UNIVERSITÀ DI PADOVA · 1222

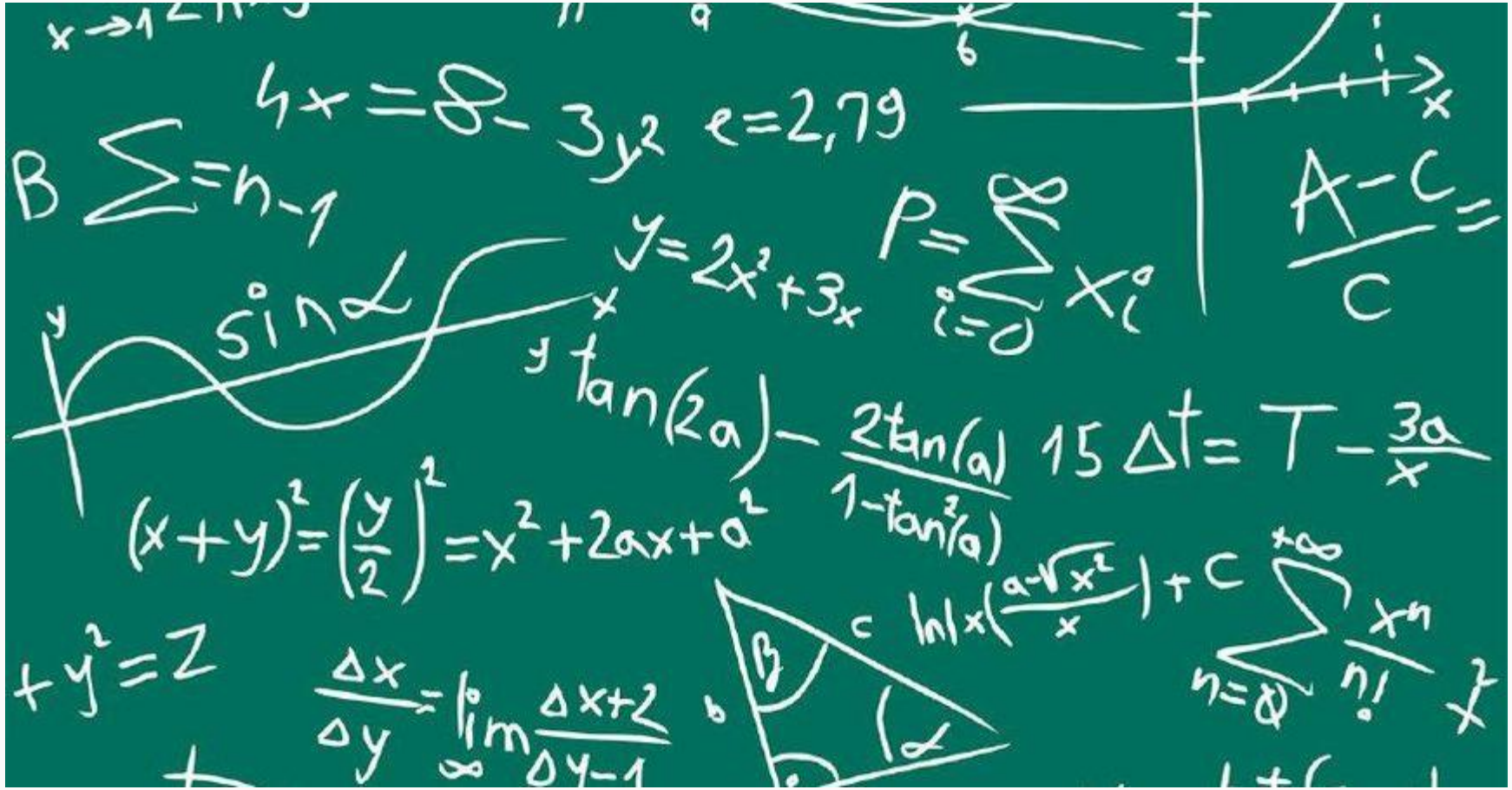
Lez 1. Richiami matematici e operazioni tra vettori

Corso di Fisica Generale – Pt1
Chimica Industriale 26/27

Docente:

Alessandro Patelli
alessandro.patelli@unipd.it



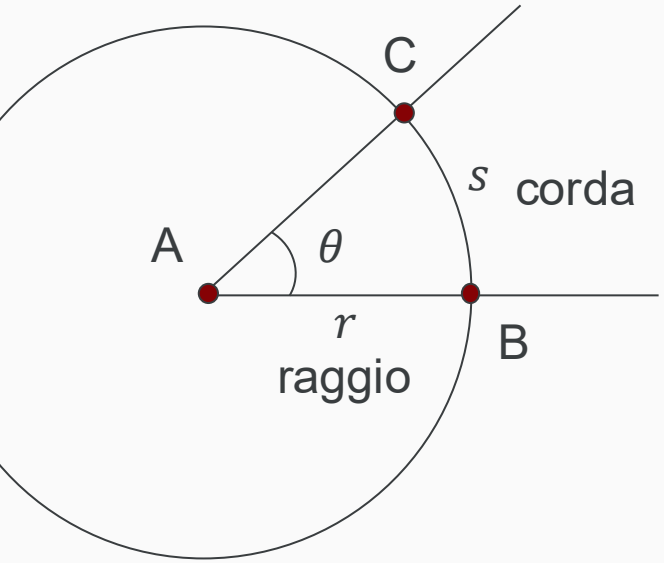

4x=8-3y²
e=2,79
B Σ=n-1
y=2x²+3x
P=Σ x_i
A-C=
C
sin α
y tan(2a)-2tan(a)/1-tan²(a)
15 Δt=T-3a/x
(x+y)²=(y/2)²=x²+2ax+a²
+y²=Z
Δx/Δy=lim Δx+2/Δy-1
c ln|x((a-√x²)/x)|+C
η=0
η!
x²







Il radiante



L'angolo θ sotteso dalla corda s è definito in radiant come

$$\theta = \frac{s}{r}$$

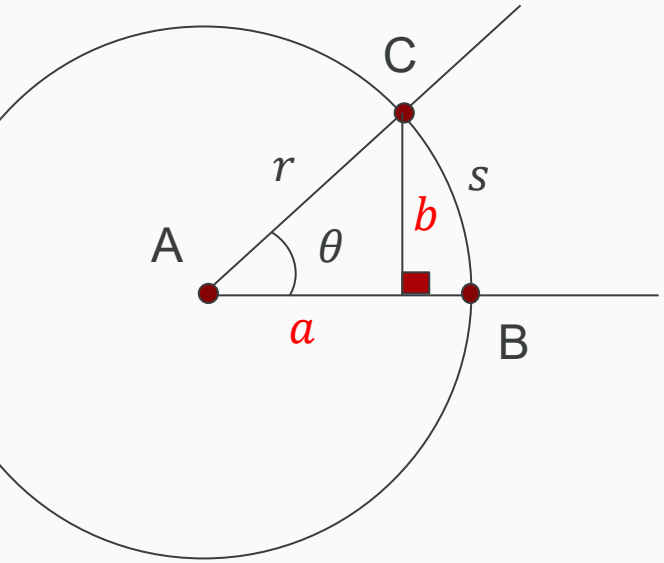
Se s è una semi-circonferenza

$$\theta = \frac{\pi r}{r} = \pi = 180°$$

Quindi $$1\,rad = \frac{180}{\pi} \cong 57°$$

$$30° = \frac{30}{180}\pi\,rad = \frac{1}{6}\pi\,rad \cong 0.52\,rad$$

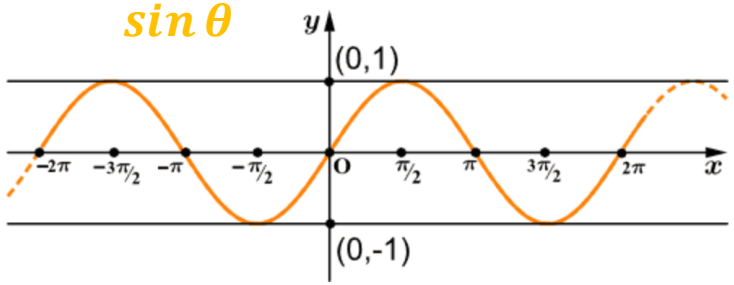
Funzioni trigonometriche



Le funzioni trigonometriche

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r}$$



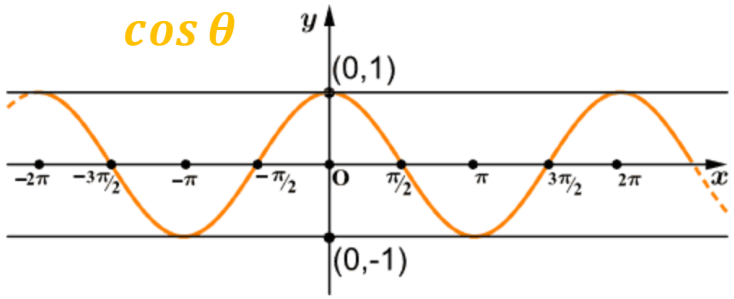
Proprietà

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin\theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\frac{\pi}{2}$ sfasamento



Formule di prostaferesi	
$\sin(\alpha)+\sin(\beta)$	$2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin(\alpha)-\sin(\beta)$	$2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha)+\cos(\beta)$	$2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha)-\cos(\beta)$	$-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

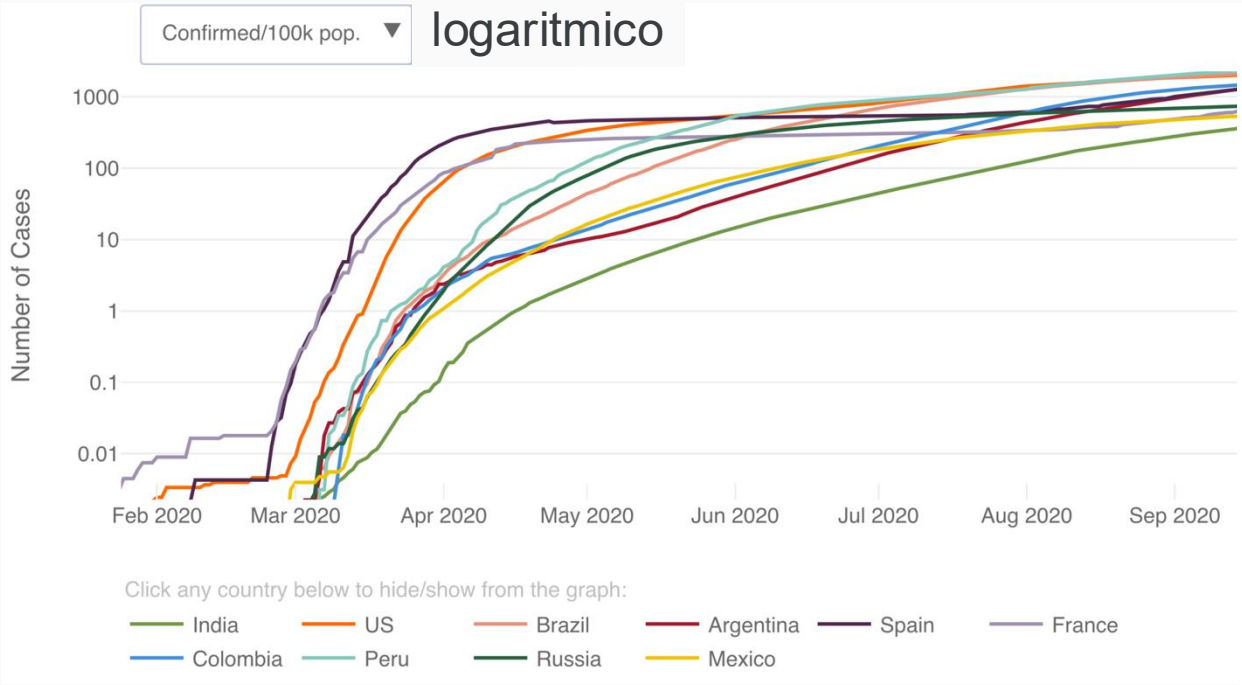
Formule di duplicazione	
$\cos(2\,\alpha)$	$\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$
$\sin(2\,\alpha)$	$2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
$\tan(2\,\alpha)$	$\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$
$\cot(2\,\alpha)$	$\frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}$

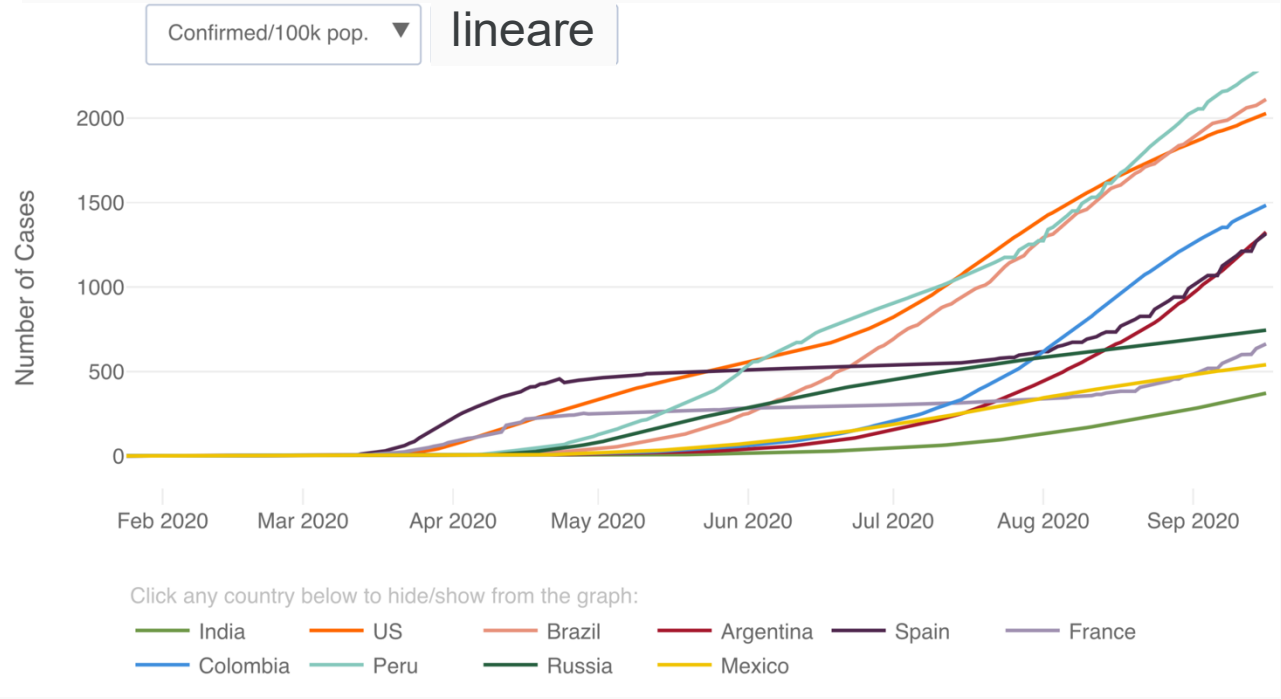
Formule di addizione e sottrazione	
$\cos(\alpha+\beta)$	$\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha-\beta)$	$\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$

Formule di addizione e sottrazione	
$\sin(\alpha+\beta)$	$\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha-\beta)$	$\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$

Elevamento a potenza

COVID 19





Curva cumulative dei casi
Johns Hopkins Coronavirus
Resource Center

Elevamento a potenza

a^n with $a \in R$ and $n \in N$

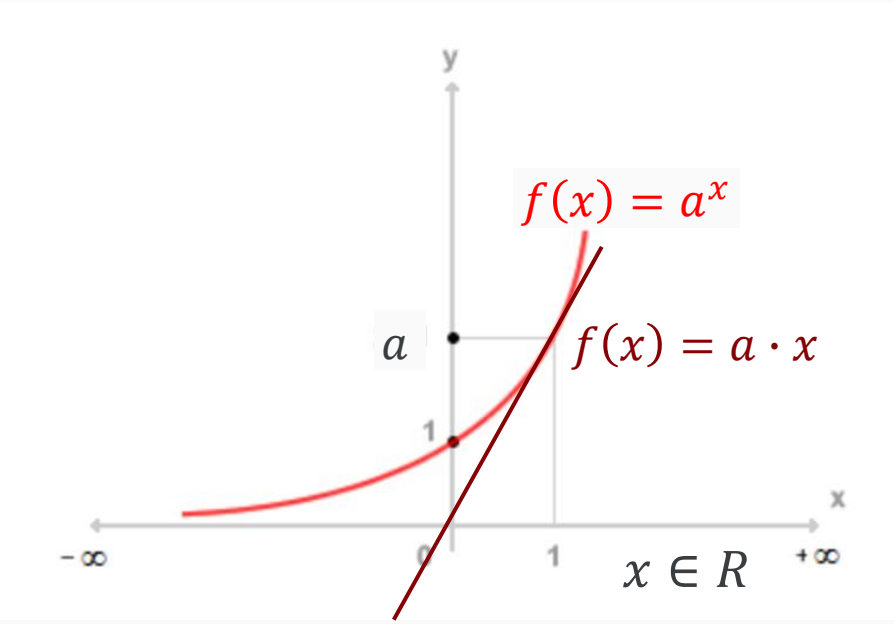
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ times}}$$

properties

$$a^n a^m = a^{n+m}$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$
$$a^n / a^m = a^{n-m}$$
$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

example

$$9^{3/2} = \left(\sqrt[2]{9}\right)^3 = 3^3 = 27$$
$$9^{3/2} = \sqrt[2]{9^3} = \sqrt[2]{729} = 27$$



$$f(x + \Delta x) - f(x) = f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)$$

$$a(x + \Delta x) - a(x) = a(x + 2\Delta x) - a(x + \Delta x)$$

A variation of Δx in x leads to a variation of $f(x + \Delta x) = a\Delta x + f(x)$ for any x

Elevamento a potenza

a^n with $a \in R$ and $n \in N$

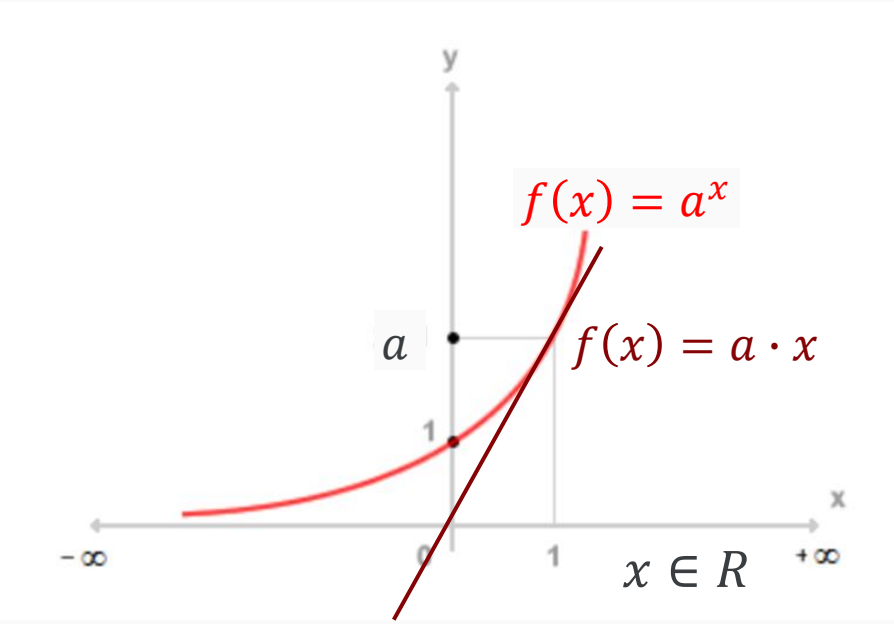
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ times}}$$

properties

$$a^n a^m = a^{n+m}$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$
$$a^n / a^m = a^{n-m}$$
$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

example

$$9^{3/2} = \left(\sqrt[2]{9}\right)^3 = 3^3 = 27$$
$$9^{3/2} = \sqrt[2]{9^3} = \sqrt[2]{729} = 27$$



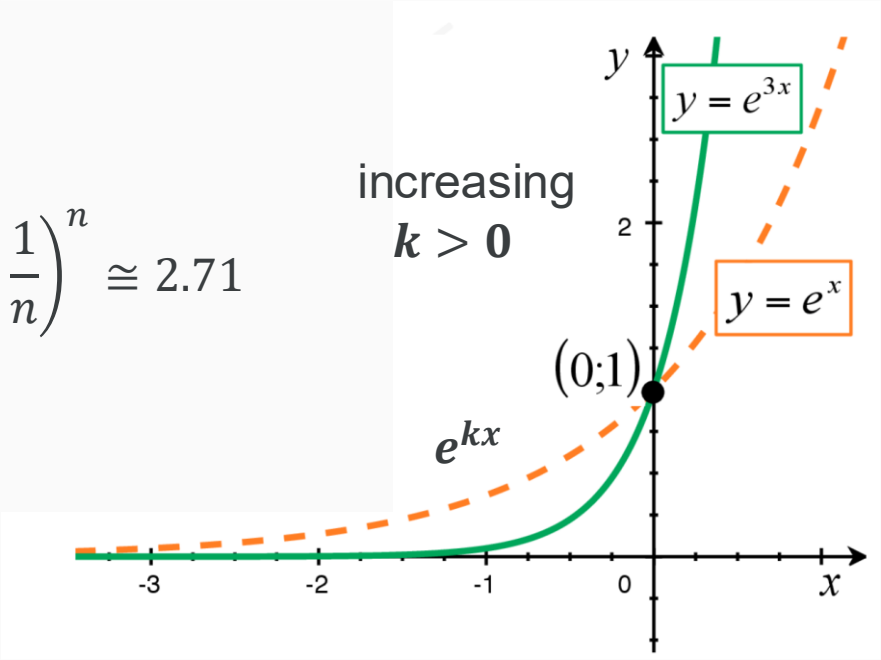
$$\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)} = \frac{f(x+2\Delta x)}{f(x+\Delta x)}$$

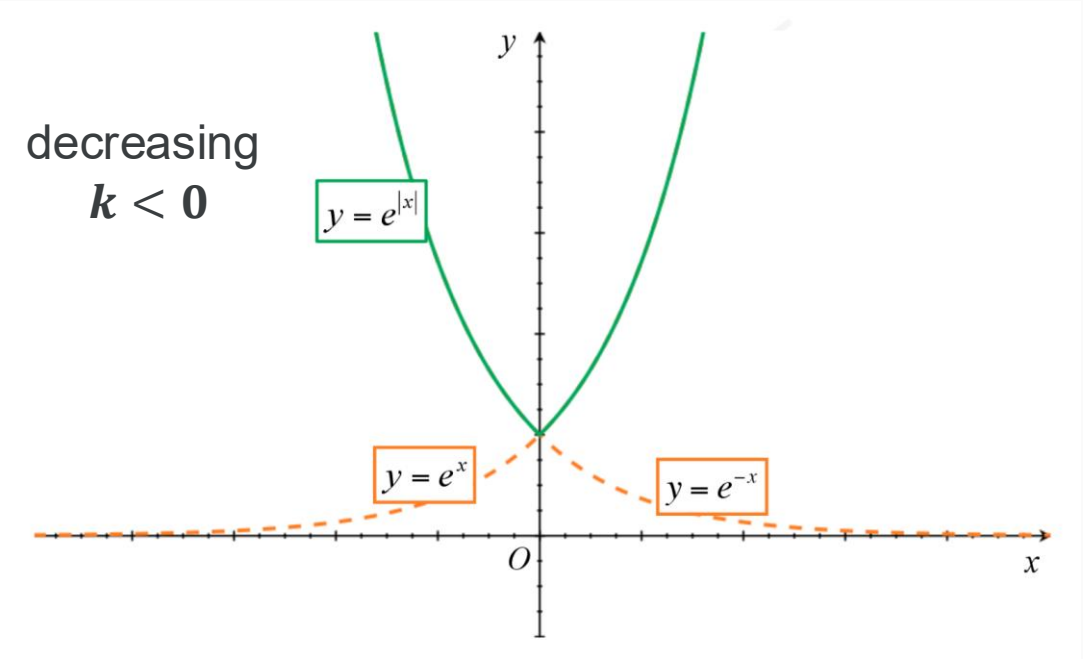
$$\frac{a^{x+\Delta x}}{a^x} = \frac{a^{x+2\Delta x}}{a^{x+\Delta x}}$$

A variation of Δx in x leads to a variation of $f(x+\Delta x) = a^{\Delta x} f(x)$ for any x

Numero di Eulero

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2.71$$

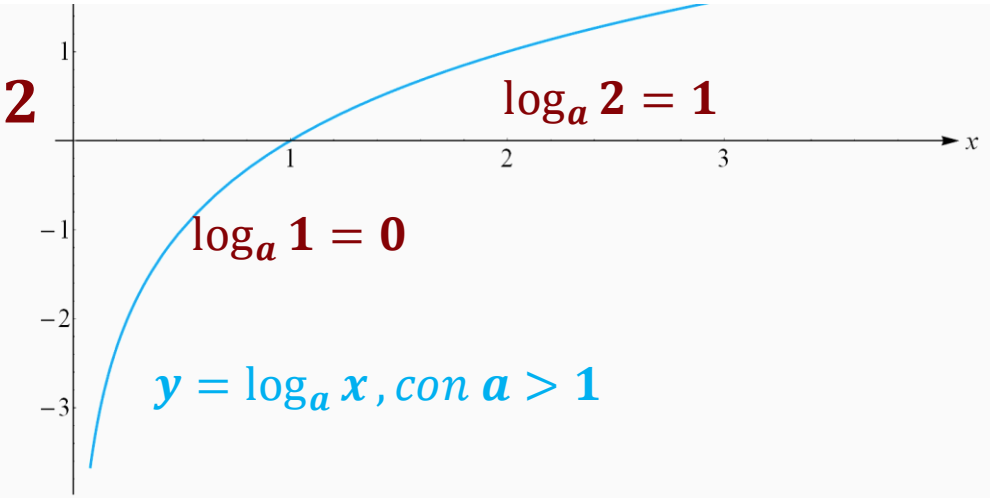




Logaritmi

$$\log_a a^x = x$$
$$\ln e^x = x$$
$$\log_{10} 10^x = x$$

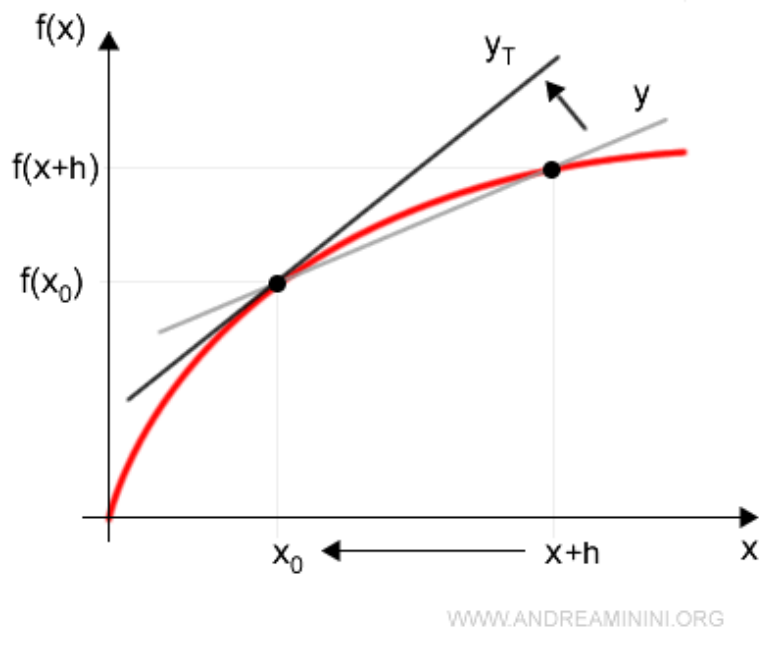
Cambio base $\log_{10} e^x = x \log_{10} e = \log_{10} e \times \ln e^x$





Δx = differenza finita di una variabile $\xrightarrow{\lim_{\Delta x \to 0}}$ dx = differenziale di una variabile

Derivata di una funzione f rispetto a una variabile $(x, y, z, r, t, v, \ldots)$



quanto cambia il valore di una funzione rispetto a variazioni infinitesime dx della variabile

$$df(x) = \frac{df}{dx} dx$$

Sia $u = u(x)$, $v = v(x)$ funzioni derivabili e $c \in \mathbb{R}$.

(Costante) $(c)' = 0$

(Identità) $(x)' = 1$

(Lineare) $(cu)' = c\,u'$

(Somma/Differenza) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(Prodotto) $(uv)' = u'v + uv'$

(Quoziente) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$

(Derivata inversa) $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ con $y = f(x),\ f'(x) \neq 0$

(Derivata logaritmica) $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u},\ u \neq 0$

(Funzione di funzione) $(u(x(t)))' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$

Potenze, esponenziali, logaritmi

$$(x^n)' = n\,x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ (x > 0)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Trigonometriche

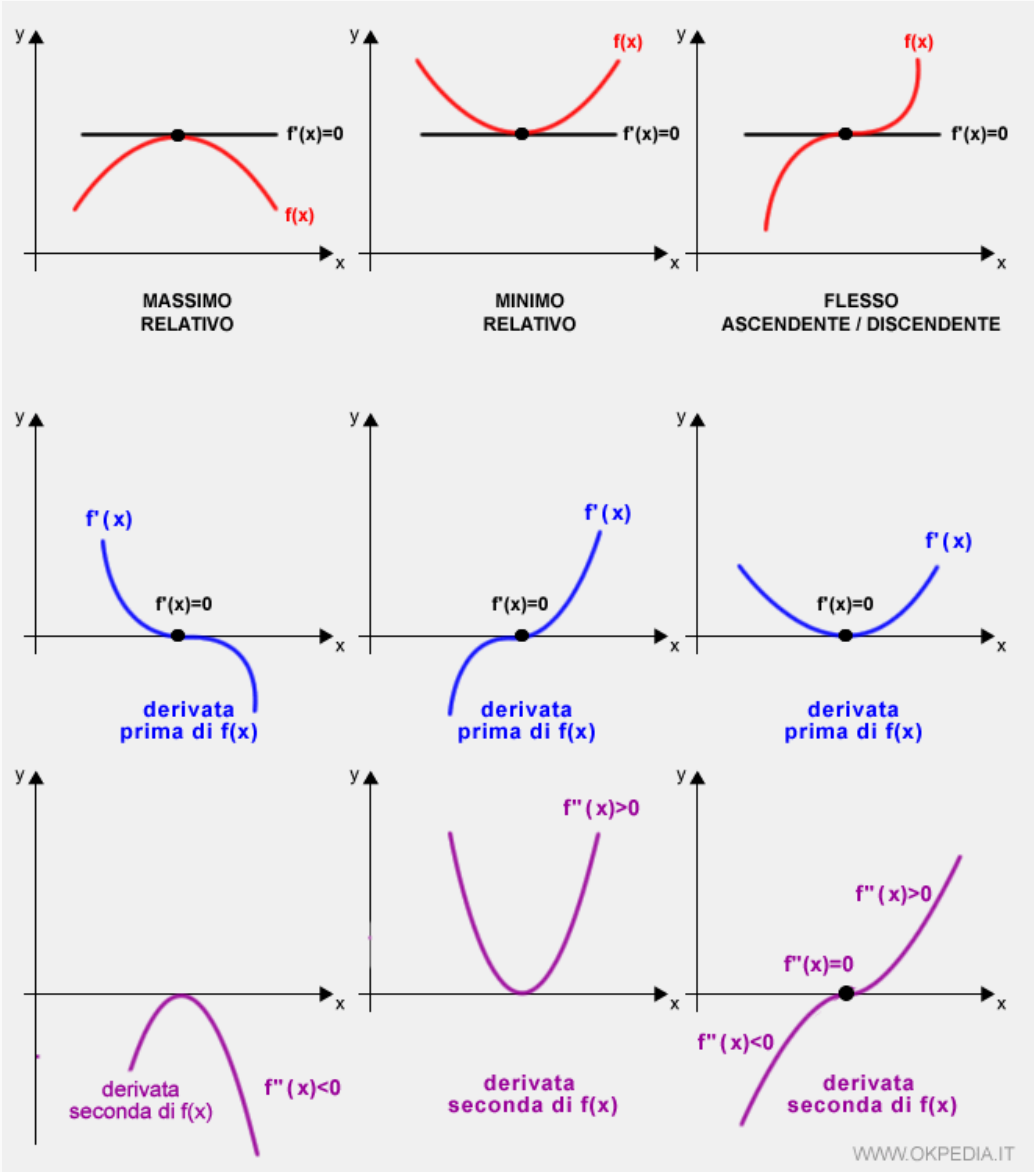
$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

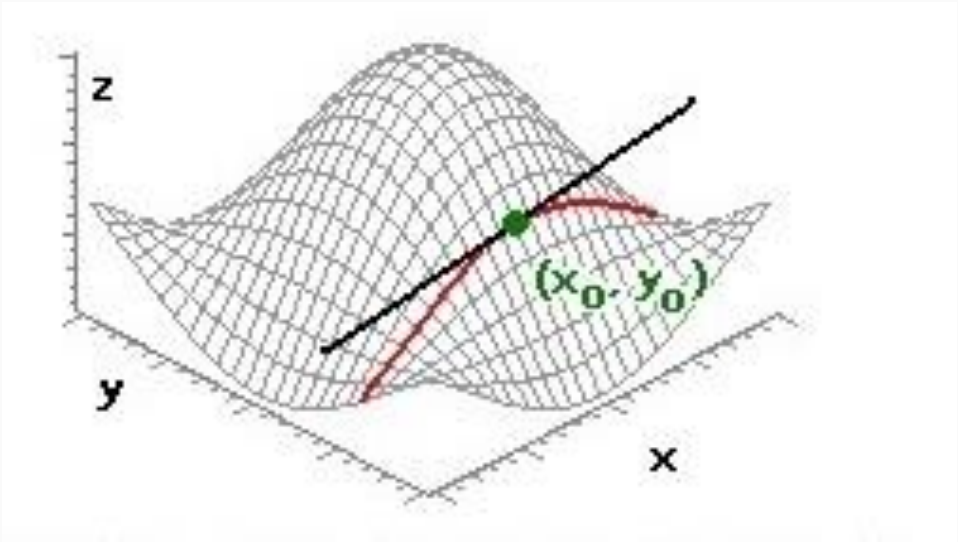


Derivata seconda

$$y' = f'(x), \qquad y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right)$$

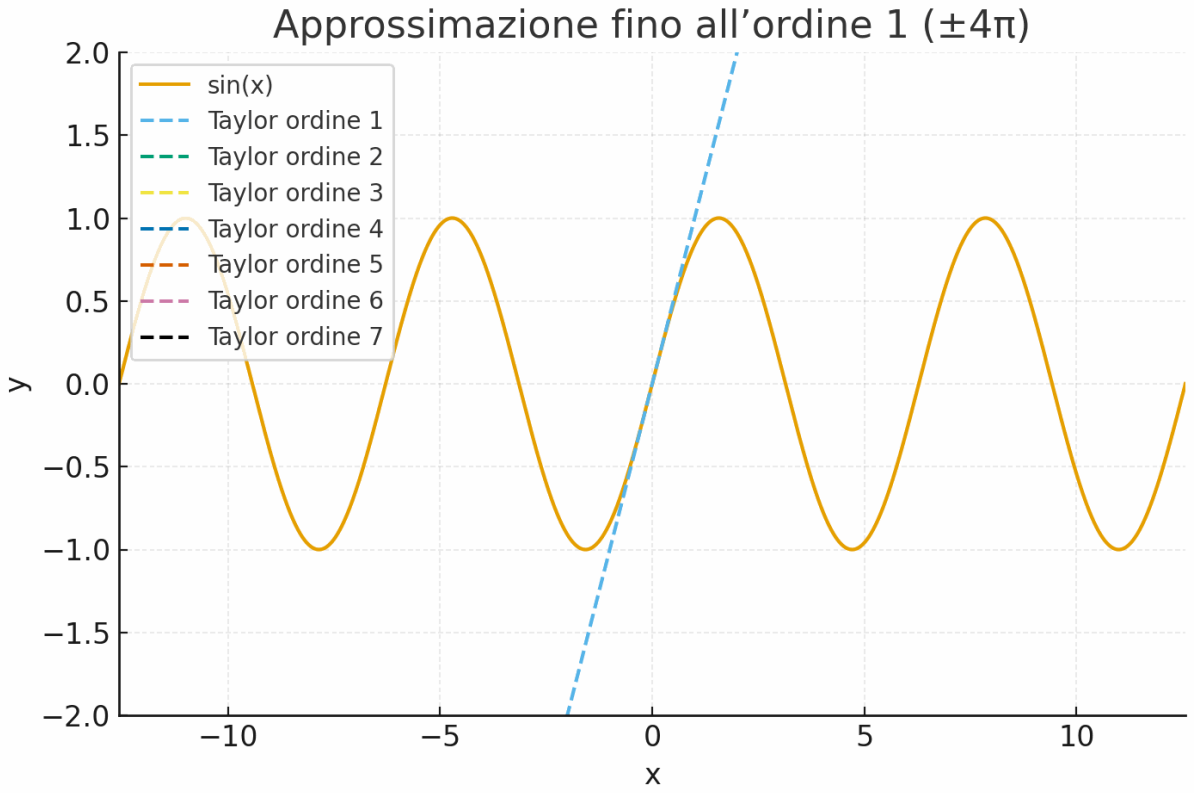
Derivata parziale

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$$



Sviluppi in serie di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} (x - x_0) + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \cdots$$



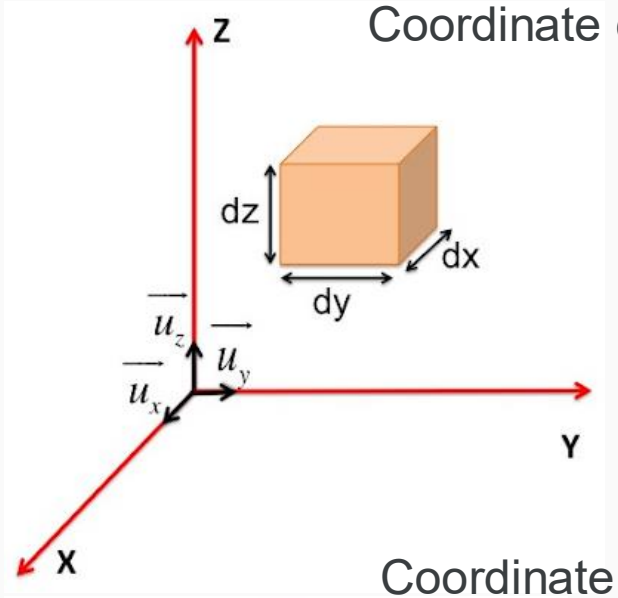
$$f(x) - f(x_0) = \Delta f = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} (x - x_0) + \cdots$$

1° $\left(\frac{d \sin x}{dx}\right)_{x=0} = (\cos x)_{x=0} = 1$

2° $\left(\frac{d^2 \sin x}{dx^2}\right)_{x=0} = \left(\frac{d \cos x}{dx}\right)_{x=0} = (-\sin x)_{x=0} = 0$

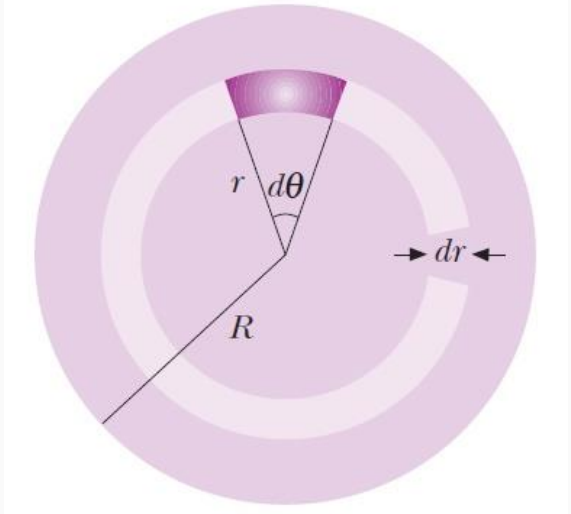
3° $\left(-\frac{d^3 \sin x}{dx^3}\right)_{x=0} = (-\cos x)_{x=0} = -1$

Coordinate cartesiane



$$\int_S f\, dS = \iint_S f\, dxdy \qquad \int_V g\, dV = \iiint_V g\, dxdydz$$

Coordinate polari



$$dS = dr\ rd\theta$$

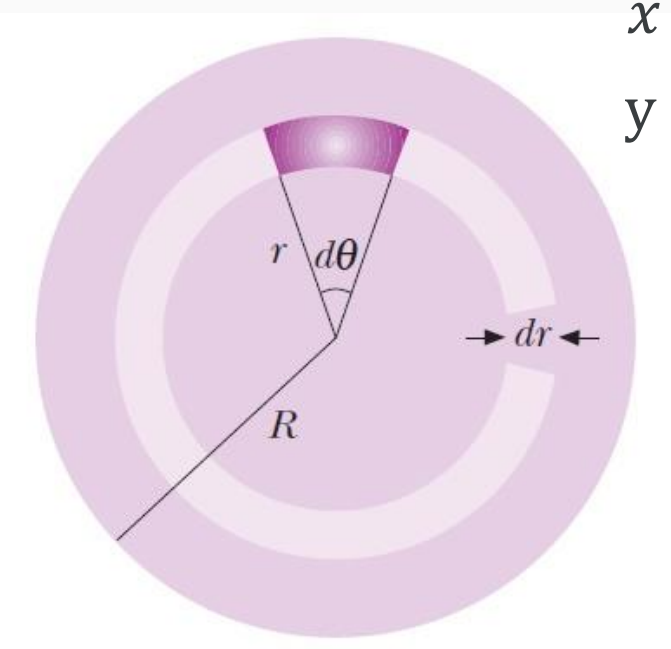
$$\int_S f\, dS = \iint_S f\, rdrd\theta$$

Se f è costante nella corona, l'area della corona si può scrivere come:

$$dS = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 =$$
$$= \pi r^2 + 2\pi r\, dr + \pi(dr)^2 - \pi r^2 =$$
$$= 2\pi r dr$$

$$\int_S f\, dS = 2\pi \int_0^R f(r) r dr$$

Trasformazione coordinate



$$x = r\cos\theta$$

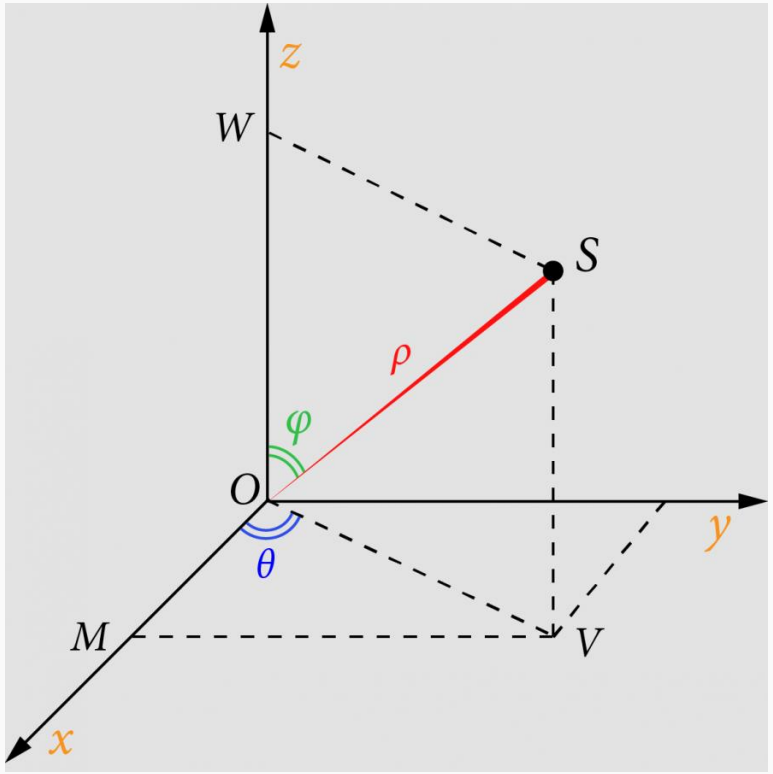
$$y = r\sin\theta$$

Lo Jacobiano è il determinante della matrice alle derivate parziali

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = rcos^2\theta + rsin^2\theta = r$$

$$dxdy = Jdrd\theta = rdrd\theta$$

E se volessimo passare alle coordinate sferiche di volume?



$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\varphi$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi\,(\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta + \rho^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta) + \rho\sin\varphi(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\sin^2\theta) =$$
$$= \rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\sin\varphi = \rho^2\sin\varphi$$

$$dxdydz = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho d\varphi d\theta$$

Sono equazioni che contengono derivate rispetto a una o piu' variabili
Per essere risolte hanno bisogno di condizioni iniziali.

$$\frac{df}{dx} = A = costante \xrightarrow[df = v\,dx]{f(0)=B} \int_B^{f(t)} df = A\int_0^x dx \qquad f(x) = B + Ax$$

$$\frac{df}{dx} = -kf(x) \xrightarrow[\frac{df}{f} = -k\,dx]{f(0)=A} \ln f]_0^x = -kx \qquad f(x) = Ae^{-kx}$$

$$\frac{df}{dx} = A + Bf(x) \xrightarrow[\frac{df}{A+Bf} = dx]{f(0)=C} \frac{1}{B}\ln(A+Bf)\Big]_0^x = x \qquad f(x) = -\frac{A}{B} + \left(\frac{A}{B} + C\right)e^{Bx}$$

Sono equazioni che contengono derivate rispetto a una o piu' variabili
Per essere risolte hanno bisogno di condizioni iniziali.

$$\frac{d^2f}{dx^2} = a = costante \xrightarrow[f'(0)=B]{f(0)=C} f(x) = C + Bx + \frac{1}{2}Ax^2$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -\omega^2 f \xrightarrow[f'(0)=B]{f(0)=A} f(x) = A\cos\omega t + \frac{B}{\omega}\sin\omega t$$

Tabella grandezze fondamentali - SI

Preso da http://ebook.scuola.zanichelli.it

Grandezza fisica	Simbolo della grandezza	Nome dell'unità di misura	Simbolo dell'unità di misura
lunghezza	l	metro	m
massa	m	kilogrammo	kg
tempo	t	secondo	s
corrente elettrica	i	ampere	A
temperatura	T	kelvin	K
quantità di sostanza	n	mole	mol
intensità luminosa	i_v	candela	cd

Definite arbitrariamente dall'uomo, non sono una proprietà della natura

Spesso unità di **misura comunemente usate** dipendono dal contesto

Posso usare multipli o sottomultipli (es km, ora, anno) oppure altre unità (es gradi Celsius) ma attenzione che

a) le grandezze derivate sono tutte definite a partire da quelle fondamentali, e

b) le equazioni della fisica sono spesso scritte sulla base di grandezze fondamentali

Lo userete molto spesso, quindi è importante diventare pratici

Esempio, voglio convertire i piedi in metri. Prima di tutto ho bisogno del fattore di conversione:

$$1m = 3{,}281\ ft\ ;\ \ 1 = \frac{1m}{3{,}281ft} = \frac{3{,}281ft}{1m}\ \ ;1ft = 0{,}305\ m$$

Quindi se ora vi chiedo a quanti metri corrispondono 137 piedi?

$$137ft = 137\cancel{ft} \cdot \frac{1m}{3{,}281\cancel{ft}} = 41{,}756m$$

Notate la semplificazione delle unità – vuol dire che state usando il fattore di conversione nella maniera giusta!

Analisi dimensionale



Una unita' derivate e' composta da combinazioni delle unita' di base.

Esempio: nel SI l'unita' dell'energia e' il joule:

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ kg } m^2/s^2$$

Il joule e' l'unita' derivata

Kilogrammi (kg), metri (m), e secondi (s) sono le unita' base.

Altre unita' derivate sono:

Forza [F]	Newton, N
Carica [C]	Coulomb, C
Pressione [P]	Pascal, Pa

Altre storiche e unita' piu' convenienti sono:

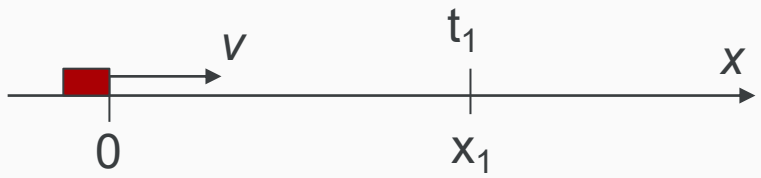
Energia [J]	electronvolt, eV
Pressione [P]	atmosphere, atm
Pressione [P]	mmHg
Lunghezza [L]	angstrom, Å



Qualsiasi formula (= equazione) valida in fisica deve essere dimensionalmente consistente – a destra e a sinistra dell'uguale ci devono essere LE STESSE GRANDEZZE.

Se un cubo viaggia a velocità costante *v* e al tempo 0 è nella posizione 0, a quale posizione x_1 sarà al tempo t_1?

1D



$$x_1 = \frac{v}{t_1}$$

Omogeneità dimensionale!!

Si possono confrontare tra loro solo grandezze della stessa natura

$$[L] = \frac{[V]}{[T]} = \frac{[L]/[T]}{[T]}$$

Una corda di violino produce un tono a frequenza *f* misurata in s^{-1}; la frequenza è il numero di vibrazioni per secondo della corda. La frequenza dipende dalla massa della corda *m*, dalla sua lunghezza *L* e dalla tensione *T* (forza, $kg \cdot m \cdot s^{-2}$).

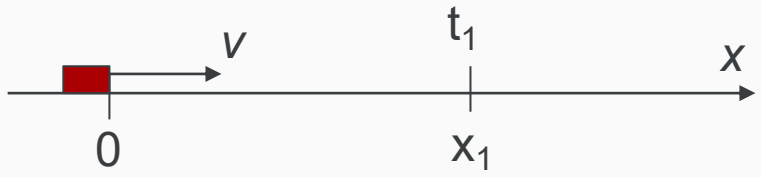
$$f^2 = \frac{T}{mL}$$





Se un cubo viaggia a velocità costante *v* e al tempo 0 è nella posizione 0, a quale posizione x_1 sarà al tempo t_1?

1D



$$x_1 = \frac{v}{t_1}$$

Omogeneità dimensionale!!

$$[L] = \frac{[V]}{[T]} = \frac{[L]/[T]}{[T]}$$

Una corda di violino produce un tono a frequenza *f* misurata in s^{-1}; la frequenza è il numero di vibrazioni per secondo della corda. La frequenza dipende dalla massa della corda *m*, dalla sua lunghezza *L* e dalla tensione *T* (forza, $kg \cdot m \cdot s^{-2}$). Se la tensione della corda è aumentata del 4.0%, di quanto cambia la frequenza?

$$f^2 = \frac{T}{mL} \longrightarrow \frac{f'}{f} = \sqrt{\frac{T'}{T}} = \sqrt{1.040} = 1.020$$

Analisi dimensionale

I fattori di scala sono solitamente riferiti alle proprietà che dipendono dalla dimensione.

Per esempio: Surperficie S [L^2] e Volume V [L^3]

$$Rapporto\ metabolico = \frac{energia\ persa}{energia\ metabolizzata} \propto \frac{S}{V} = \frac{[L^2]}{[L^3]} = \frac{1}{[L]}$$

Animali più piccoli devono mangiare di più

$$Coefficiente\ di\ deidratazione = \frac{acqua\ persa}{acqua\ totale} \propto \frac{S}{V} = \frac{1}{[L]}$$

$$fattore\ di\ vitalita'delle\ cellule = \frac{ossigeno\ assorbito}{fabbisogno\ di\ ossigeno} \propto \frac{S}{V} = \frac{1}{[L]}$$

Prefissi e notazione scientifica

Notazione scientifica

$$(10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0.1)$$

- Facilita i calcoli

$$\frac{480}{0.6} = \frac{48\times10^1}{6\times10^{-1}} = 800 = 8\times10^2$$

- Fa comprendere a vista l'ordine di grandezza

Raggio della terra

$$6380000\ m = 6.38\times10^6\ m$$
$$= 6.38\ \boldsymbol{M}m$$

Raggio atomico dell'Idrogeno

$$0.000000000053\ m = 5.3\times10^{-11}\ m$$
$$= 53\ \boldsymbol{p}m$$

Prefix (abbreviation)	Power of Ten
peta- (P)	10^{15}
tera- (T)	10^{12}
giga- (G)	10^{9}
mega- (M)	10^{6}
kilo- (k)	10^{3}
deci- (d)	10^{-1}
centi- (c)	10^{-2}
milli- (m)	10^{-3}
micro- (μ)	10^{-6}
nano- (n)	10^{-9}
pico- (p)	10^{-12}
femto- (f)	10^{-15}

Ad esempio $\mu g, \mu m$

Attenzione, la k di km, kg e' minuscola e non maiuscola

Unità di lunghezza, massa e tempo

raggio dell'universo	10^{26} m
raggio della galassia	10^{21} m
raggio del sole	$7 \cdot 10^{8}$ m
raggio della terra	$6.4 \cdot 10^{6}$ m
lunghezza d'onda luminosa	$0.5 \cdot 10^{-6}$ m = 0.5 mm
dimensioni di un virus	10^{-8} m = 10 nm
raggio di un atomo	10^{-10} m = 100 pm
raggio di un nucleo	10^{-15} m = 1 fm
raggio dell'elettrone	$< 10^{-18}$ m puntiforme?
età dell'universo	$5 \cdot 10^{17}$ s = $15 \cdot 10^{9}$ anni
un anno	$3.1 \cdot 10^{7}$ s
periodo di oscillazione della nota la	$2.3 \cdot 10^{-3}$ s = 2.3 ms
tempo di transizione tra livelli atomici	10^{-8} s = 10 ns
tempo di commutazione di un transistor	10^{-9} s = 1 ns
periodo di oscillazione della luce visibile	10^{-14} s = 10 fs
massa dell'universo	10^{53} kg
massa della galassia	$8 \cdot 10^{41}$ kg
massa del sole	$2 \cdot 10^{30}$ kg
massa della terra	$6 \cdot 10^{24}$ kg
massa di un virus	10^{-13} kg
massa del protone	$1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
massa dell'elettrone	$9.1 \cdot 10^{-31}$ kg

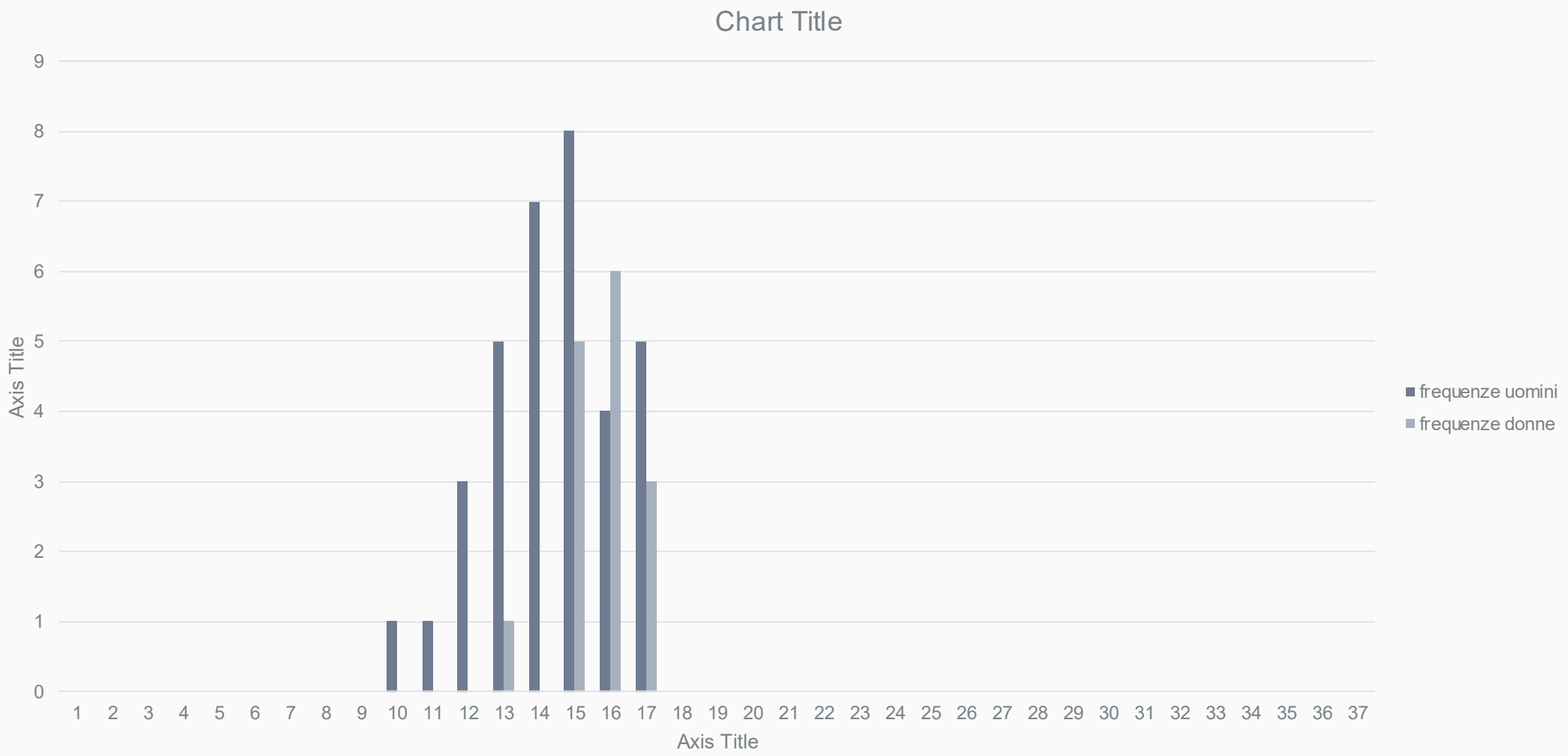
A	α	alpha	I	ι	iota	P	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mu	Υ	υ	upsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nu	Φ	ϕ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

1. Se la pressione si esprime in N/m^2 (forza su area) e $1N = 1kg \cdot m/s^2$, come si esprime la pressione in unità di misura fondamentali?
2. Convertire 17560 in notazione scientifica
3. Quando vale l'area di un quadrato il cui lato è 0.25 cm?

   [Esprimere in cm^2 e m^2]
4. Quando vale il volume di un cubo il cui lato è 0.25 cm?

   [Esprimere in cm^3 e m^3]
5. Se la velocità del suono è 340 m/s in aria, a quanto corrisponde in km/h?
6. A quanto corrisponde circa il volume di acqua (in litri) del pianeta terra considerando un diametro medio degli oceani di 5km.

Quanto è lunga la stanza in passi?

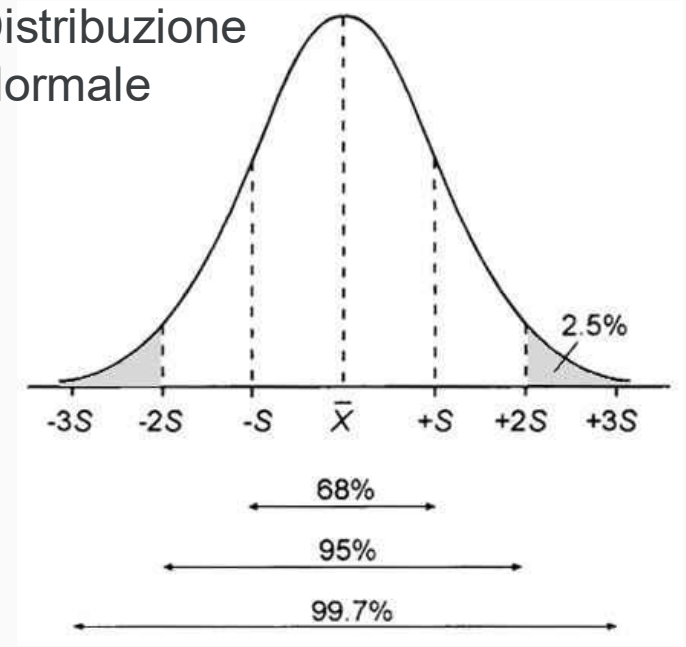


Ogni misura di una grandezza fisica ha un **errore**, che può essere

Sistematico/bias – legato alla metodologia utilizzata per effettuare la misura o alla strumentazione. Se la misura viene ripetuta si ottiene lo stesso errore - ACCURATEZZA

→ Si può correggere solo identificando la sorgente e cambiando metodologia.

Distribuzione Normale



Casuale/statistico – legato alla natura casual della misura, se la misura viene ripetuta cambia anche l'errore - PRECISIONE

→ Si può ridurre aumentando il numero delle misure.

$$x = \bar{x} \pm \frac{S}{\sqrt{N}}$$

con $\bar{x}$ media della distribuzione, S la deviazione standard and N il numero delle misure

Numero di cifre significative

Per ogni numero si puo' definire il numero di cifre significative, ovvero di cifre che 'hanno un significato'

Ecco le regole per definire le cifre significative

1. La cifra diversa da zero più' a sx è la cifra più significativa
2. Se non ci sono decimali, la cifra diversa da zero più a destra è la meno significativa
3. Se ci sono decimali, la cifra più a destra è la meno significativa
4. Le cifre dalla più alla mano significativa da il numero di cifre significative

Ad esempio:

12.34: 1 la piu significativa, 4 la meno significativa, 4 cifre significative in totale
12340, 1 la piu significativa, 4 la meno significativa, 4 cifre significative in totale
12.340 1 la piu significativa, 0 la meno significativa, 5 cifre significative in totale

Esempio, tutti questi numeri hanno 4 cifre significative:

1234; 123400; 123.4; 1001; 10.10, 0.0001010, 100.0

Presentazione numerica risultato

Quante cifre devo mettere quando riporto un risultato? In generale dipende, ma ecco due regole

1. Misura con incertezza
2. Misura senza incertezza

1/ MISURA SENZA INCERTEZZA

Se scrivo un numero sottintendo che l'incertezza su quel numero non è minore dell'ultima cifra significativa

Se scrivo ad es 1.2 o 1.9 o 123.4 sottintendo incertezza e' ± 0.05

Se scrivo se ho ad es 1.12 o 1.19 o 123.14 sottintendo incertezza e' ± 0.005

Se riporto un risultato numerico metto almeno una precisione del 1%

Ad esempio se scrivo 723.2 la precisione e' 0.1/723.2=0.01% allora potevo scrivere 723

Se scrivo 1.2 allora precisione e' 0.1/1.2=8 allora meglio mettere due cifre decimali

2/ Presentazione numerica risultato

2/ MISURA CON INCERTEZZA

$x_{sm} = 12438.0605$ con incertezza $\delta x = 723.6576$

Allora fisso il numero di cifre significativa della incertezza pari a 1 massimo 2 e poi regolo come scrivere la misura:

Esempi

Tenendo tutte cifre significative : 12438.0605 ± 723.6576 → MOLTO MALE ☺

Tenendo 3 cifre: 12438 ± 723 → NON BENE :-D

Tenendo 2 cifre: 12440 ± 720 OK

Tenendo 1 cifra: 12400 ± 700 OK

Ancora più semplice con notazione scientifica

$(123.8 \pm 7.2)\times 10^2$, $(1.24 \pm 0.07)\ 10^4$ oppure $(12.38 \pm 0.72)\times 10^3$ oppure $(12.4 \pm 0.7)\times 10^3$

Errori di arrotondamento

Durante i conti invece se possibile si tiene il numero MASSIMO di cifre significative

Esempio (prima calcolo IVA, poi sommo):

- € 2,21 + 8% IVA = € 2,3868
- € 1,35 + 8% IVA = € 1,458
- Somma 4 cifre decimali: € 2,3868 + € 1,458 = **€ 3,8448**
- Somma 3 cifre decimali: € 2,387 + € 1,458 = **€ 3,845 (errore 0.01%)**
- Somma 2 cifre decimali: € 2,39 + € 1,46 = **€ 3,85 (errore 0.1%)**
- Somma 1 cifre decimali: € 2,4 + € 1,5 = **€ 3,9 (errore 1.5%)**

Gli “arrotondamenti” vanno fatti solo “alla fine”. Ovviamente questo non è sempre possibile ma è facile con i computer.

La distanza tra Roma e Padova è

465.023 ± 0.5432 km → 465.0 ± 0.5 km

465.023 ± 12.15 km → 470 ± 10 km

Ricordiamo che se l'errore non è indicato si intende che sia inferiore alla cifra meno significative

Somma
+

44.56005 m + 0.0698 m +1109.2 m = 1147.82985 m → 1147.8 m

Il risultato è preciso quanto l'addendo meno preciso

Prodotto
x

45.26 m/s × 2.41 s = 109.0766 m → 109 m

Il risultato ha il numero di cifre significative pari al fattore con il minor numero di cifre significative.



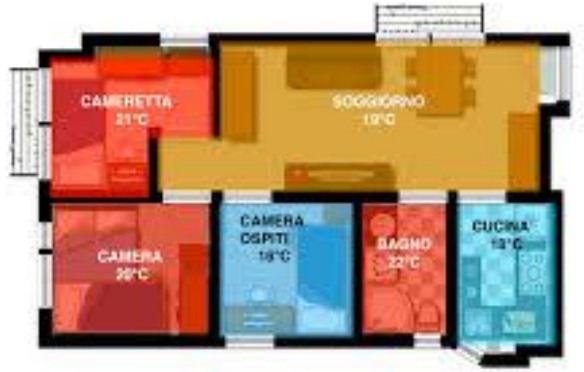


Scalari e vettori, grandezze scalar e vettoriali

Scalare: numero con le sue unità di misura.

Vettore: grandezza matematica definita da una
direzione,
un verso e
un modulo.

Vettore applicato: un vettore definito in un *sistema di riferimento*

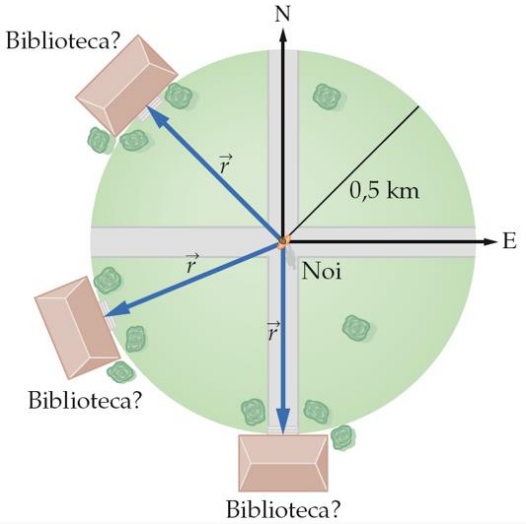


Grandezze fisiche scalari: ci sono grandezze che posso variare nello spazio, ma non dipendono dalla dimensione dello spazio (1-D, 2-D, 3-D)

- Massa, Temperatura
- Energia, Potenza …

Altre grandezze che dipendono dalla direzione, sono dette **vettoriali**

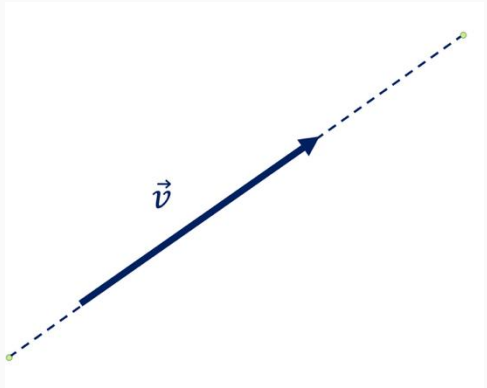
- Velocita, Accelerazione
- Momento di una forza …



Vettore e vettore applicato

Vettore $\vec{v}$:

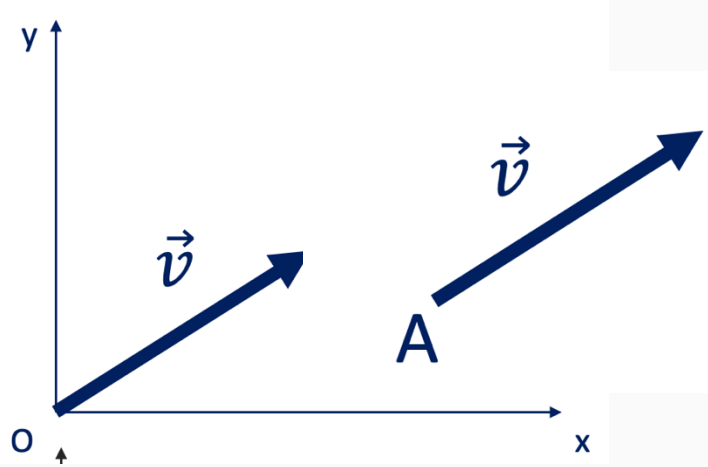
- Direzione
- Modulo (lunghezza) *v* oppure |v|
- Verso



Esempio:

- Direzione: quella della linea tratteggiata
- Modulo = 11cm
- Verso: in alto a destra

- Vettore applicato $\vec{v}$:



Definisco anche il punto di origine, in un SISTEMA DI RIFERIMENTO xOy

- Vettore applicato in O
- Vettore applicato in A

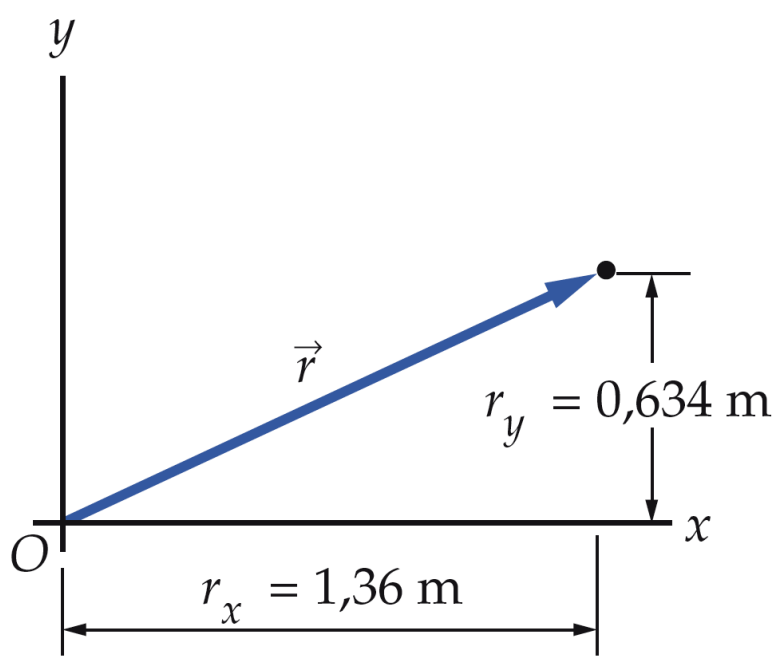
Sono due vettori UGUALI ma applicati in due punti diversi

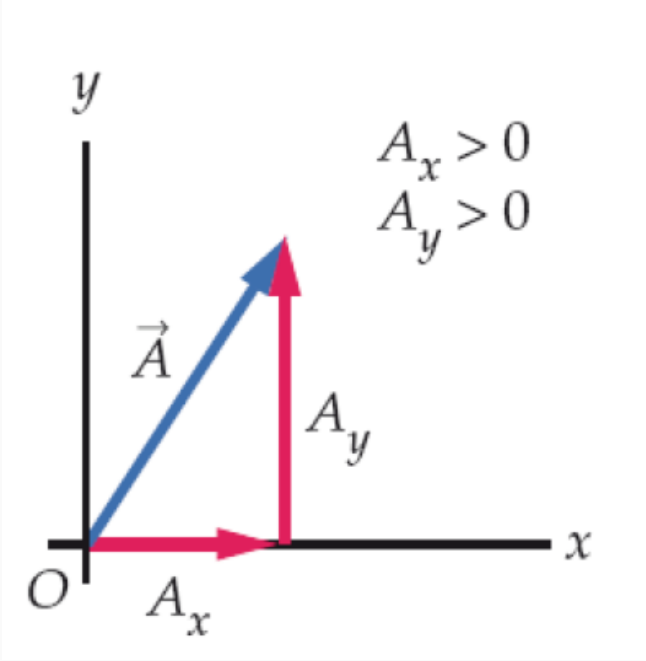
Componenti o proiezioni sugli assi

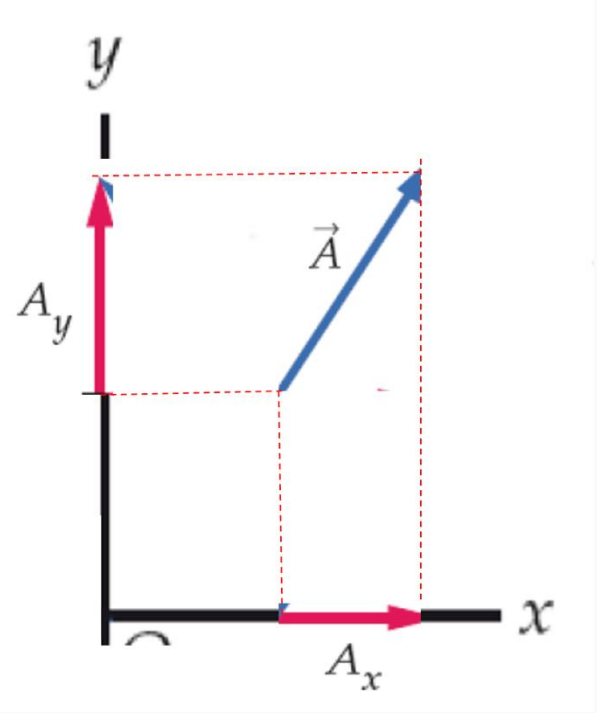
Scomporre un vettore nelle sue componenti perpendicolari **utilizzando un sistema di coordinate**.

Possiamo scrivere quindi il vettore come $\vec{r} = (r_x, r_y) = (1.36, 0.634)$

Le componenti sono a loro volta vettori (vedremo)

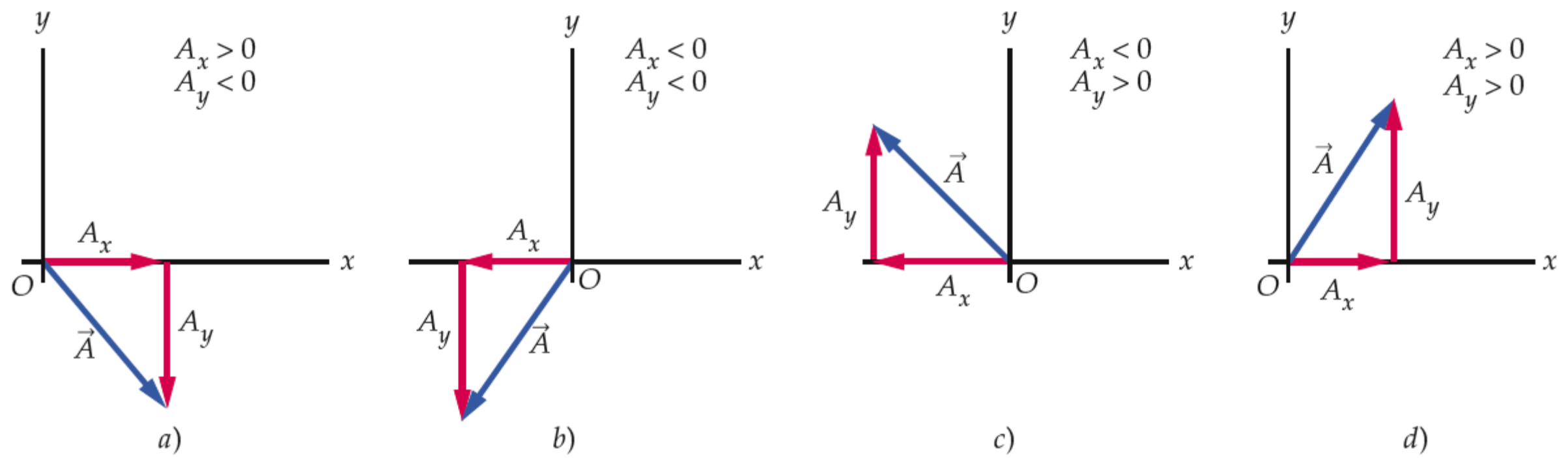






Segno delle componenti

Siccome le componenti ci permettono di disegnare il vettore,
la loro lunghezza è espressa come positiva o negativa



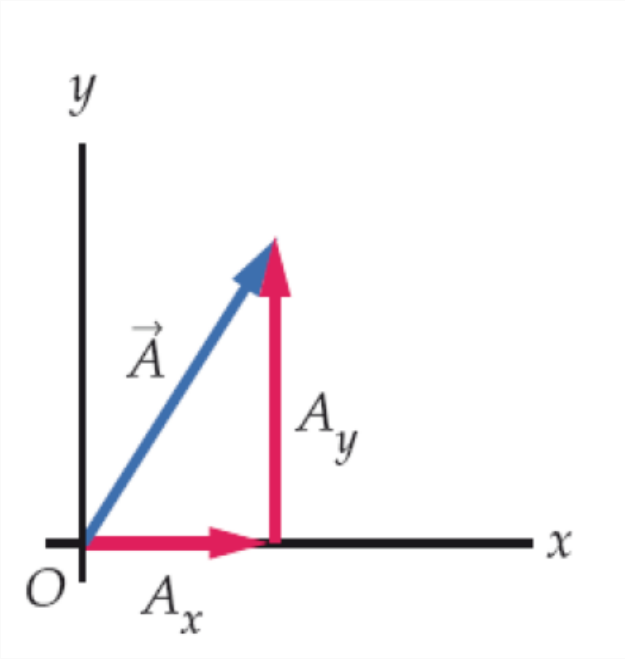
A=(2,-2)

A=(-1.5,-2)

A=(-2, 2)

A=(1.5, 2)

Lunghezza o modulo di un vettore



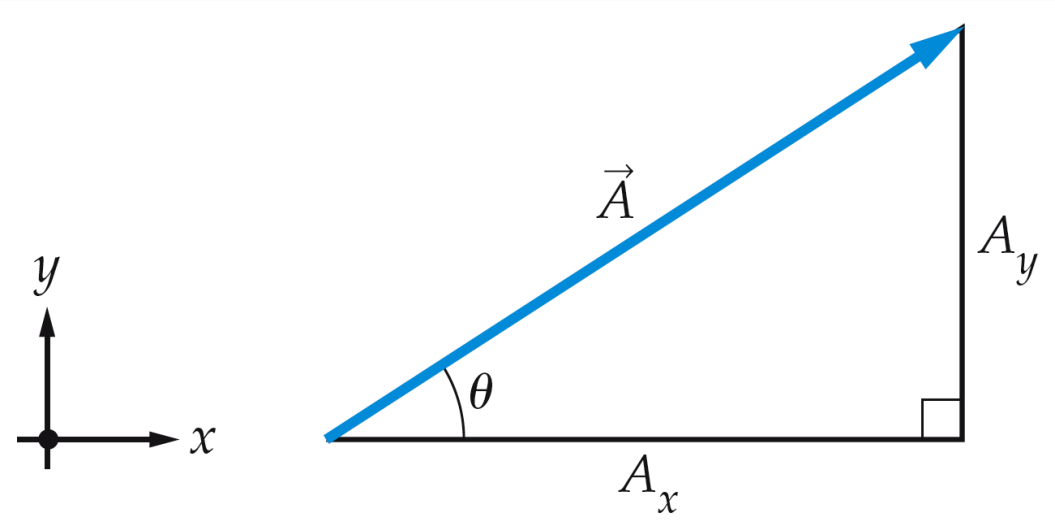
Ogni vettore, se applicato all'origine, diventa automaticamente **l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per lato le sue proiezioni**, quindi il suo modulo è

$$\left|\vec{A}\right| = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Nel caso che il vettore sia definito in 3 dimensioni, ovviamente:

$$\left|\vec{A}\right| = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Componenti espresse trigonometricamente



Definendo angolo come in figura

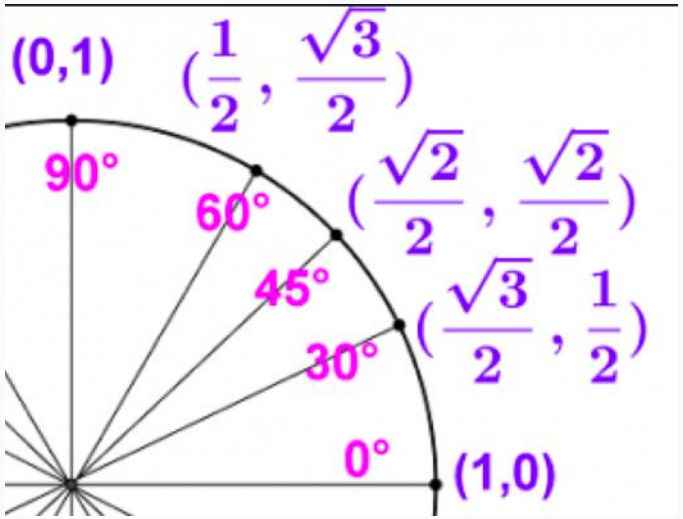
$$A_x = A * \cos(\theta)$$

$$A_y = A * \text{sen}(\theta)$$

Esempio, se $\theta = 30^o$ e A =1, allora

$$A_x = 1\cos(30^o) = 0.86$$

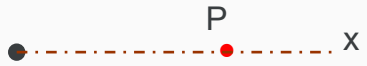
$$A_y = 1\cos(6) = 0.5$$

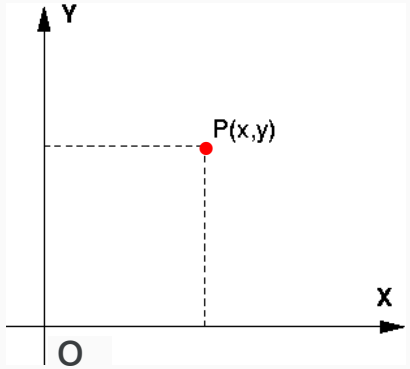


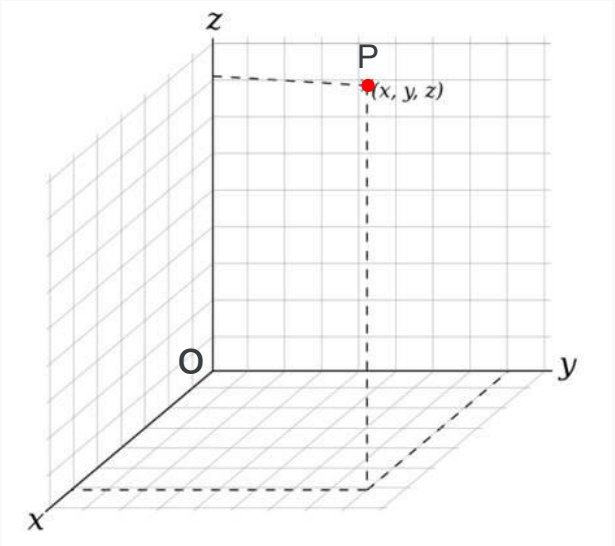
Q: in un calcolatrice, per calcolare il coseno di un angolo scrivo l'angolo e poi premo il tasto coseno. Come faccio a sapere se la calcolatrice legge gli angoli in rad o gradi?

R: scrive per esempio 90 e premo coseno: se esce 0, la calcolatrice legge in gradi, se esce -0.44, legge in radianti

Sistemi di riferimento cartesiani







Retta: una posizione si individua con una unica coordinata:

$$x$$

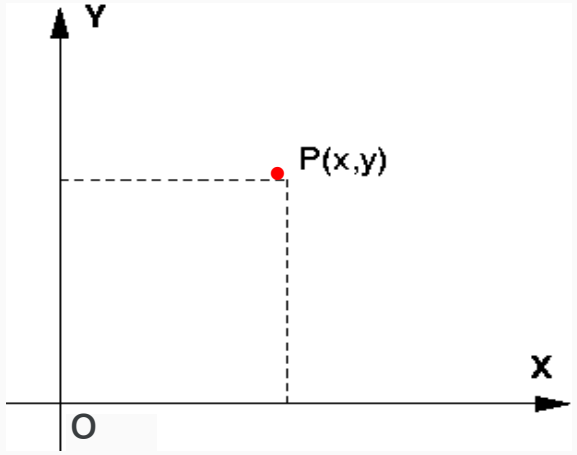
Piano: una posizione si individua con due coordinate:

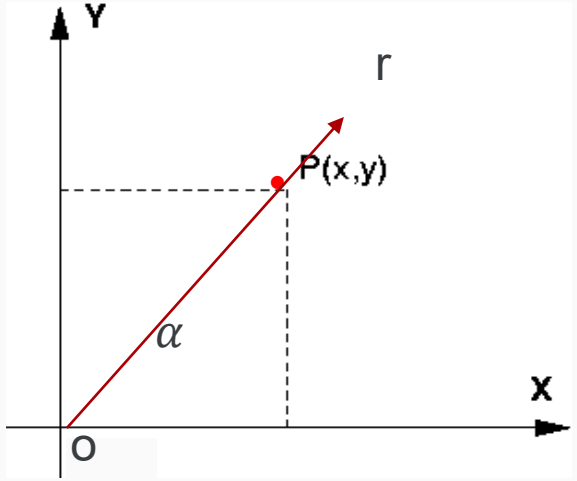
$$(x, y)$$

Spazio: una posizione si individua con tre coordinate:

$$(x, y, z)$$

Sistema di riferimento polare





Un punto in un sistema cartesiano 2D si può esprimere con P(x,y)

Oppure utilizzare un sistema polare e definire la posizione $P(r, \alpha)$

Per passare da uno all'altro si possono usare trasformazioni:

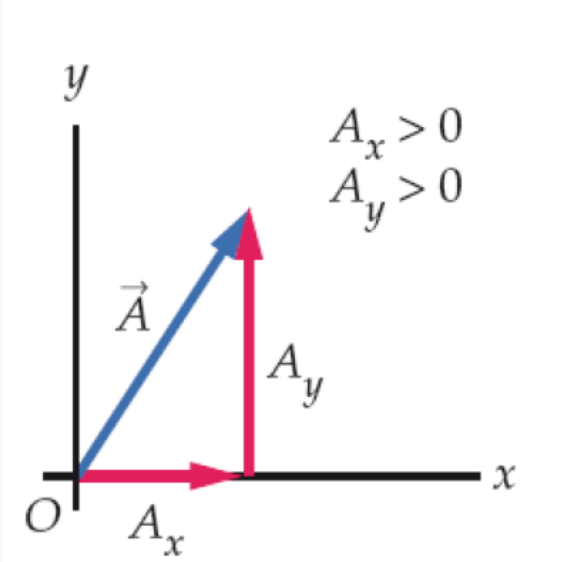
Da cilindrico a cartesiano:

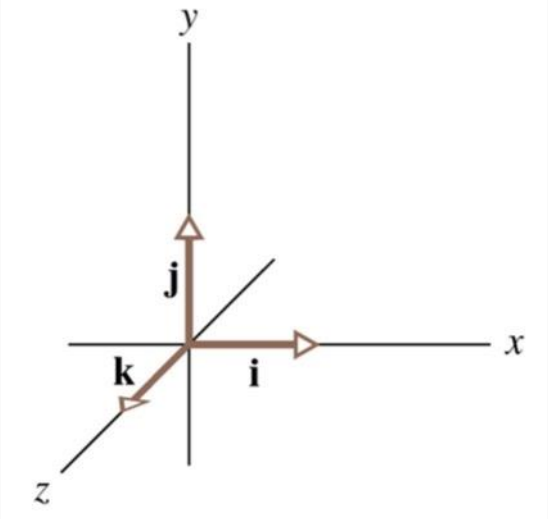
$$x(r, \alpha) = r\cos(\alpha)$$
$$\mathrm{y}(r, \alpha) = r\sin(\alpha)$$

Da cartesiano a cilindrico

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\alpha(x, y) = \mathrm{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$







Sono vettori di lunghezza 1, normalmente orientati secondo gli assi, come le componenti
Le componenti di un vettore quindi si possono scrivere come:

$$\overrightarrow{A_x} = A_x\overrightarrow{u_x}$$

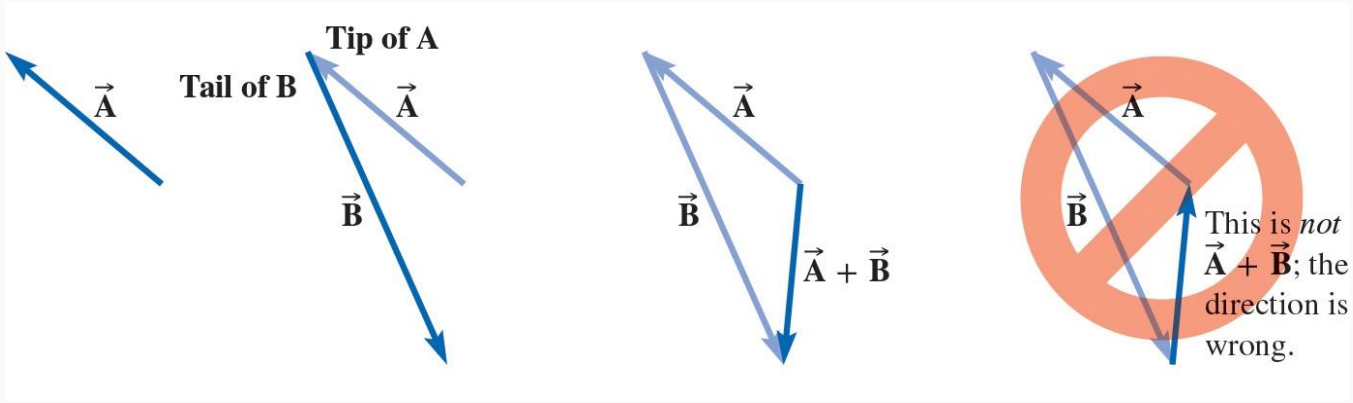
Il nome del versore può cambiare, ma di solito:

$$\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}$$
$$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$$

Come posso scrivere il vettore $\vec{A}$?

Compatta $\vec{A}$
Componenti implicite $\vec{A} = (A_x, A_y)$
Componenti numeriche $\vec{A} = (2, 3)$
Con versori $\vec{A} = (A_x\overrightarrow{u_x}, A_y\overrightarrow{u_y})$

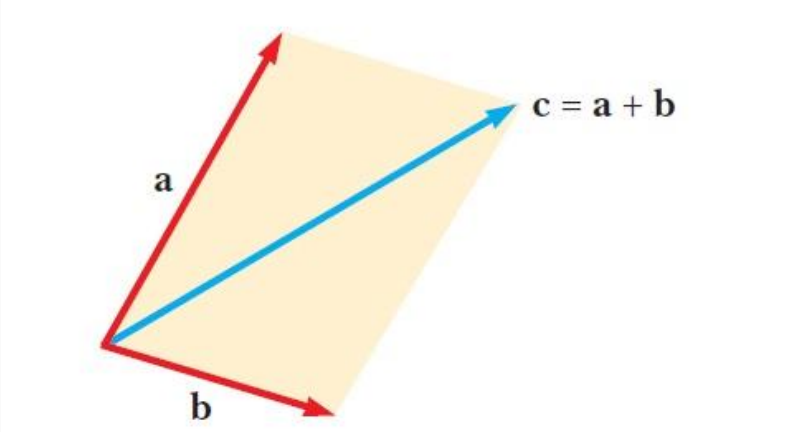
Somma di vettori



Si posiziona la coda del secondo addendo sulla freccia del primo addendo

Il vettore somma è quello che unisce la coda del primo addendo con la freccia del secondo

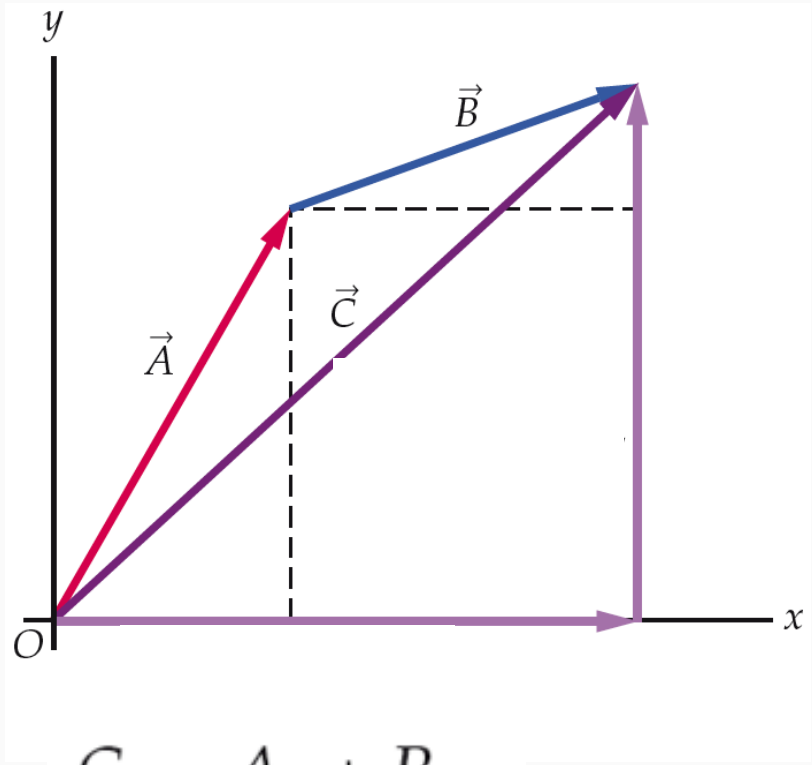
Metodo parallelogramma

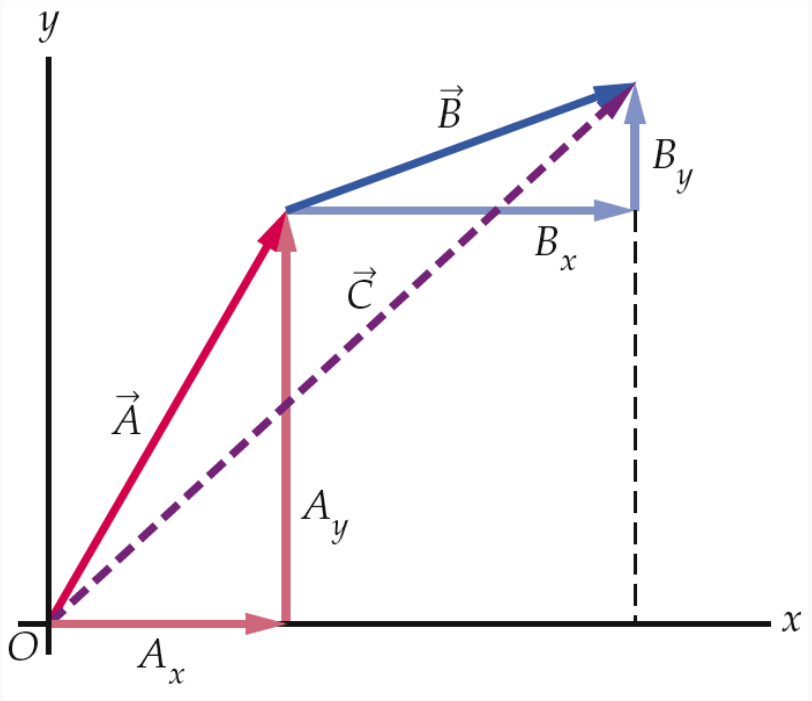


Si posizionano i vettori sulla stessa origine

il vettore somma coincide con la diagonal del parallelogramma

Somma per componenti





$$C_x = A_x + B_x$$

$$C_y = A_y + B_y$$

$$\vec{C} = \left((A_x + B_x)\overrightarrow{u_x}\,,\,(A_y + B_y)\overrightarrow{u_y}\right)$$

Esempio

Dati due vettori

$\vec{v} = 5\vec{u}_x + 2\vec{u}_y - 7\vec{u}_z$ … il cui modulo $[v] = \sqrt{5^2 + 2^2 + (-7)^2} = \sqrt{78} = 8.83$

$\vec{w} = 4\vec{u}_x + 7\vec{u}_y + 3\vec{u}_z$ … il cui modulo $[w] = \sqrt{4^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{75} = 8.6$

calcolarne la somma.

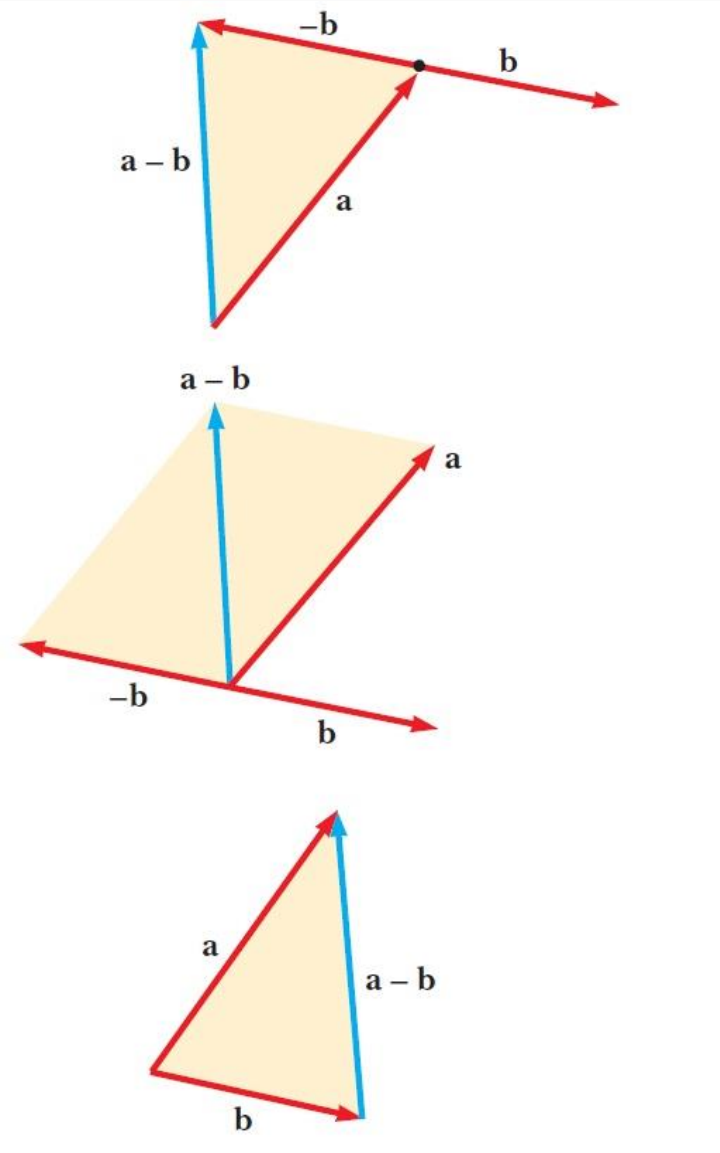
$$\vec{s} = \vec{v} + \vec{w} = (4+5)\vec{u}_x + (2+7)\vec{u}_y + (-7+3)\vec{u}_z$$

$$= 9\vec{u}_x + 9\vec{u}_y - 4\vec{u}_z$$

… il cui modulo $[s] = \sqrt{9^2 + 9^2 + (-4)^2} = \sqrt{178} = 13.34$

Il modulo della somma è sempre minore della somma dei moduli

Differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$



Direzione e verso di $\vec{d}$

Cominciamo con applicare $\vec{a}$ nell'origine

Invece che $\vec{b}$, usiamo il suo opposto $-\vec{b}$ e lo applichiamo sempre sulla punta di $\vec{a}$

E' come se stessimo facendo

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

La somma è la **diagonale corta del parallelogramma** avente per lati i due vettori

Modulo di $\vec{d}$

Stessa regola che per la somma, ma con sottrazione:

$$d_x = a_x - b_x;$$
$$d_y = a_y - b_y$$

Esempio

Dati due vettori

$\vec{v} = 5\vec{u}_x + 2\vec{u}_y - 7\vec{u}_z$ … il cui modulo $[v] = \sqrt{5^2 + 2^2 + (-7)^2} = \sqrt{78} = 8.83$

$\vec{w} = 4\vec{u}_x + 7\vec{u}_y + 3\vec{u}_z$ … il cui modulo $[w] = \sqrt{4^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{75} = 8.6$

calcolarne la differenza.

$$\vec{d} = \vec{v} - \vec{w} = (5-4)\overrightarrow{u_x} + (2-7)\overrightarrow{u_y} + (-7-3)\overrightarrow{u_z}$$
$$= 1\overrightarrow{u_x} - 5\overrightarrow{u_y} - 10\overrightarrow{u_z}$$

… il cui modulo $[d] = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{126} = 11.2$

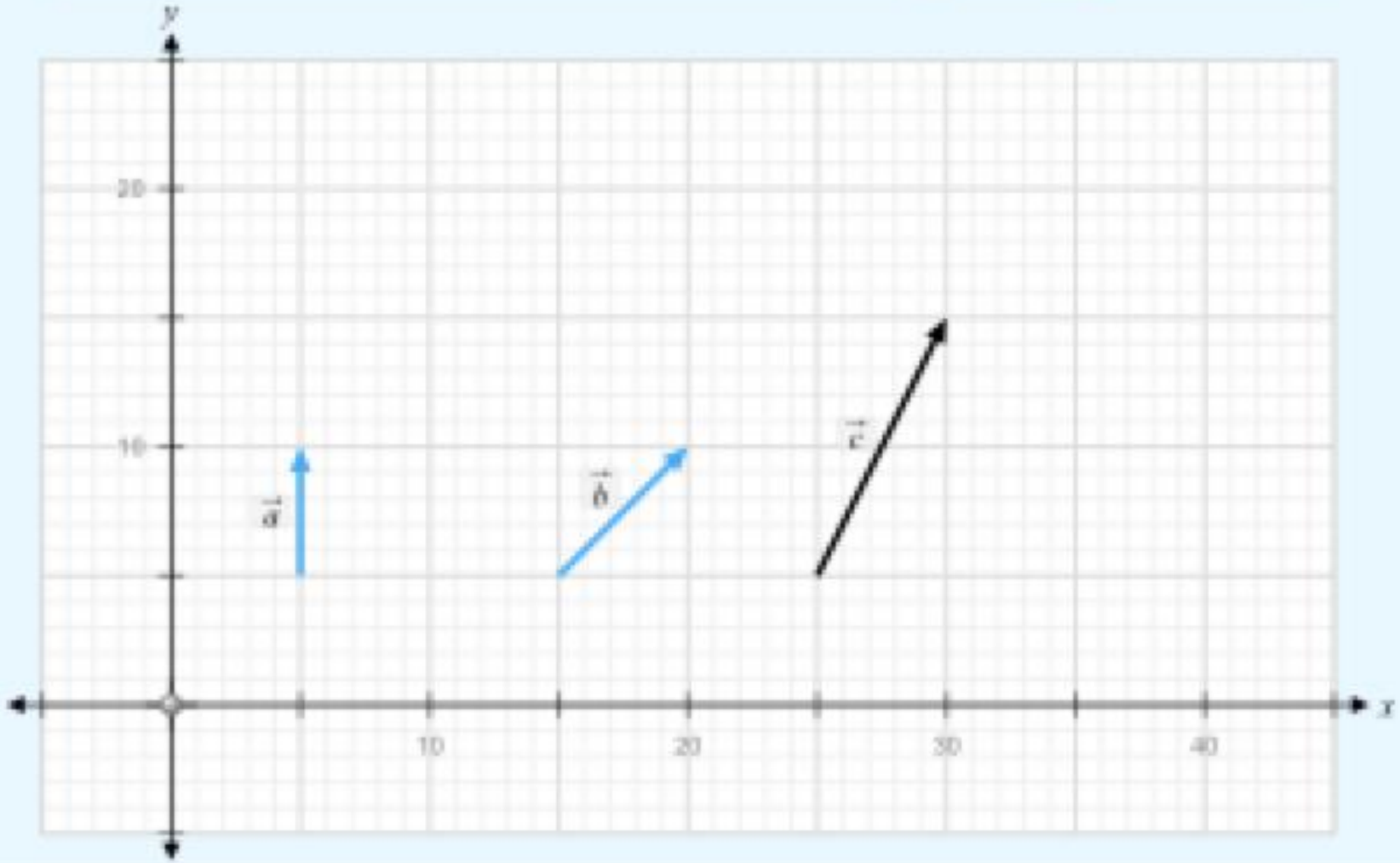
Il modulo della differenza può essere maggiore del modulo di uno dei due



No vector selected

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ $\quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ $\quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

$1\ \vec{a} + 1\ \vec{b} = \vec{c}$



$\vec{c}$

Values

$\angle^a$

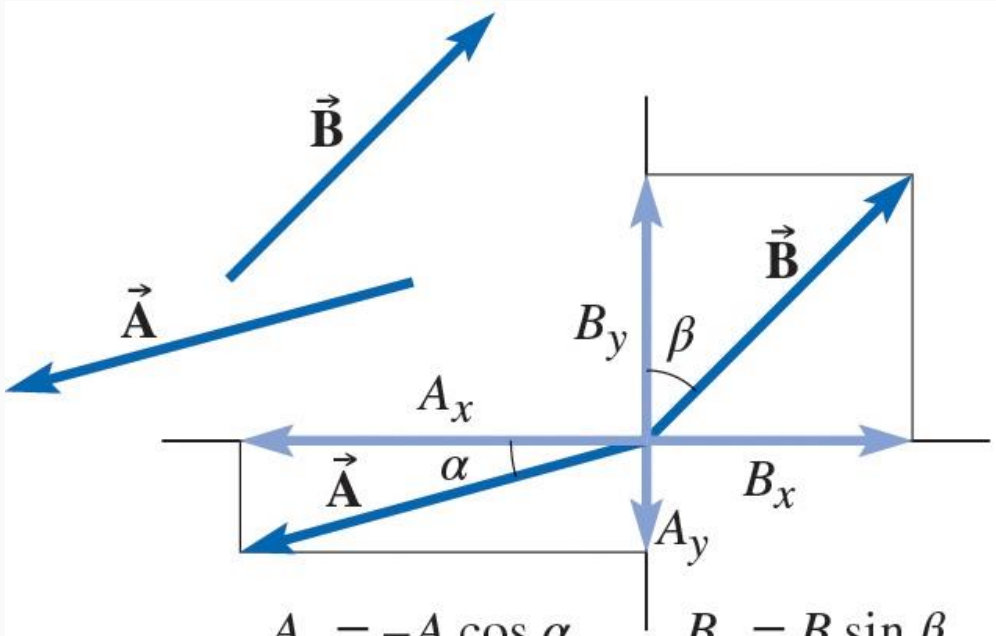
Components

Base Vectors

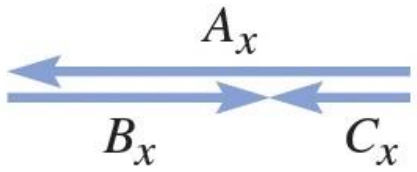
PhET



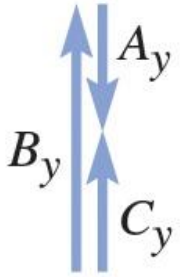
Addizione e sottrazione usando le componenti



$$A_x = -A\cos\alpha \qquad B_x = B\sin\beta$$
$$A_y = -A\sin\alpha \qquad B_y = B\cos\beta$$

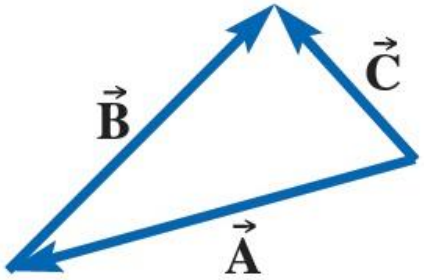


$$A_x + B_x = C_x$$

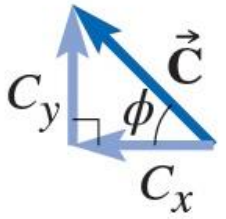


$$A_y + B_y = C_y$$

Graphical method



$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$



$$\tan\phi = \frac{|C_y|}{|C_x|}$$

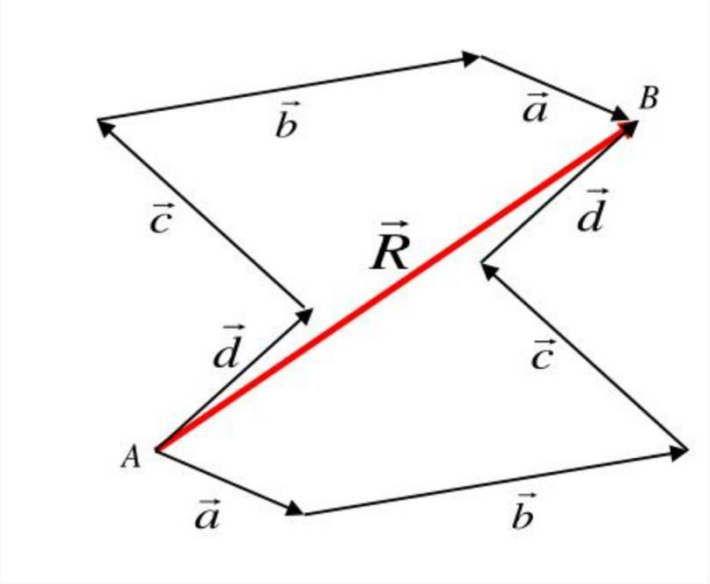
$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$$

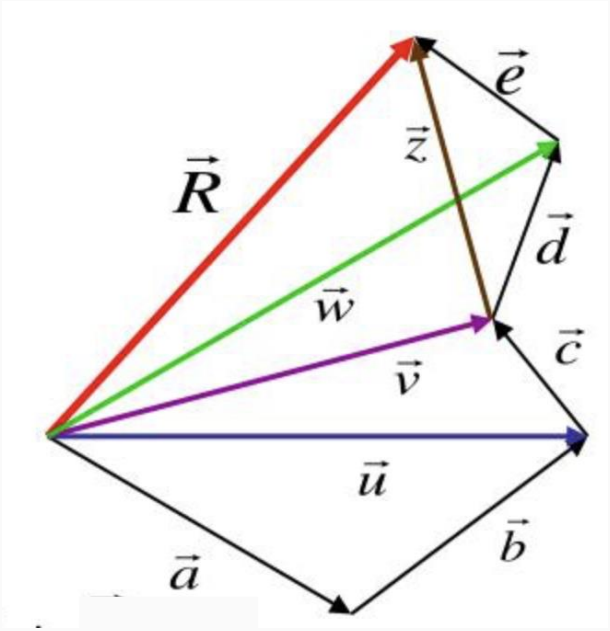
Component method

Proprietà della somma di vettori

commutativa

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{d} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$$



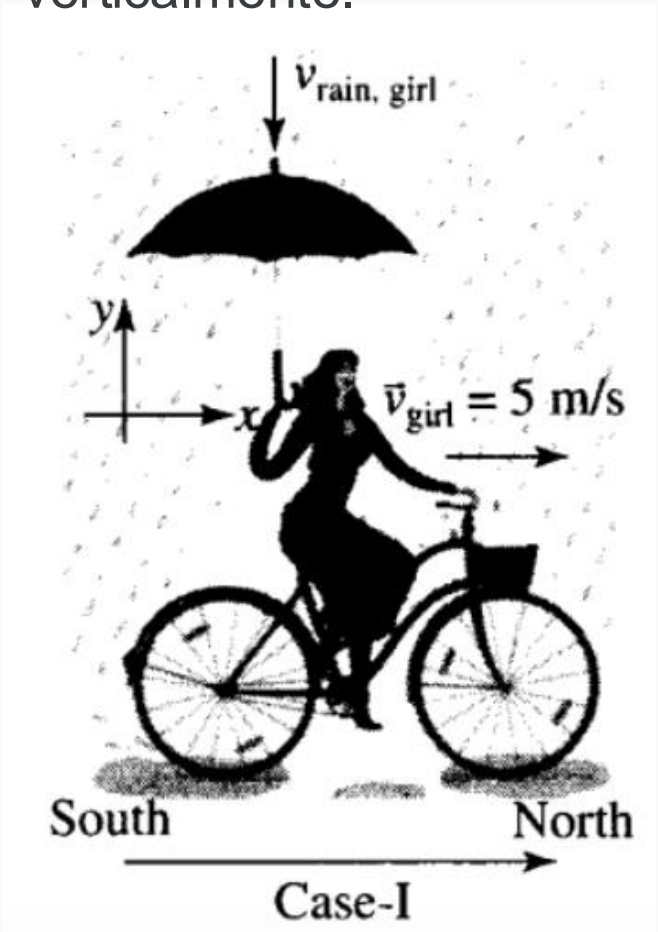


associativa

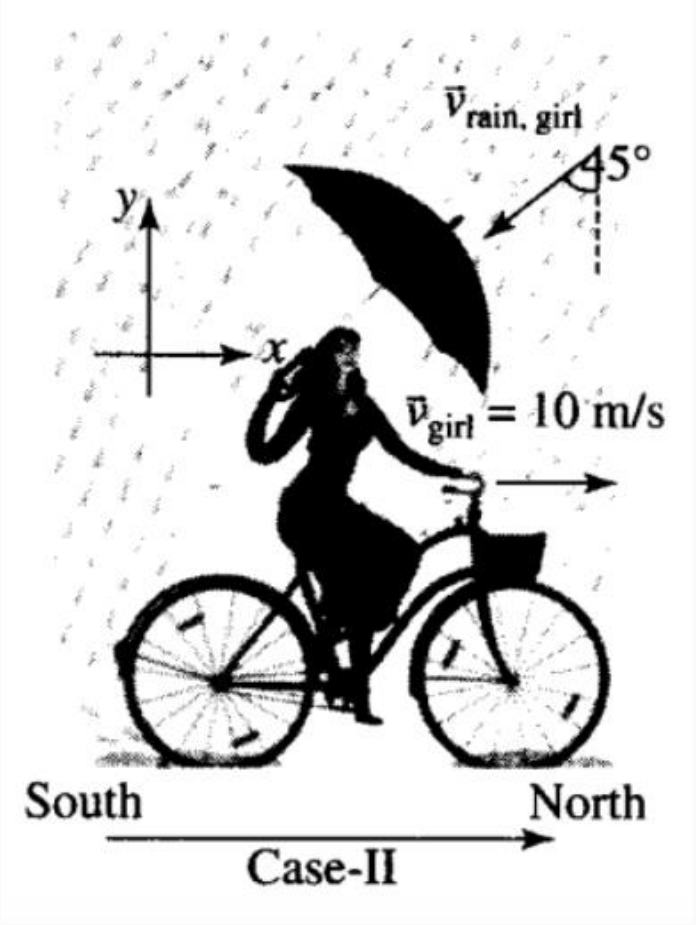
$$\begin{aligned}\vec{R} &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} \\ &= (\vec{u} + \vec{c}) + \vec{d} + \vec{e} \\ &= (\vec{v} + \vec{d}) + \vec{e} = \vec{w} + \vec{e}\end{aligned}$$

Pioggia

Una ragazza pedalando in bici va a una velocità di 5 m/s in direzione Nord, osserva la pioggia cadere giù verticalmente.



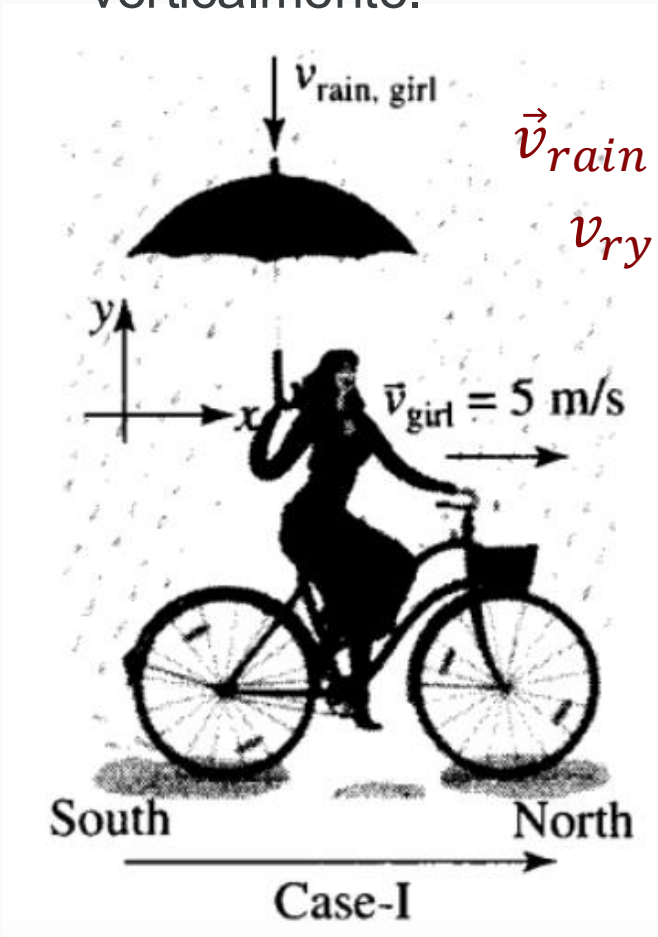
Se aumenta la velocità fino a 10 m/s, la pioggia le appare caderle addosso a 45° rispetto la verticale.



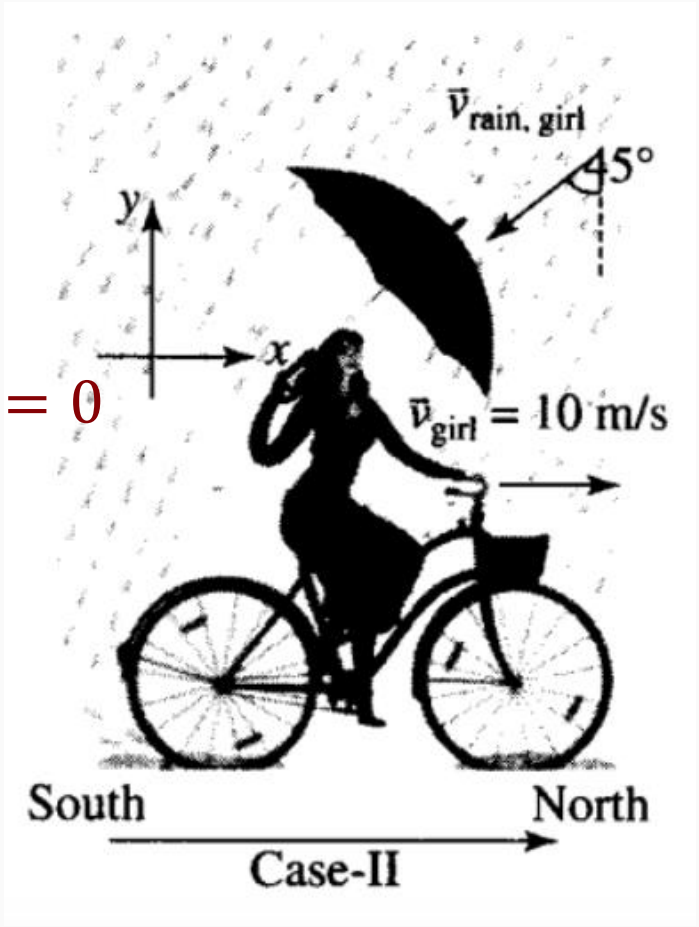
Che velocità ha la pioggia?

In che direzione cade la pioggia per un osservatore fermo sul marciapiede?

Una ragazza pedalando in bici va a una velocità di 5 m/s in direzione Nord, osserva la pioggia cadere giù verticalmente.



Se aumenta la velocità fino a 10 m/s, la pioggia le appare caderle addosso a 45° rispetto la verticale.



r -- sistema di riferimento del marciapiede

$girl$ -- sistema di riferimento della ragazza

Caso I

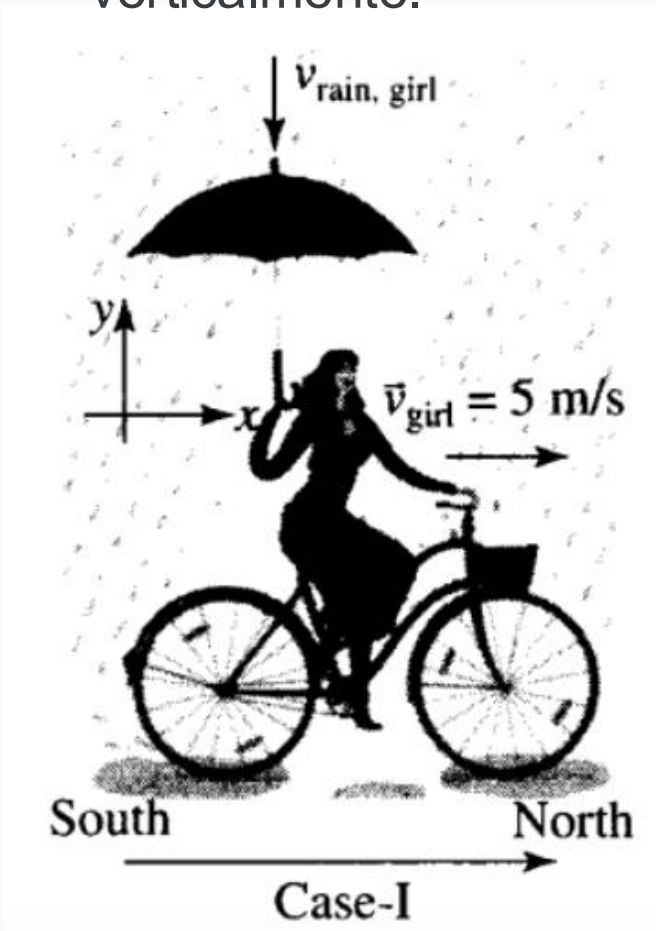
$$\vec{v}_{rain} = v_{rx}\hat{x} + v_{ry}\hat{y}$$

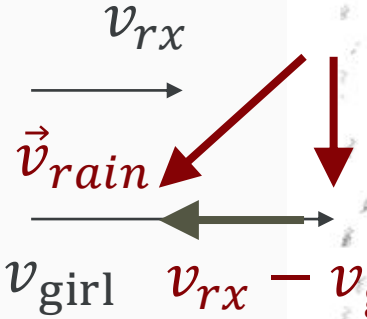
$$v_{rx} - v_{girl,x} = 0$$

$$v_{rx} = v_{girl,x} = 5\ m/s$$

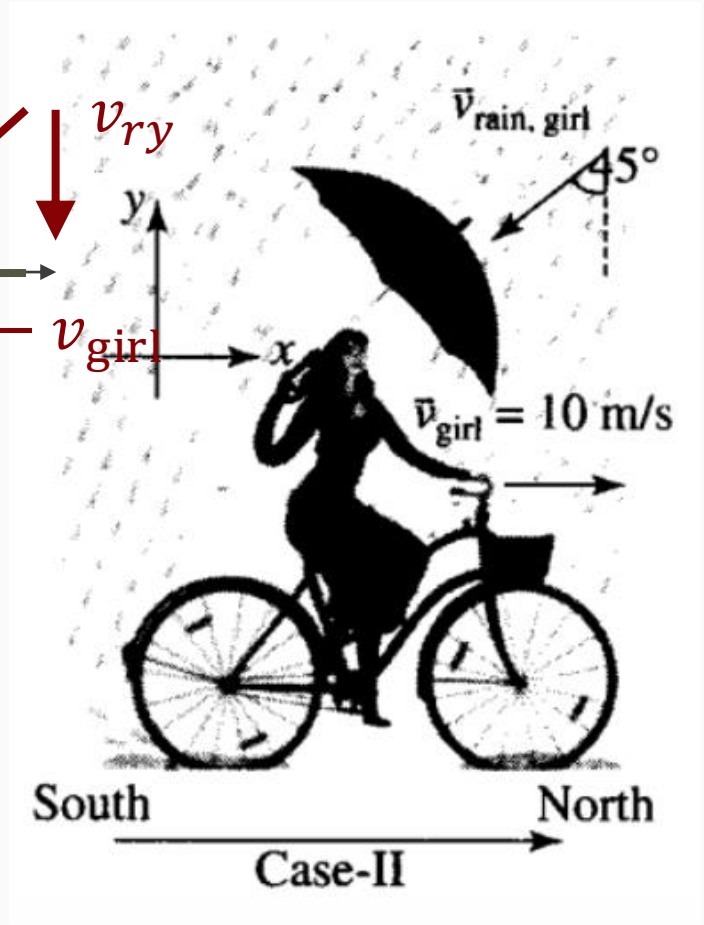
Pioggia

Una ragazza pedalando in bici va a una velocità di 5 m/s in direzione Nord, osserva la pioggia cadere giù verticalmente.





Se aumenta la velocità fino a 10 m/s, la pioggia le appare caderle addosso a 45° rispetto la verticale.



r -- sistema di riferimento del marciapiede

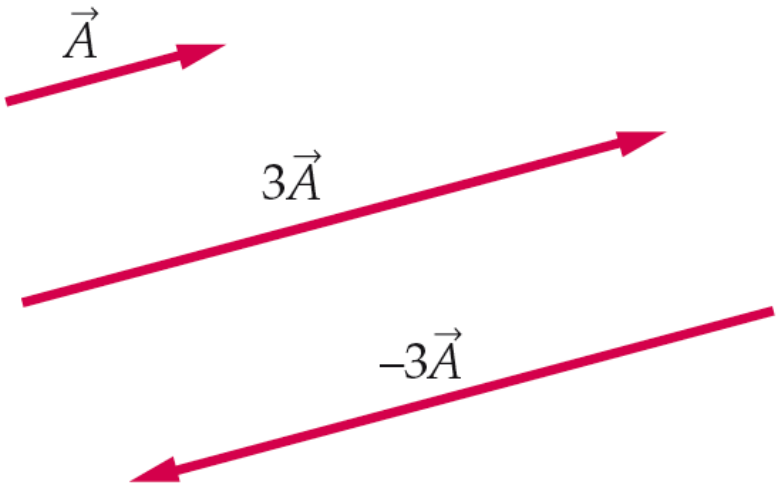
$girl$ -- sistema di riferimento della ragazza

Caso II

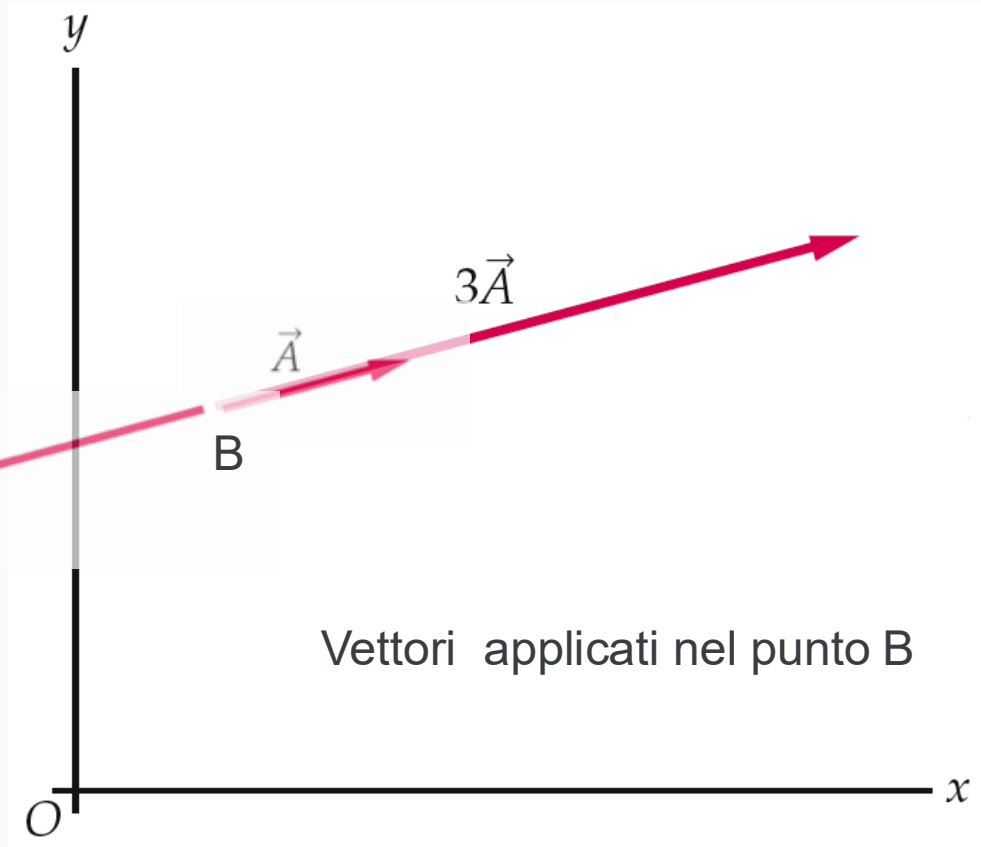
$$v_{ry} = (v_{rx} - v_{girl,x}) \tan(45°)$$
$$= -5\ m/s$$

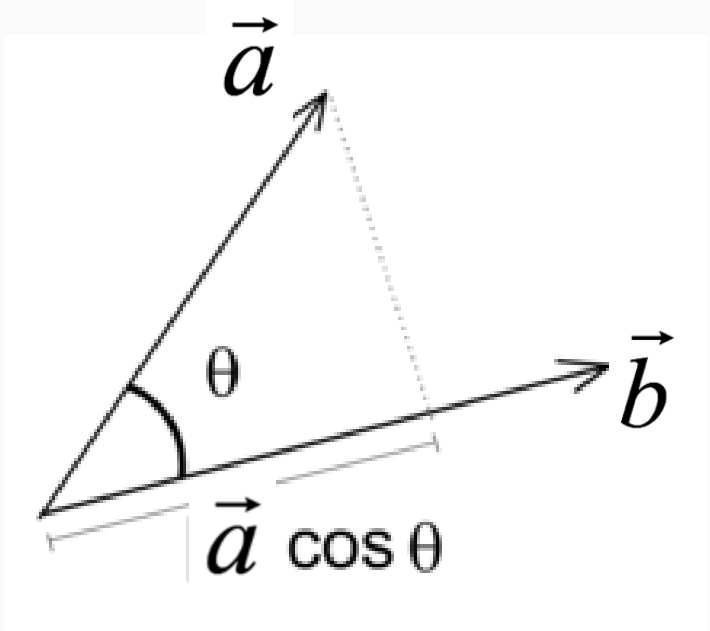
$$|\vec{v}_{rain}| = \sqrt[2]{{v_{rx}}^2 + {v_{ry}}^2}$$
$$= \sqrt{2} \cdot 5\ m/s$$

Moltiplicazione vettore per scalare



Dato un vettore $\vec{A}$, questo si puo moltiplicare per uno scalare





Prodotto scalare: risultato è uno scalare

E' definito come il prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso:

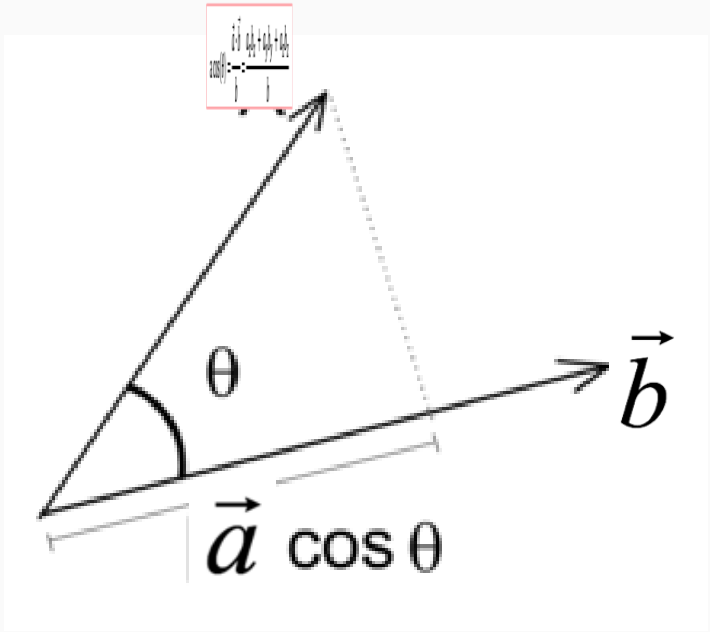
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos\theta$$

- Calcolare angolo tra due vettori
- Calcolare proiezione di un vettore in un'altra direzione

Risulta anche che

(uguaglianza aritmetica che non vi dimostro)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \quad a_y \quad a_z) \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$



Sfruttando la relazione

$$a\ b\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Proiezione di un vettore su un altro

$$\mathrm{a}\cos(\theta) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{b}$$

Angolo fra due vettori

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\ b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{a\ b}$$

Casi particolari del prodotto scalare

$\theta = 0°$



Se a e b sono paralleli

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b$

$\theta = 90°$



Se a e b sono perpendicolari

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

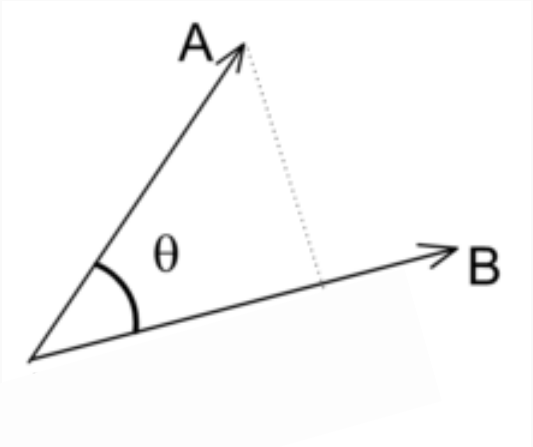
$\theta = 180°$



Se a e b sono “antiparalleli”

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -a\, b$

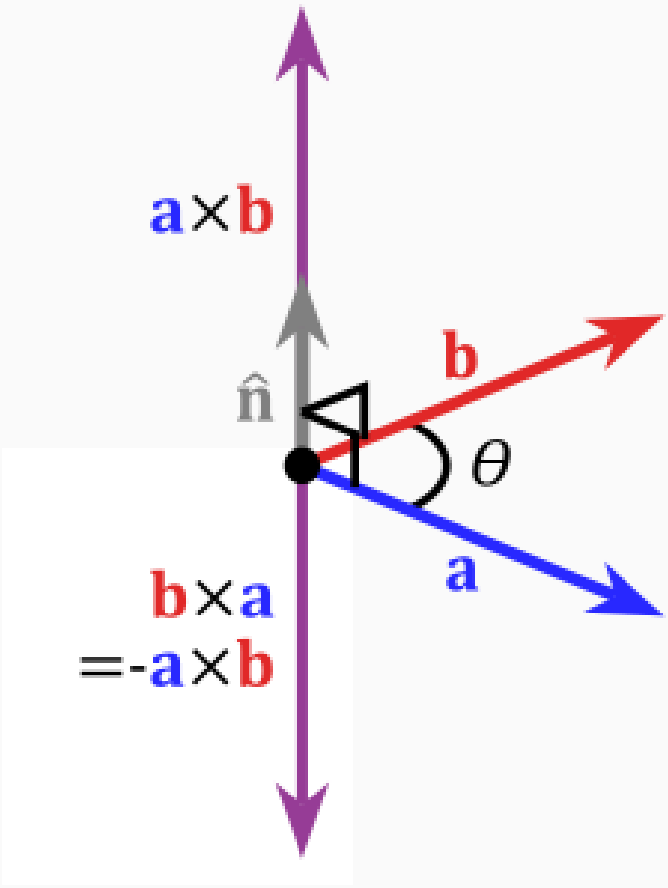
Esercizio



Dati i due vettori $\vec{a} = (5, 2, -7)$ e $\vec{b} = (4,7,3)$, calcolare

1. Modulo a, b
2. Prodotto scalare
3. Proiezione di $\vec{a}$ su b e di $\vec{b}$ su $\vec{a}$
4. Angolo compreso tra i due vettori

1. $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 7^2} = 8.83;$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 3^2} = 8.60$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x\, b_x + a_y b_y + a_z b_z = (5)(4) + (2)(7) + (-7)(3) = 20 + 14 - 21 = 13$
3. Proiezione di $\vec{a}$ su $\vec{b}$: $\mathrm{acos}(\theta) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b} = \frac{13}{8.6} = 1.5$; Proiezione di $\vec{b}$ su $\vec{a}$: $\mathrm{bcos}(\theta) = \frac{13}{8.83} \sim 1.47$
4. Angolo compreso $\cos(\theta) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\, b} = \frac{13}{8.83(8.6)} = 0.17 \rightarrow \emptyset = \mathrm{acos}(0.17) = 1.39\, rad$



Prodotto vettoriale: risultato è uno vettore

E' definito come:

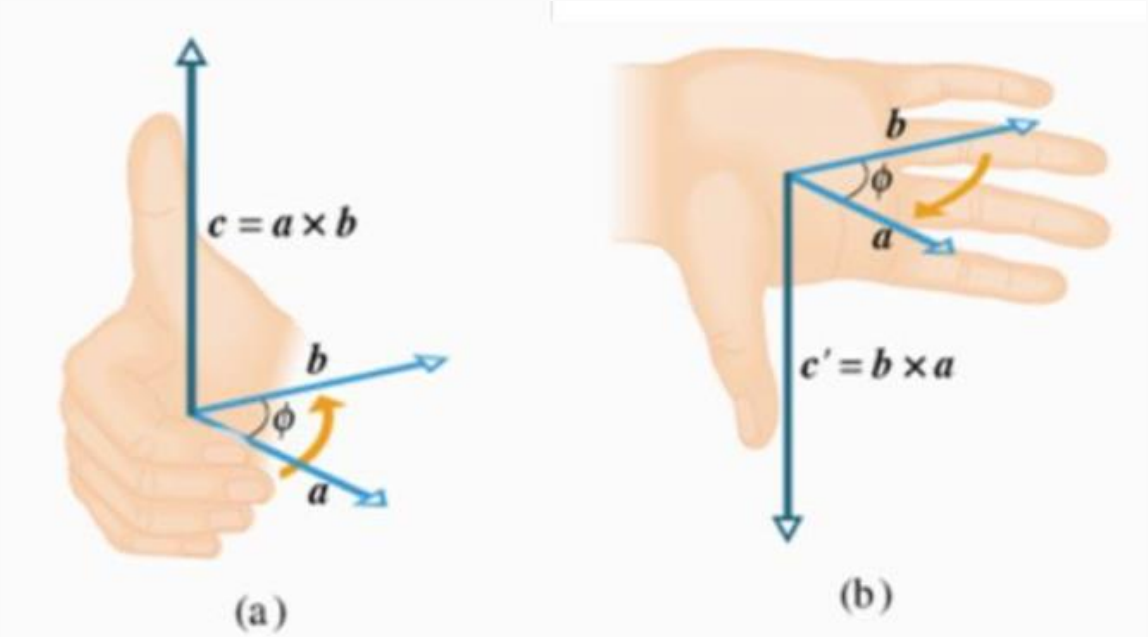
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \text{ oppure } \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

- Modulo: si calcola con $c = a\, b \sin(\theta)$
- Direzione: perpendicolare al piano formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- Verso: regola della mano destra

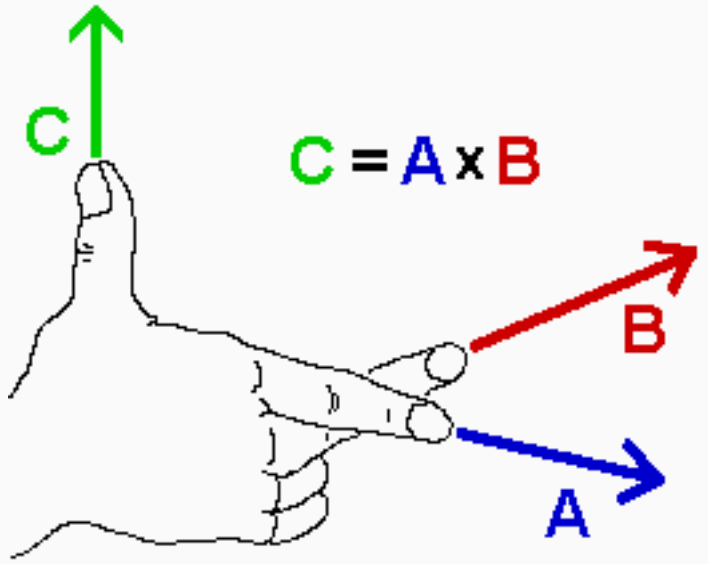
Risulta anche che

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

Regola della mano destra



Metodo 1: le dita vanno dal primo al secondo vettore. Il pollice indica direzione e verso



Metodo 2: indice sul primo, medio sul secondo, pollice indice direzione e verso.

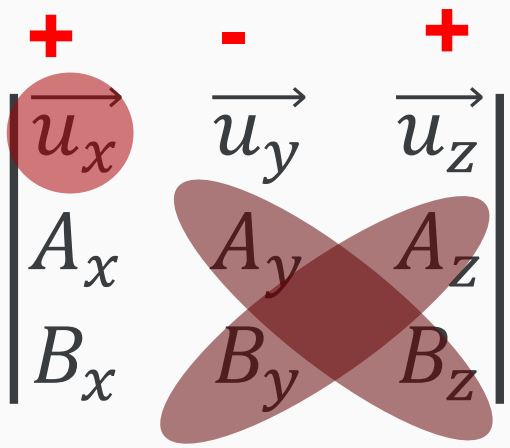
Componenti del prodotto vettoriale

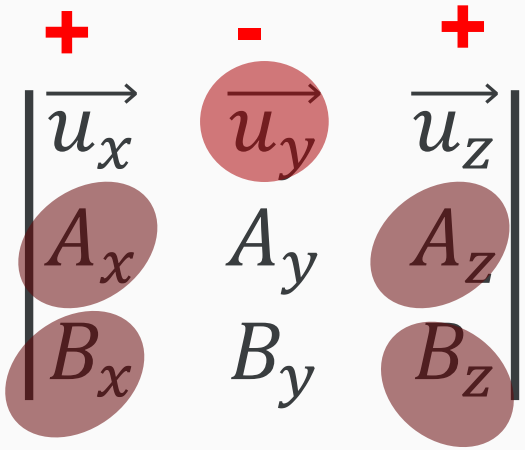
$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$
$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

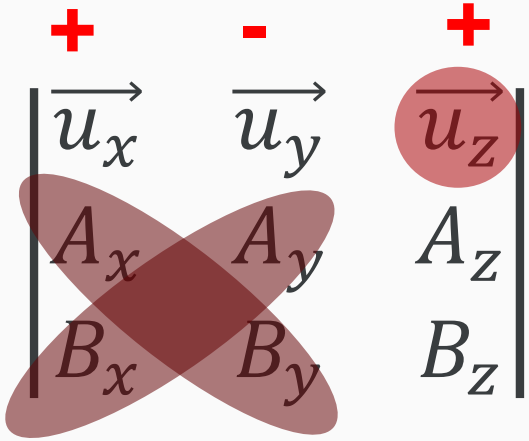
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (C_x, C_y, C_z)$$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Per calcolare le componenti del vettore $\vec{C}$, disegnare il diagramma





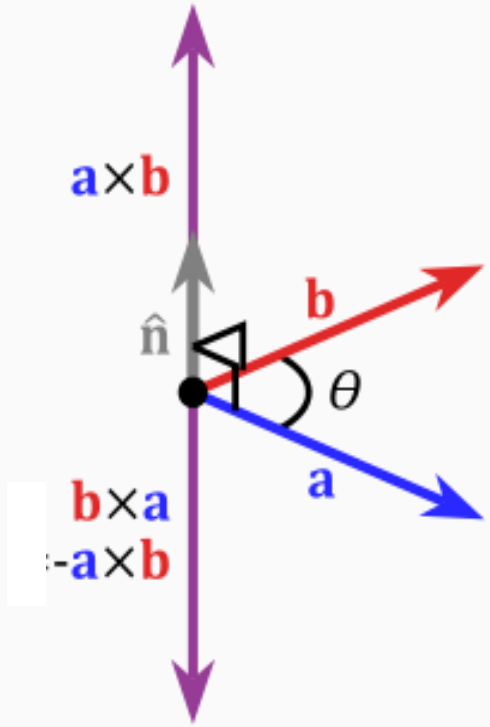


$$C_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$C_y = -A_x B_z + A_z B_x$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

L'ordine dei fattori e casi particolari

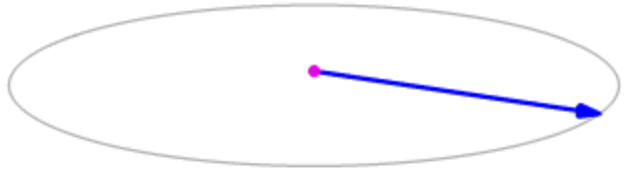


ORDINE DEI FATTORI:
Il prodotto vettoriale cambia se si invertono i fattori:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$$
$$\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{c}$$

CASI PARTICOLARI

1. Se due vettori sono paralleli o antiparalleli,
   $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$



2. Se due vettori sono perpendicolari:
   Modulo di $\vec{a}\times\vec{b} = ab \quad (\sin(\pi/2) = 1)$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ A_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = A_x B_y \overrightarrow{u_z}$$

Q: Dati I due vettori $\vec{a} = (5, -2, 7)$ e $\vec{b} = 4u_x + 7u_y + 3u_z$ calcolare il prodotto vettoriale

Definisco $\vec{z} = \vec{a} \times \vec{b}$

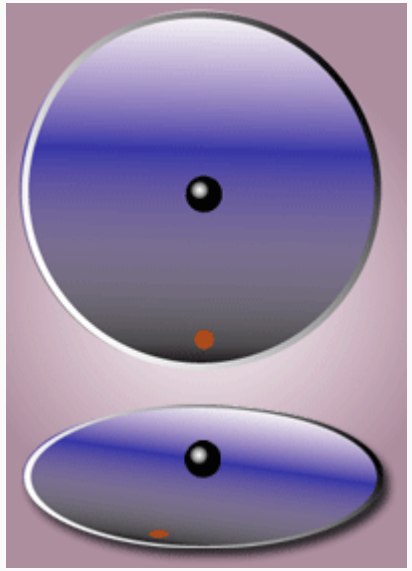
$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 5 & -2 & 7 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$z_x = (-2)(3) - 7(7) = -55$$
$$z_y = -(5)(3) + 7(4) = 13$$
$$z_z = 5(7) - (-2)(4) = 43$$

$$\vec{z} = (-55, 13, 43)$$

Coriolis force

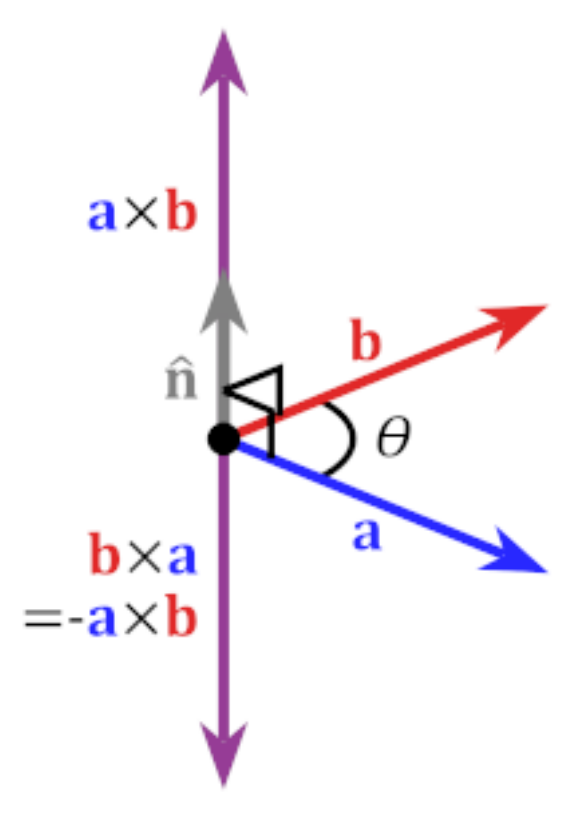
$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}$$



https://javalab.org/en/coriolis_effect_en/

Coriolis apparent force

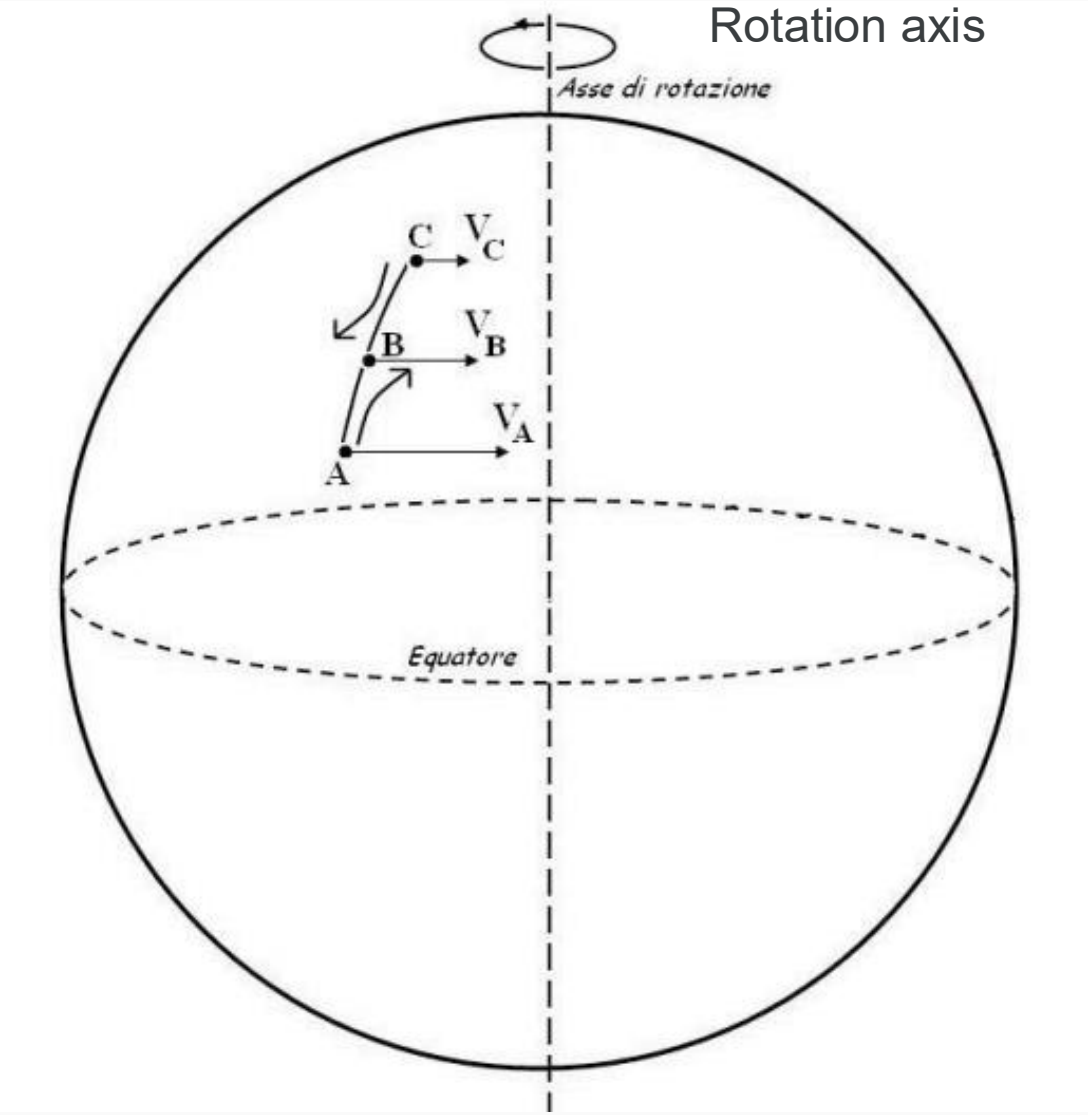
$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}$$

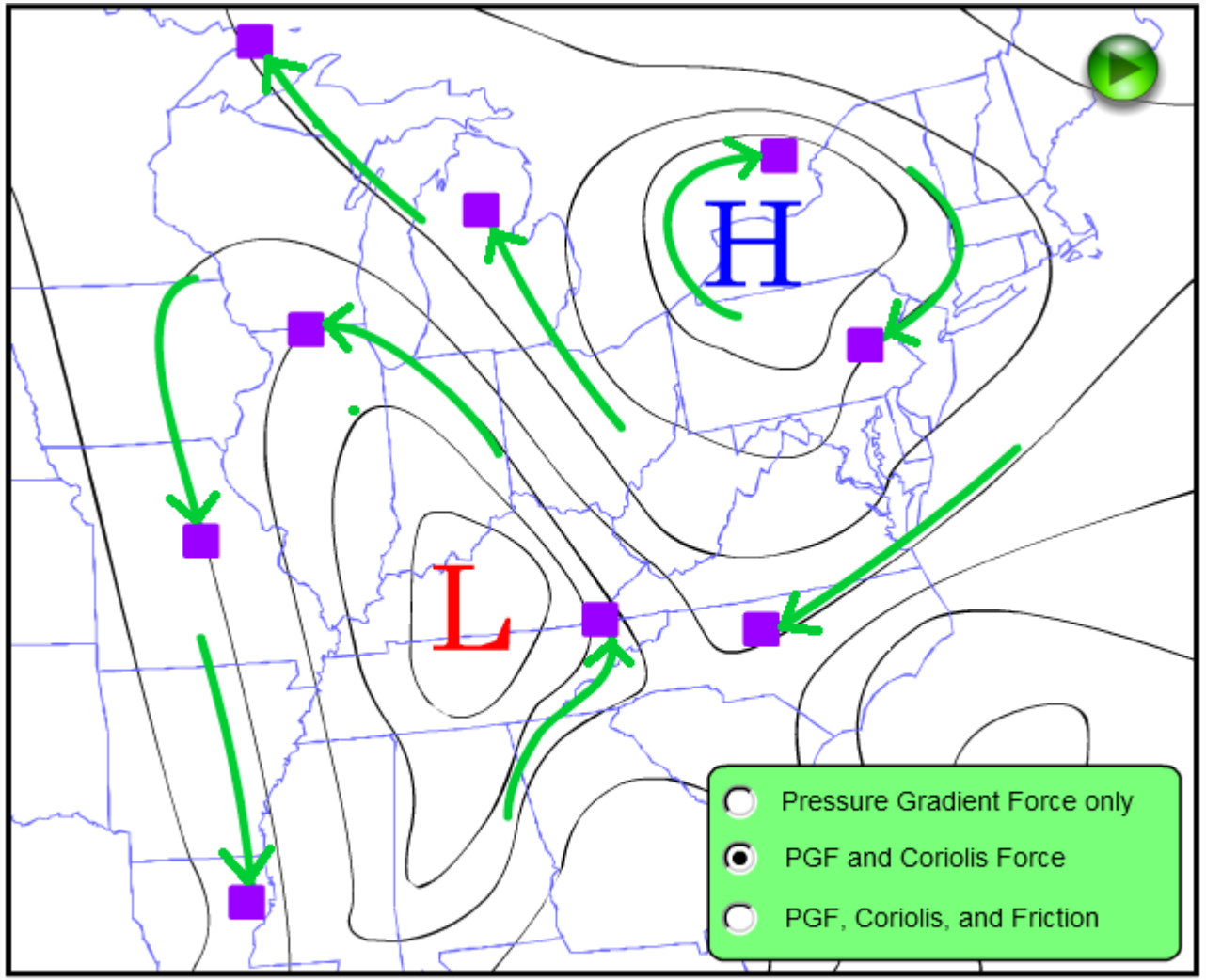






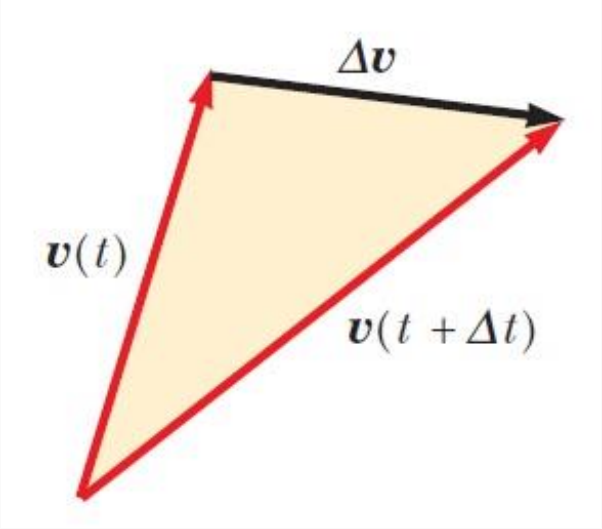
Forza apparente di Coriolis





Under the influence of the PGF and the Coriolis Force, air parcels will follow the isobars, with lower pressure to the left (facing in the direction of motion).

Altri esempi di prodotto vettoriale?



$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}.$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u} + |\vec{v}|\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

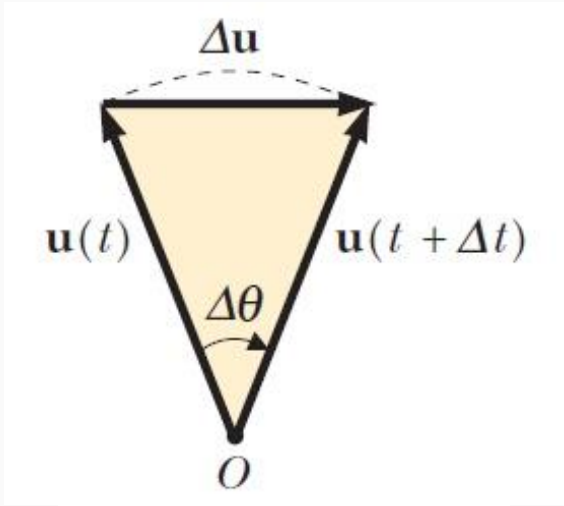
$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad \text{se } m \text{ è costante}$$

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \frac{dm}{dt}\boldsymbol{v} + m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad \text{se } m \text{ dipende da } t$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

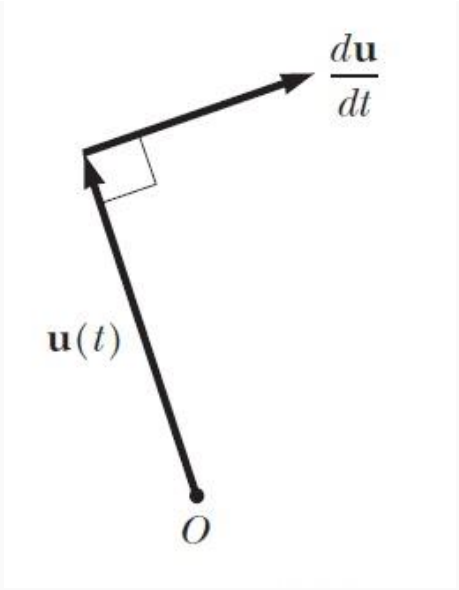
Derivata di un versore



$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)$$

In modulo $du = |u(t)|d\theta = d\theta$

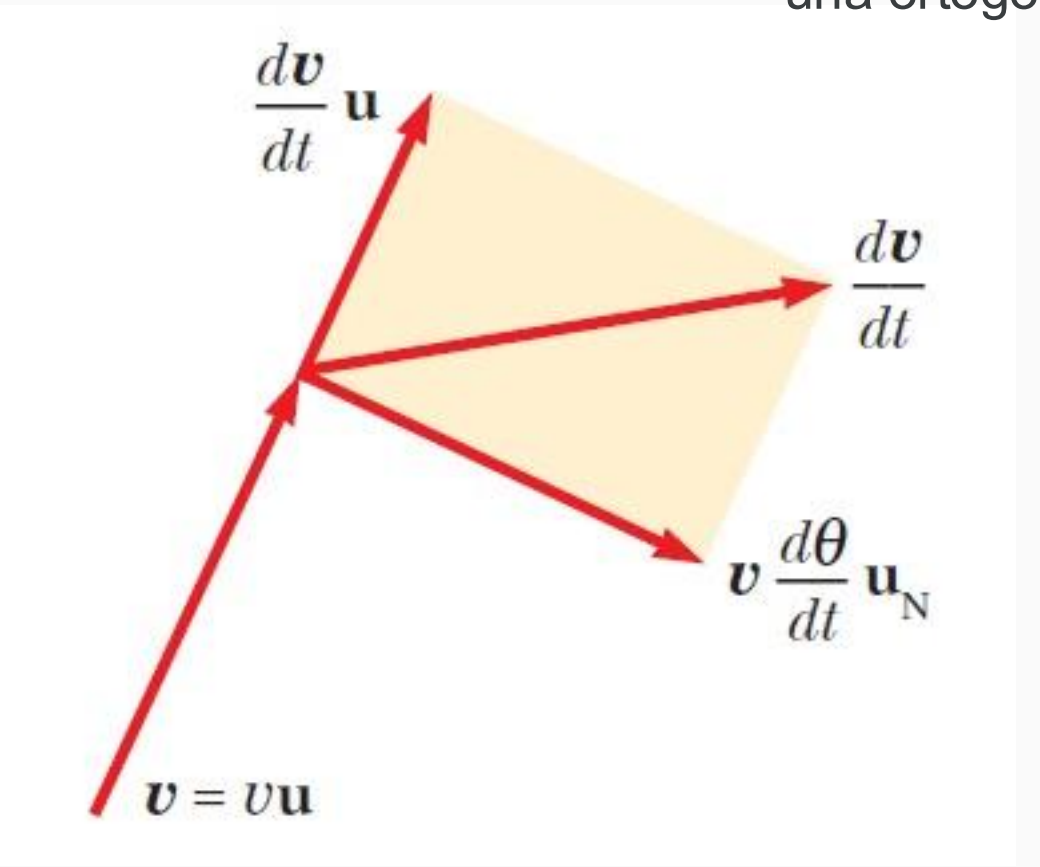
In direzione Perpendicolare a $\vec{u}$ → $\overrightarrow{u_N}$



$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N$$

Derivata di un vettore

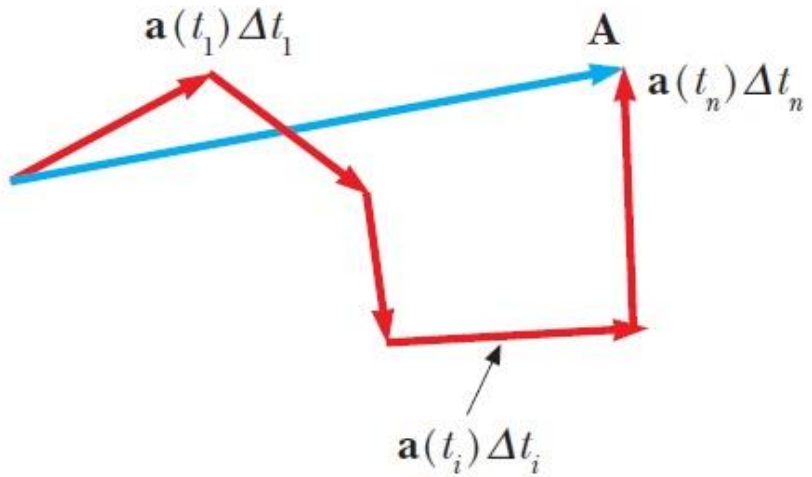
La derivate di un vettore ha quindi:
una componente parallela al vettore legata al cambiamento di modulo
una ortogonale al vettore legata al cambiamento di direzione



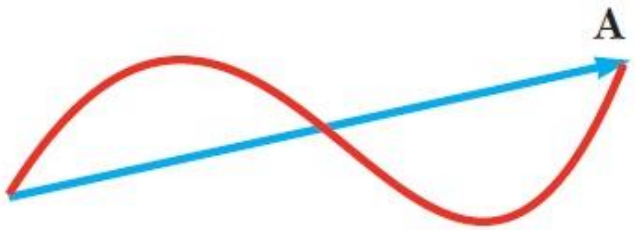
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u} + v\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N$$

Con modulo pari a $$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + v\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}$$

Integrazione vettoriale



(a)



(b)

L'integrale di un vettore è la somma di tutti i vettori infinitesimi

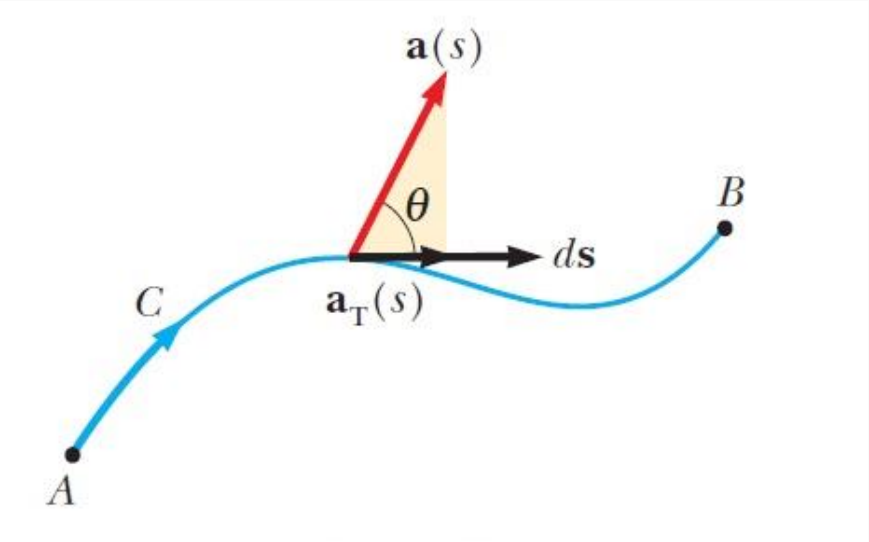
$$\mathbf{A} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{1}^{n}{}_i \, \mathbf{a}(t_i)\,\Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t)\,dt;$$

Esprimendo il vettore tramite le component, basta sommarle …

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\,\mathbf{u}_x + a_y(t)\,\mathbf{u}_y + a_z(t)\,\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{A} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{u}_x \int_{t_1}^{t_2} a_x(t)dt + \mathbf{u}_y \int_{t_1}^{t_2} a_y(t)dt + \mathbf{u}_z \int_{t_1}^{t_2} a_z(t)dt:$$

Integrale di linea

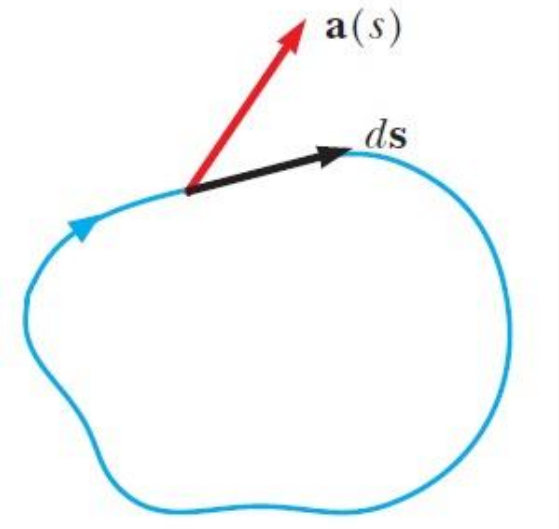


Consideriamo una curva C di estremi A e B
Detta s la coordinata che individua il punto sulla curva C
E in tutti i punti di C è definito un vettore $\vec{a}(s)$

$$\mathbf{a}(s)\cdot d\mathbf{s} = a(s)\cos\theta\, ds = a_{\mathrm{T}}(s)\, ds$$

Integrale di linea

$$\Gamma(A \to B \text{ lungo } C) = \int_A^B \mathbf{a}\cdot d\mathbf{s}.$$



$\oint \vec{a}\cdot d\vec{s}$ Circuitazione lungo una linea chiusa

Chiusura



Sommario

- Ogni grandezza fisica si misura in una certa unità di misura.
- Ci sono grandezze vettoriali e grandezze scalari
- La grandezze vettoriali hanno operazioni tra loro (somma, differenza, prodotto interno e esterno) che posso dare come risultato uno scalare o un vettore

Termini chiave

- Grandezza, unità di misura
- Cifre significative
- Notazione scientifica
- Scalare, Vettore, vettore applicato, sistema di riferimento
- Versore, componenti di un vettore, proiezione di un vettore su una direzione
- Regola mano destra

Esercizi

Q: Un quinto della popolazione mondiale possiede una macchina e compie 100 km al giorno, quante tonnellate di CO_2 immettiamo in atmosfera? Dati iniziali: Popolazione mondiale: 7miliardi; Consumo macchina: 1kg benzina/25km; 1kg di benzina produce 3.09 kg di CO_2

Q: Indice di massa corporea è $BMI = m/h^2$ (m=massa [kg], h = altezza [m]). Un valore corretto di BMI è tra 25 e 30. Se sono alto 180cm, quali sono i valori di massa minimi e massimi che dovrei avere per avere un BMI tra 25 e 30?

Q: Una cellula umana considerata sferica ha un diametro interno d=10micrometri ed è circondata da un membrana di spessore 5nm. Quale è il volume totale della cellula? Quale è il volume occupato dalla membrana? Quale percentuale di volume totale è occupato dalla membrana?

Q: La velocità del suono è circa 340m/s, esprimere in km/h.

Esercizio sulle operazioni

$\vec{a} = (0, -3, +5)$
$\vec{b} = (-2, 0, -3)$

Calcolare

$\vec{a} + \vec{b}$
$\vec{a} - \vec{b}$

Proiezione di $\vec{a}$ su $\vec{b}$

Angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$

Prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Prodtto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$

Domande di autovalutazione

- Quante operazioni conosci tra vettori?
- Tutte le operazioni tra vettori danno vettori?
- Disegna il vettore somma e la differenza di vettori con la regola del parallelogramma
- Enunciare i casi in cui i prodotti scalari e vettoriali sono minimi e massimi
- Valutare chi è maggiore tra (dove $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ vettori):

  $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$ e $|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$
  $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$ e $|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$
  $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|$ e $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$
  $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ e $|\mathbf{a}|\times|\mathbf{b}|$

Esercizio

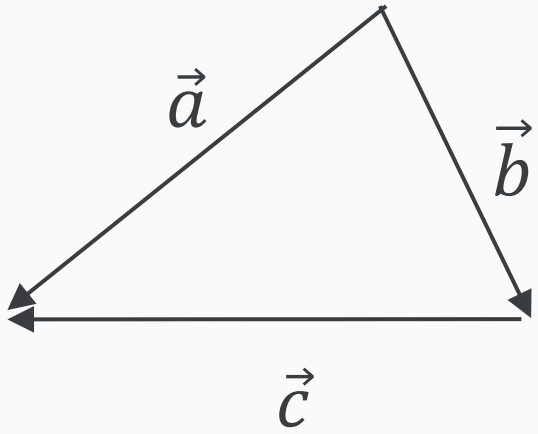
1. Durante l'Erasmus in Inghilterra, vi danno 7 pound per ogni 100 piedi quadri di campo vangato. A quanti euro per ettaro corrispondono?
2. È più veloce un oggetto che si muove a 340 m/s oppure a 1050 km/h?
3. Durante una cena, ho lasciato accese tre luci da 25W per 90 minuti, considerando che pago 0.01 euro/kWh, quanto mi è costata l'elettricità per la cena?

Esercizio

- Se faccio una partizione da 350 GB su un disco da 1TB, quanto spazio mi rimane sulla seconda partizione (esprimere in PB)?
- Quest'anno ho raccolto 1.1 kEeuro, poi 300 Euro, e infine ho speso 1 daEuro, quandi soldi ho?
- In un litro ci sono 10^{26} molecole d'acqua. Quante sono espresse in 'peta-molecole'?

Approfondimenti

Approfondimento: prodotto scalare



Dimostrazione che $ab\cos\emptyset = a_x b_x + a_y b_y + c_x c_y$

Per il teorema del coseno, che è una estensione del teorema di Pitagora a triangoli non rettangoli, vale la relazione scalare:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (infatti per $\gamma = \pi/2$ vale $\cos\gamma = 0$)

La relazione analoga vettoriale $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

Allora: $|\vec{c}|^2 = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

Quindi

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) + \left((a_x - b_x)^2 + \left(a_y - b_y\right)^2\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(2a_x b_x + 2a_y b_y\right) = a_x b_x + a_y b_y$$

Approfondimento: prodotto vettoriale

Per dimostrare come si calcolano le componenti del prodotto vettoriale, si può usare la proprietà distributiva per il prodotto vettoriale

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})\\ &= a_1b_1(\mathbf{i}\times\mathbf{i})+a_1b_2(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+a_1b_3(\mathbf{i}\times\mathbf{k})+\\ &\quad a_2b_1(\mathbf{j}\times\mathbf{i})+a_2b_2(\mathbf{j}\times\mathbf{j})+a_2b_3(\mathbf{j}\times\mathbf{k})+\\ &\quad a_3b_1(\mathbf{k}\times\mathbf{i})+a_3b_2(\mathbf{k}\times\mathbf{j})+a_3b_3(\mathbf{k}\times\mathbf{k})\end{aligned}$$

Ma siccome i versori a due a due paralleli danno prodotto vettoriale zero $i\times i = j\times j =$ 0 mentre $i\times j = k, j\times i = -k$, ...

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = &-a_1b_1\mathbf{0}+a_1b_2\mathbf{k}-a_1b_3\mathbf{j}\\ &-a_2b_1\mathbf{k}-a_2b_2\mathbf{0}+a_2b_3\mathbf{i}\\ &+a_3b_1\mathbf{j}-a_3b_2\mathbf{i}-a_3b_3\mathbf{0}\\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Soluzioni

1. Durante l'Erasmus in Inghilterra, vi danno 7 pound per ogni 100 piedi quadri di campo vangato. A quanti euro per ettaro corrispondono?

$$\frac{7\ p}{100\ ft^2}\cdot\frac{1.2\ Eu}{1p}\cdot\frac{1ft^2}{(0.3*0.3)m^2}\cdot\frac{10^4m^2}{1ha}=\frac{8.4\ 10^4}{9}=9333\ Eu$$

2. È più veloce un oggetto che si muove a 340 m/s oppure a 1050 km/h?

$$\frac{340m}{s}\frac{3600s}{1h}\frac{1km}{1000m}=\frac{1224km}{h}$$

3. Durante una cena, ho lasciato accese tre luci da 25W per 90 minuti, considerando che pago 0.01 euro/kWh, quanto mi è costata l'elettricità per la cena?

$$25W(3)(90\ \text{min}\quad)\frac{1h}{60min}=112.5Wh\frac{0.01\ Eu}{kWh}=112.5\frac{0.01\ Eu}{1000}=1.12*10^{-3}Eu$$