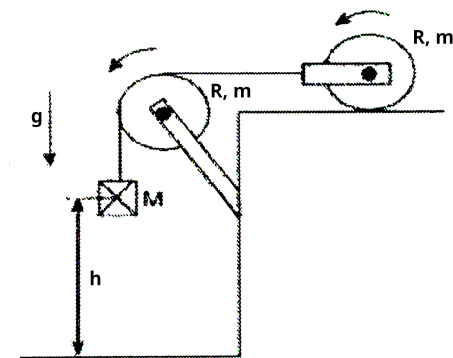


Esercizio 1



Un cilindro pieno e omogeneo di massa m e raggio R , può rotolare senza strisciare su un piano orizzontale scabro. Il cilindro è dotato di un giogo, di massa trascurabile, che ne consente la rotazione senza attrito attorno al proprio asse.

Un filo inestensibile, di massa trascurabile, passa per la gola di una carrucola di massa m e di raggio R , che può rotolare con moto di puro rotolamento attorno al proprio asse. Un estremo del filo è collegato al giogo del cilindro, mentre l'altro estremo è collegato ad un blocco di massa M maiuscolo, di dimensioni trascurabili, inizialmente sospeso ad altezza h dal suolo.

Il sistema, che è inizialmente in quiete, è lasciato libero di muoversi e la massa M inizia a scendere, mettendo in rotazione il cilindro e la carrucola.

1. Scrivere le equazioni cardinali della dinamica per il sistema in questione e calcolare:
 - (a) l'accelerazione del centro di massa del cilindro;
 - (b) l'accelerazione della massa M maiuscolo sospesa;
 - (c) i valori delle tensioni e del modulo della forza di attrito tra il cilindro e il piano.
 - (d) Qual è l'energia dissipata dal sistema tra la condizione iniziale e quando la massa M ha toccato terra?
2. Nell'istante di tempo t^* in cui tocca terra, calcolare la velocità v^* con la quale la massa M arriva al suolo.
3. Verificare per quali valori del coefficiente di attrito statico μ_s tra piano e cilindro può sussistere il moto di puro rotolamento del cilindro.

Dati: m uguale $5.0 \times 10^{-1} \text{ kg}$, R è uguale a 10 cm , M è 1.0 kg , h è 2 m . Si ricordi che il momento di inerzia I di un disco rigido omogeneo di massa m e raggio R rispetto ad un asse passante per il centro del disco e ad esso perpendicolare vale $I = mR^2/2$.

Soluzione

Imposto il problema assumendo che la carrucola sia un disco omogeneo di massa m e raggio R , con asse fisso, e che il filo non slitti sulla carrucola. Uso T_1 sul lato del cilindro e T_2 sul lato della massa sospesa.

Con le ipotesi standard: cilindro pieno ($I_c = \frac{1}{2}mR^2$), carrucola disco pieno ($I_p = \frac{1}{2}mR^2$), filo senza slittamento.

Sia a l'accelerazione del cilindro verso la carrucola e della massa (M) verso il basso ed f la forza d'attrito che permette al cilindro di rotolare senza scivolare ed α l'accelerazione angolare del cilindro ($a = \alpha \cdot R$). Per il cilindro si hanno quindi le seguenti equazioni cardinali:

$$T_1 - f = ma$$

$$fr = I_c \alpha_c = \frac{1}{2}mr^2 \frac{a}{R}$$

quindi

$$f = \frac{1}{2}ma$$

e dunque

$$T_1 = \frac{3}{2}ma$$

Per la carrucola:

$$(T_2 - T_1)R = I_p \alpha_p = \frac{1}{2}mR^2 \frac{a}{R}$$

quindi

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}ma$$

Per la massa sospesa:

$$Mg - T_2 = Ma$$

Essendo la corda inestensibile l'accelerazione della massa M e del cilindro m sono uguali. Sostituendo:

$$Mg - \frac{3}{2}ma - \frac{1}{2}ma = Ma$$

$$Mg = (2m + M)a$$

$$a = \frac{Mg}{(2m + M)}$$

Con $m = 0.5 \text{ kg}$, $M = 1 \text{ kg}$:

$$a = \frac{1 \cdot 9.81}{2 \cdot 0.5 + 1.0} = 4.9 \text{ m/s}^2$$

Quindi $a_c = 4.9 \text{ m/s}^2$ verso la carrucola, $a_M = 4.9 \text{ m/s}^2$ verso il basso.

Le tensioni sono:

$$T_1 = \frac{3}{2}ma = \frac{3}{2} \cdot (0.5)(4.9) = 3.7 \text{ N}$$

$$T_2 = 2ma = 2 \cdot (0.5)(4.9) = 4.9 \text{ N}$$

La forza di attrito sul cilindro vale:

$$f = \frac{1}{2}ma = \frac{1}{2}(0.5)(4.9) = 1.2 \text{ N}$$

ed è diretta in verso opposto a (T_1) , cioè orizzontalmente all'indietro rispetto al moto del cilindro.

Per secondo punto, la velocità con cui la massa arriva al suolo da $(h = 2 \text{ m})$ è:

$$v^* = \sqrt{2ah} = \sqrt{2(4.9)(2)} = 4.4 \text{ m/s}$$

per il terzo punto, La condizione di puro rotolamento è:

$$f \leq \mu_s mg$$
$$\mu_s \geq \frac{f}{mg} = \frac{1.2}{0.5 \cdot 9.81} = 0.25$$

quindi:

$$\boxed{\mu_s \geq 0.25}$$

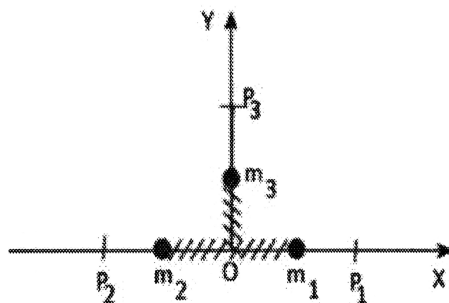
Per quanto riguarda il quarto punto all'inizio il sistema è in quiete per cui l'energia cinetica totale è nulla. Quando viene lasciata la massa M varia la sua energia potenziale $\Delta U = Mgh = -19.6 \text{ J}$. Tutta questa energia potenziale viene convertita in energia cinetica nei tre corpi. La massa toccando terra si ferma, quindi occorre calcolare la sola energia cinetica della carrucola e del cilindro.

$$K_{carr} = \frac{1}{2}I_p\alpha_p^2 = \frac{1}{2}mR^2\frac{a^2}{R^2} = 6.0 \text{ J}$$
$$K_c = \frac{1}{2}I_c\alpha_c^2 + \frac{1}{2}mv^{*2} = 6.0 + 4.8 \text{ J}$$

Si ha quindi che l'energia dissipata è

$$W_{diss} = \Delta U + \Delta K = -19.6 + 6.0 + 6.0 + 4.8 = -2.8 \text{ J}$$

Esercizio 2



Tre molle ideali e_1 , e_2 ed e_3 sono disposte nel piano xy con uno degli estremi fissato nell'origine; le tre molle hanno la stessa costante elastica k e sono compresse della stessa quantità δ .

Nel sistema di riferimento siffatto l'asse z esce dal foglio e l'accelerazione di gravità $\vec{g} = (0, 0, -g)$.

Tre punti materiali di massa m_1 , m_2 e m_3 sono poggiati rispettivamente sugli estremi liberi di e_1 , e_2 ed e_3 .

Ad un certo istante, le molle si decomprimono simultaneamente, sicché il punto m_1 inizia a muoversi lungo la direzione positiva dell'asse x , il punto m_2 lungo la direzione negativa dell'asse x e il punto m_3 lungo la direzione positiva dell'asse y . Le molle hanno lunghezza a riposo D . Gli assi x e y sono scabri a partire dalle posizioni $\vec{P}_1 = (D, 0, 0)$, $\vec{P}_2 = (-D, 0, 0)$ e $\vec{P}_3 = (0, D, 0)$ con lo stesso coefficiente di attrito dinamico μ_d .

Sapendo che m_1 e m_2 percorrono lo stesso tratto s prima di fermarsi, mentre il punto m_3 dopo aver percorso un tratto s' :

1. Trovare l'espressione (solo la formula!) della velocità di ciascun punto nelle rispettive posizioni P_1 , P_2 e P_3 e il valore numerico di m_1 , m_2 e m_3 ;
2. Trovare quale dei tre punti si ferma per primo e in quale istante t^* si ferma;
3. Calcolare le componenti del vettore posizione $\vec{r}_c$ del centro di massa, le componenti della velocità $\vec{v}_{CM}$ del centro di massa e l'energia cinetica K_c del centro di massa nell'istante $t' = t^*/2$;
4. Calcolare il lavoro totale W_{tot} fatto dalle forze di attrito quando tutti e tre i punti si sono fermati.

Dati: $k = 2.0 \times 10^6 \text{ N/m}$, $\delta = 1 \text{ cm}$, $s = 10 \text{ m}$, $s' = 5 \text{ m}$, $\mu_d = 0.5$, $D = 1 \text{ m}$.

Soluzione

Le molle sono vincolate nell'origine, sono tutte compresse di una quantità δ e arrivano tutte in una nuova posizione D. Visto che fino a D non c'è attrito l'energia si conserva e per tutti i punti la variazione di energia potenziale corrisponderà alla variazione di energia cinetica.

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}k\delta^2$$

$$v_i = \sqrt{\frac{k}{m_i}}|\delta|$$

A partire dal punto $\vec{P}_i$ i punti materiali si staccano dalla molla e la sola forza nel piano xy che agisce è l'attrito. Quando tutta l'energia cinetica viene consumata dall'attrito il punto materiale si ferma. Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \mu_d m g s_i$$

$$v_i = \sqrt{2\mu_d g s_i}$$

Uguagliando le due relazioni quindi ottengo:

$$\mu_d g s_i = \frac{1}{2} \frac{k}{m_i} \delta^2$$

$$m_i = \frac{1}{2} \frac{k}{\mu_d g s_i} \delta^2$$

Si ha quindi per i tre corpi $m_1 = m_2 = 2.0 \text{ kg}$ e $m_3 = 4.1 \text{ kg}$

Per valutare nella seconda domanda quando si fermano i punti materiali si può semplicemente considerare che l'unica forza presente è quella d'attrito nel piano xy e quindi la forza d'attrito determina l'accelerazione ($m_i a_i = -\mu_d m_i g$)

$$s_i = \frac{1}{2} \mu_d g t_i^2$$

$$t_i = \sqrt{\frac{2s_i}{\mu_d g}}$$

Il tempo in cui si ferma è quindi indipendente dalla massa ma dipende dalla distanza per cui si fermerà prima la massa m_3 nell'istante $t^* = 1.4 \text{ s}$

Se si considera il centro di massa lungo l'asse x il sistema è simmetrico per cui visto che la velocità lungo x all'inizio è nulla rimarrà sempre nulla. Nel caso di y invece la quantità di moto all'inizio è nulla ma dopo è diversa da zero, questo perché il vincolo che fissa l'estremità nell'origine applica una forza esterna al sistema. Lungo y quindi il momento non si conserva e la forza del vincolo (la forza esterna) agirà sul moto del centro di massa.

Lungo x e z le componenti del CM sono nulle. Lungo y si ha:

$$y^{cm} = \frac{m_1 y_1^{cm} + m_2 y_2^{cm} + m_3 y_3^{cm}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{y_1^{cm} + y_2^{cm} + 2y_3^{cm}}{1 + 1 + 2} = \frac{1}{4} (0 + 0 + 2y_3) = \frac{1}{2} y_3$$

L'analogo si ottiene anche per la velocità per cui

$$\begin{aligned}\vec{r}_{cm} &= \left(0, \frac{1}{2}y_3, 0\right) \\ \vec{v}_{cm} &= \left(0, \frac{1}{2}v_3, 0\right)\end{aligned}$$

quindi all'istante t' la velocità di m_3 sarà $v'_3 = \mu_d g \frac{t^*}{2}$. Per l'energia cinetica del CM si ha quindi

$$\begin{aligned}K_{cm} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \left(\frac{v'_3}{2}\right)^2 \\ &= m_3 \left(\frac{1}{4}\mu_d g\right)^2 \frac{2s_3}{\mu_d g} = \frac{1}{8} m_3 \mu_d g s_3 \\ &= \frac{1}{16} k \delta^2 = 12.5 \text{ J}\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il lavoro delle forze d'attrito quando il sistema torna in quiete, essendo l'unica forza dissipativa e non facendo lavoro il vincolo, si ha che equivale all'energia potenziale elastica iniziale.

$$W = 3 \cdot \frac{1}{2} k \delta^2 = 300 \text{ J}$$

Scelta multipla

1. Un'equazione per l'energia potenziale afferma $U = mgp$. Se U è in $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$, m è in kg e g è in $m \cdot s^{-2}$, quali sono le unità di p ?
 - (a) s
 - (b) s^2
 - (c) m^{-1}
 - (d) m (X)
 - (e) kg^{-1}
2. Due blocchi di masse disuguali sono collegati da un cavo ideale di lunghezza fissa che passa sopra una puleggia ideale. Cosa è vero per quanto riguarda le accelerazioni dei blocchi e le forze nette che agiscono sui blocchi?
 - (a) accelerazioni uguali in modulo, forze nette disuguali in modulo (X)
 - (b) accelerazioni disuguali in modulo, forze nette uguali in modulo
 - (c) accelerazioni disuguali in modulo, forze nette disuguali in modulo
 - (d) accelerazioni uguali in modulo, forze nette uguali in modulo
3. Una cassa contenente un nuovo scaldabagno pesa 800 N. La cassa poggia sul pavimento del seminterrato. Tim spinge orizzontalmente su di esso con una forza di 400 N, ma non si muove. Cosa puoi concludere sul coefficiente di attrito statico tra la cassa e il pavimento?
 - (a) $\mu_s = 0,5$
 - (b) $\mu_s \geq 0,5$ (X)
 - (c) $\mu_s \leq 0,5$
 - (d) Non vengono fornite informazioni sufficienti per trarre nessuna di queste conclusioni.
4. Due proiettili lanciati con la stessa velocità iniziale ma con diversi angoli di lancio 30° e 60° atterrano nello stesso punto. Ignora la resistenza dell'aria. Quale ha la maggiore componente di velocità orizzontale v_x ?
 - (a) proiettile lanciato a 60°
 - (b) proiettile lanciato a 30° (X)
 - (c) Sono uguali
 - (d) Dipende dalla gravità lungo z

5. Le unità SI del momento angolare sono

- | | |
|------------------------------|----------------------------------|
| (a) $\frac{rad}{s}$ | (d) $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$ |
| (b) $\frac{rad}{s^2}$ | (e) $\frac{kg \cdot m^2}{s}$ (X) |
| (c) $\frac{kg \cdot m}{s^2}$ | (f) $\frac{kg \cdot m}{s}$ |

6. Una persona va in bicicletta lungo una strada dritta. Dal punto di vista del pilota, qual è la direzione del vettore momento angolare della ruota anteriore?

- (a) su
- (b) avanti
- (c) indietro
- (d) sinistra (X)
- (e) destra
- (f) giù

7. Posizioni due monete diverse sulla copertina di un libro e poi sollevi lentamente la copertina. Supponendo che i coefficienti di attrito statico siano gli stessi, quale affermazione è vera?

- (a) La moneta con massa maggiore inizia a scivolare per prima.
- (b) La moneta con massa minore inizia a scivolare per prima.
- (c) Le due monete iniziano a scivolare allo stesso tempo. (X)
- (d) La moneta che ha attrito dinamico minore inizia a scivolare prima.

8. Una donna si trova sul marciapiede in movimento di un aeroporto e si muove verso ovest a velocità costante. La forza di attrito sulla donna è _____ (Ignorare la resistenza dell'aria.)

- (a) zero
- (b) statica e verso ovest (X)
- (c) dinamica e verso ovest
- (d) dinamica e verso est
- (e) statica e verso est

9. Un fiume scorre verso est a $2,2 \text{ m/s}$. Stefano può nuotare a $2,5 \text{ m/s}$ in acque calme. Se desidera attraversare il fiume in modo che la sua direzione sia direttamente verso nord, quanto tempo gli ci vorrà per attraversare il fiume largo 75 m ?
- (a) 39 s
 - (b) 30 s
 - (c) 34 s
 - (d) 63 s (X)
10. Due oggetti di pari massa e velocità colpiscono un muro. Entrambi rimbalzano con la stessa velocità nella direzione opposta. Entrambi gli oggetti sperimentano lo stesso cambiamento di momento ma uno subisce il doppio della forza media dell'altro. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
- (a) Il tempo di contatto tra uno degli oggetti e la parete è $1/3$ del tempo di contatto dell'altro.
 - (b) I tempi di contatto tra gli oggetti e la parete sono uguali.
 - (c) Il tempo di contatto tra uno degli oggetti e la parete è un quarto del tempo di contatto dell'altro.
 - (d) Il tempo di contatto tra uno degli oggetti e la parete è il doppio del tempo di contatto dell'altro. (X)
 - (e) La variazione dell'energia cinetica è diversa per i due oggetti.