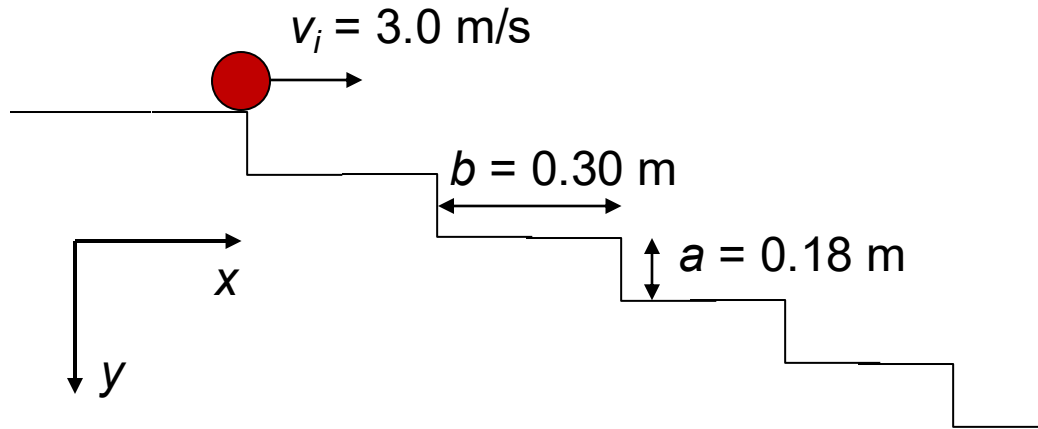
La velocità iniziale della biglia è di 3.0 m/s.  
Ogni gradino è alto 0.18 m (a) e largo 0.30 m (b).

Quale gradino colpisce per primo la biglia?





**Strategia** definiamo +y rivolto verso il basso.



$$v_{iy} = 0, \quad v_{ix} = v_x = v_i$$

$$\Rightarrow \Delta x = v_i \Delta t \quad \text{e} \quad \Delta y = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

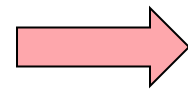
Definiamo il numero del gradino  $n = \frac{x}{b} = \frac{y}{a}$

Tale che

$n$  da 0 a 1 rappresenta il gradino 1

$n$  da 1 a 2 rappresenta il gradino 2, etc.

All'istante  $\bar{t}$  la  
biglia colpisce l'  
 $n$ -esimo gradino



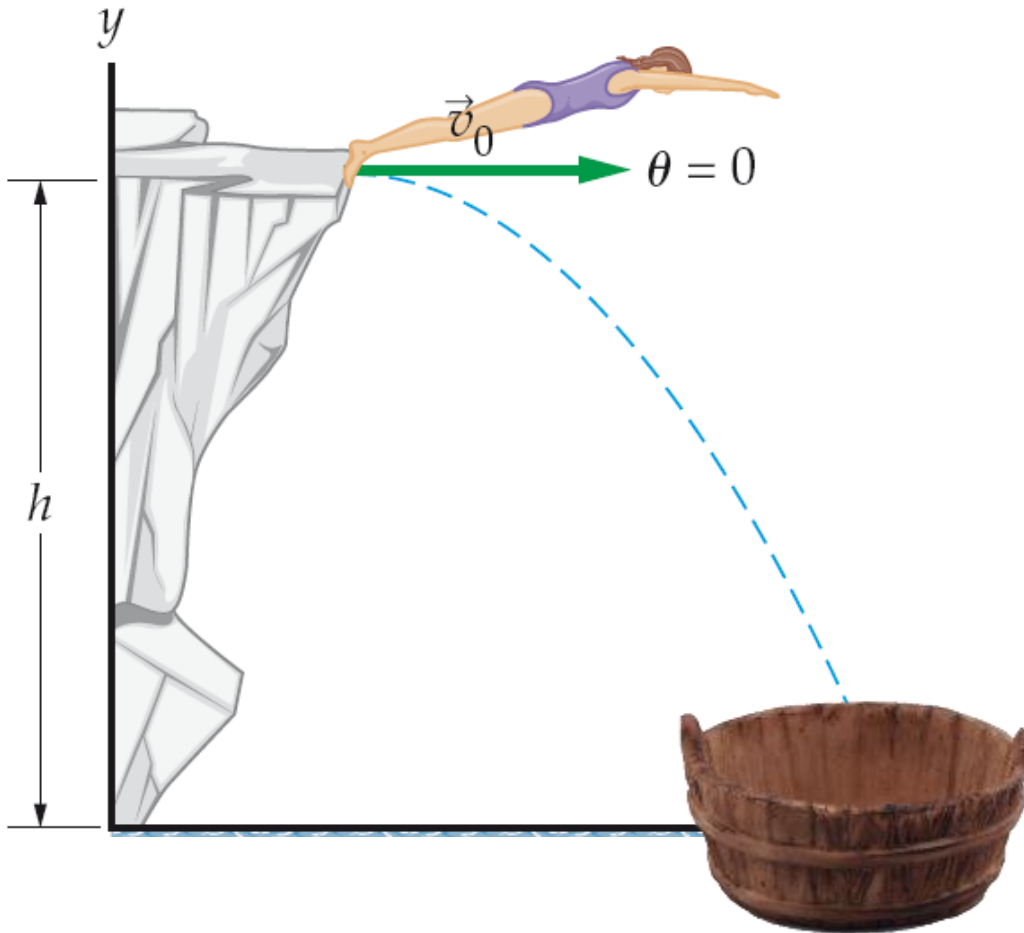
$$\begin{aligned} nb &= v_i \bar{t} \\ na &= \frac{1}{2} g \bar{t}^2 \end{aligned}$$



$$na = \frac{1}{2} g \left( \frac{nb}{v_i} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{2a}{b^2} \frac{v_i^2}{g} = 3.7$$

Il valore di  $n$  è tra 3 e 4, quindi la biglia colpisce il gradino numero 4.





*Tuffo da  $h = 12\text{m}$*

*Con che velocità devo lanciarmi (in orizzontale) per atterrare su una tinozza posta a  $x_t = 5\text{m}$  di distanza?*

*A che velocità arrivo sulla tinozza?*

Leggi orarie

$$x = v_0 t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$t_t = \sqrt{\frac{h \cdot 2}{g}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 2}{g}} \approx \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{10}} \approx \frac{5}{3} [\text{s}]$$

$$v_0 = \frac{x_t}{t_t} = \frac{5 \cdot 3}{5} \approx 3 [\text{m/s}]$$

Se un punto  $P$  si muove lungo una **traiettoria**  $s(t)$ , in un sistema di riferimento con una **origine**  $O$  e un **posizione**  $\vec{r}(t)$ :

$$\vec{r}(t) = OP = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y + z(t)\hat{u}_z$$

**velocità**  $\vec{v}(t)$ :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_T = v\hat{u}_T$$

**accelerazione**  $\vec{a}(t)$ :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Il moto può essere scomposto lungo gli assi del **sistema di riferimento**.

Le leggi orarie si ottengono risolvendo le relative equazioni differenziali.



## Moto oscillatorio

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

## Moto circolare

$$R = \text{cost}$$

distanza dall'asse di rotazione

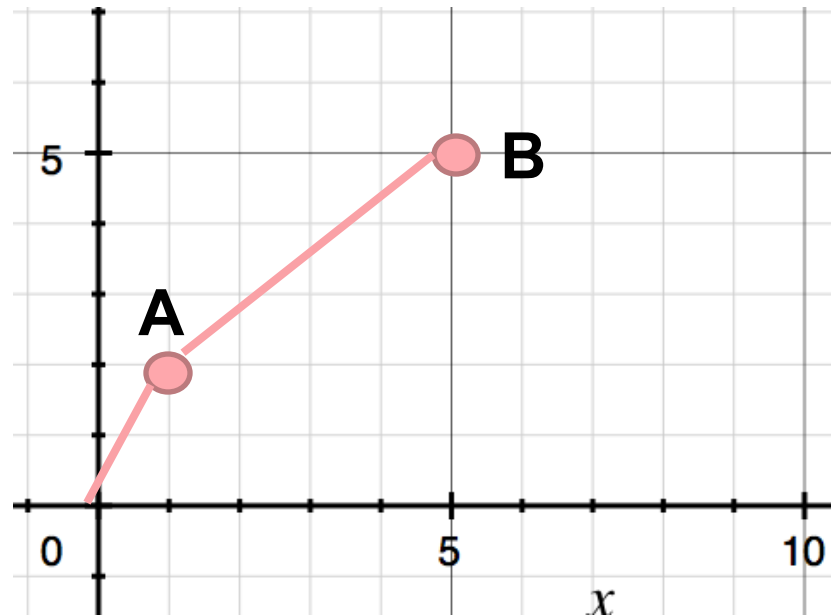
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$v = \omega \times r$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$



- Discutere la differenza tra il concetto di velocità media e velocità istantanea
- Dimostrare la legge del moto uniforme a partire dalla equazione differenziale  $dx = v dt$
- Che cosa cambia nelle equazioni del moto tra moto in 1 e 2 dimensioni?
- Perché si può operare la scomposizione del moto nelle componenti?
- È importante la scelta del sistema di riferimento nello studio del moto? Motivare
- Lungo una traiettoria come sono diretti i vettori spostamento, velocità istantanea, accelerazione istantanea?
- Lungo una traiettoria, il vettore velocità media e il vettore velocità istantanea sono paralleli?
- Controllare che tutte le grandezze nelle equazioni del moto abbiano la stessa dimensione fisica (es  $[L]/[T]$ )



Q: dati i due punti sul piano  $x,y$ ,  $A=(1,2)$  e  $B=(5,5)$ , sapendo che il tratto  $OA$  è stato effettuato in 1 sec, e  $AB$  in 2 sec, calcolare:

- Componenti e Modulo della velocità media nel tratto  $OB$
- Componenti e Modulo Accelerazione media nel tratto  $OB$



- Q: Sono su un elicottero fermo a 10mila metri dal suolo. Mi lanciano fuori, quando ci metto a cadere? (ipotesi = no attrito atmosferico)
- Q: Sono su un elicottero che sta cadendo a 70km/h e si trova a 10mila metri dal suolo. Mi lanciano fuori, quando ci metto a cadere? (ipotesi = no attrito atmosferico)
- Q: Mi tuffo da una roccia alla 15m. A che velocità arrivo a toccare l'acqua?
- Q: Lancio un sasso ad un angolo di 30 gradi con  $v=10\text{m/s}$ , dopo quanto tocca terra? A che distanza? Quale è la massima altezza raggiunta?