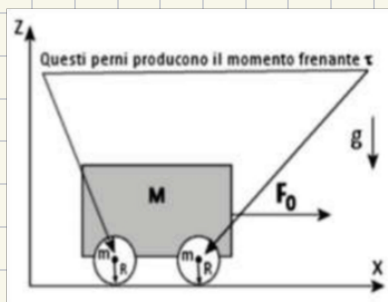


Esercizio 1



Un sistema S in figura, formato da un carrello di massa M dotato di 4 ruote di massa m e raggio R momento di inerzia I rispetto al centro, viene mosso nella direzione positiva dell'asse x mediante l'applicazione una forza orizzontale costante in modulo direzione e verso $\vec{F}_0 = (F, 0, 0)$.

Si sa che il moto di rotazione delle ruote è di puro rotolamento e che l'asse di rotazione di ciascuna ruota esercita su di essa un momento frenante costante $\vec{\tau}$.

1. Scrivere le equazioni cardinali della dinamica per il sistema S .
2. Calcolare l'accelerazione del centro di massa del carrello e la forza di attrito volvente agente su ciascuna ruota.
3. Sapendo che il centro di massa del sistema S all'istante $t = 0$ possiede una velocità $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ calcolare la potenza dissipata dall'attrito prodotto dagli assi delle ruote quando il c.m. del carrello ha percorso la distanza D .
4. Se dopo la distanza D la forza $\vec{F}$ fosse nulla e il carrello incontrasse una salita di angolo 30 gradi rispetto l'orizzontale. A che altezza rispetto al livello di partenza arriverebbe il carrello?
5. Il sistema S dopo un certo tempo raggiunge una curva di raggio R_c e dotata di una pendenza di 30 gradi rispetto l'orizzontale verso il centro della curva. Conoscendo il coefficiente di attrito statico μ_s a che velocità massima il sistema S può affrontare la curva?

Dati: $M = 50 \text{ kg}$, $m = 15 \text{ kg}$, $R = 50 \text{ cm}$, $\tau = 0.5 \text{ Nm}$, $v_0 = 1.0 \text{ m/s}$, $F_0 = 400 \text{ N}$, $D = 5 \text{ m}$, $R_c = 5 \text{ m}$, $\mu_s = 0.5$

1. Eq. Cardinali

$$1 \left\{ \begin{array}{l} \hat{n}: (M + 4m) a_n = F_0 - 4 F_a \\ \hat{z}: 0 = -(M + 4m) g + 4 N \end{array} \right.$$

$$2 \left\{ F_a R - \tau = I \frac{a_n}{R} \right.$$

2.

$$F_e = \frac{1}{R} \left(I \frac{a_n}{R} + Z \right)$$

$$(M + 4m) a_n = F_0 - \frac{4}{R} \left(I \frac{a_n}{R} + Z \right)$$

$$\left(M + 4m + 4 \frac{I}{R^2} \right) a_n = F_0 - 4 \frac{Z}{R}$$

$$a_n = \frac{1}{M + 4m + 2m} \left(F_0 - 4 \frac{Z}{R} \right)$$

$$= \frac{1}{50 + 80} \left(400 - 4 \frac{0.5}{0.5} \right) = 2.8 \text{ m/s}^2$$

$$F_e = \frac{1}{2} \frac{m}{M + 6m} \left(F_0 - 4 \frac{Z}{R} \right) + \frac{Z}{R} = 22 \text{ N}$$

3.

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_D} \tau d\theta = \tau \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{D}{R} = 10 \text{ rad} \Rightarrow W = \tau \Delta\theta = 5 \text{ J}$$

$$D = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_n \Delta t^2 \quad \Delta t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2a_n D}}{a_n}$$

$$= 1.6 \text{ ms}$$

$$\Rightarrow P = \frac{W}{\Delta t} = 3.1 \text{ W per ogni ruota}$$

$$P_{\text{tot}} = 4P = 12.5 \text{ W}$$

4.

$$v_D = v_0 + a_n \Delta t = 5.5 \text{ m/s}$$

$$E_k^D = \frac{1}{2} (m + 4m) v_D^2 + \frac{1}{2} 4I \left(\frac{v_D}{R} \right)^2$$

quando si ferma $\Rightarrow$

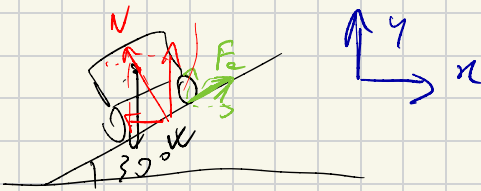
$$= U + W_{nc} = (m + 4m) g h_{\text{cm}} + 4\tau \Delta\theta$$

$$= (m + 4m) g h_{\text{cm}} + 4\tau \frac{h_{\text{cm}}}{\sin 30^\circ} \frac{1}{R}$$

$$h_{\text{cm}} = \frac{1}{(m + 4m)g + \frac{4\tau}{R \sin 30^\circ}} \left[\frac{1}{2} (m + 4m) v_D^2 + m v_D^2 \right]$$

$$= \frac{2751.25}{1381.40} = 2.0 \text{ m}$$

5.



$$\hat{y} \quad N \cos \beta + F_g \sin \beta - W = 0$$

$$\hat{x} \quad (m + 4m) \frac{v^2}{R} = N \sin \beta - F_g \cos \beta$$

$$F_g^{\max} = \mu_s N$$

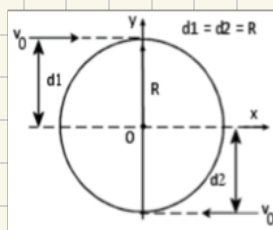
$$\Rightarrow (\cos \beta + \mu_s \sin \beta) N = (m + 4m) g$$

$$v_{\max}^2 = \frac{R}{(m + 4m)} (\sin \beta - \mu_s \cos \beta) \frac{(m + 4m) g}{(\cos \beta + \mu_s \sin \beta)}$$

$$= 0.3 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$\rightarrow v_{\max} = 0.54 \text{ m/s}$$

Esercizio 2



Il un disco rigido di raggio R e massa M inizialmente fermo è disposto sul piano orizzontale liscio xy e può ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso ad esso perpendicolare nel suo centro O .

Due punti materiali, rispettivamente di massa $m_1 = M/2$ e $m_2 = M/4$, si muovono, uno opposto all' altro, con la stessa velocità v_0 lungo le due direzioni parallele $d_1 = d_2 = R$, come illustrato in figura.

Ad un certo istante i due punti urtano simultaneamente il bordo del disco restandovi attaccati.

Detto S il sistema formato dal disco e dai due punti materiali, calcolare

1. il momento angolare del sistema prima e dopo l'urto.
2. la velocità angolare del disco dopo l'urto.
3. K_i l'energia cinetica di S prima dell'urto.
4. K_f l'energia cinetica di S dopo l'urto.
5. la perdita percentuale di energia cinetica $\eta = 1 - K_f/K_i$.

Dati: Si ricordi che il momento di inerzia I di un disco rigido omogeneo di massa M e raggio R rispetto ad un asse passante per il centro del disco e ad esso perpendicolare vale $I = MR^2/2$.

$$1. \quad \vec{L}_i = \vec{d}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{d}_2 \times m_2 \vec{v}_2$$

$$\stackrel{!}{=} R \frac{M}{2} v_0 + R \frac{M}{4} v_0 = \frac{3}{4} M v_0 R \hat{z}$$

$$2. \quad \vec{L}_f = \left(\frac{1}{2} M R^2 + m_1 R^2 + m_2 R^2 \right) \omega \hat{z}$$

Non ensemble force externe

$$\bar{L}_i = \bar{L}_f \Rightarrow \frac{3}{4} \pi v_0 R = \frac{5}{4} \pi \omega R^2$$

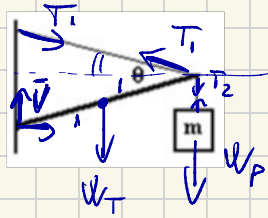
$$\omega = \frac{3}{5} \frac{v_0}{R}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad K_i &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \frac{3}{8} \pi v_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad K_f &= \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \pi R^2 \right) \left(\frac{3}{5} \frac{v_0}{R} \right)^2 \\ &= \frac{1}{8} \frac{9}{5} \pi v_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad \eta &= 1 - \frac{K_f}{K_i} = 1 - \frac{\frac{1}{8} \frac{9}{5} \pi v_0^2}{\frac{3}{8} \pi v_0^2} \\ &= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0.4 = 40\% \end{aligned}$$

1. Una trave uniforme lunga 1,500 m di massa di 30,00 kg è sostenuta da un filo come mostrato nella figura. La trave forma un angolo di 10,00 gradi con l'orizzontale e il filo un angolo di 30,00 gradi con la trave. Una massa di 50,00 kg, m , è fissata all'estremità della trave. Qual è la tensione nel filo?

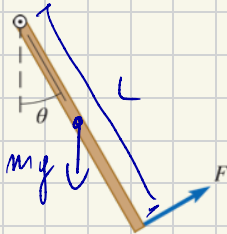


- ☒ (a) 1,255 N
 (b) 1,435 N
 (c) 1,035 N
 (d) 2,034 N
 (e) 1,855 N

$$0 = \frac{L}{2} \cos 10^\circ M g + L \cos 10^\circ m g - L \sin 30^\circ T_1$$

$$\Rightarrow T_1 = 1256 \text{ N}$$

2. Una barra uniforme di massa m è sostenuta da un perno nella sua parte superiore, attorno alla quale la barra può oscillare come un pendolo. Se una forza F viene applicata perpendicolarmente all'estremità inferiore della barra come nel diagramma, quanto deve essere grande F per mantenere la barra in equilibrio ad un angolo θ dalla verticale?



$$\frac{L}{2} m g \sin \theta = F L$$

$$F = \frac{1}{2} m g \sin \theta$$

- (a) $2mg$
 (b) $2mg \sin \theta$
☒ (c) $(mg/2) \sin \theta$
 (d) $2mg \cos \theta$
 (e) $(mg/2) \cos \theta$
 (f) $mg \sin \theta$

3. Un cilindro solido uniforme rotola senza scivolare giù per una pendenza. Nella parte inferiore della pendenza, viene misurata la velocità v del cilindro e vengono calcolate le energie cinetiche traslazionali e rotazionali (K_{tr} , K_{rot}). Un foro viene praticato attraverso il cilindro lungo il suo asse e l'esperimento viene ripetuto; nella parte inferiore dell'inclinazione il cilindro ora ha velocità v' ed energie cinetiche traslazionali e rotazionali K'_{tr} e K'_{rot} . Come si confronta il rapporto tra l'energia cinetica rotazionale e traslazionale del cilindro con il suo valore originale?

(a) $\frac{K'_{rot}}{K'_{tr}} < \frac{K_{rot}}{K_{tr}}$

(b) $\frac{K'_{rot}}{K'_{tr}} = \frac{K_{rot}}{K_{tr}}$

~~(c) $\frac{K'_{rot}}{K'_{tr}} > \frac{K_{rot}}{K_{tr}}$~~

(d) La risposta dipende dal raggio del foro praticato.

cilindro $I = \frac{1}{2} \pi R^2$

$$K_{tr} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \left(\frac{v_{cm}}{R} \right)^2 = \frac{1}{4} m v_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \frac{K_{rot}}{K_{tr}} = \frac{1}{2}$$

cilindro con foro

$$\frac{m}{\pi R^2 L} = \frac{m}{\pi r^2 L}$$

$$\Rightarrow m = \pi \frac{r^2}{R^2}$$

$$I' = \frac{1}{2} \pi R^2 - \frac{1}{2} m r^2$$

$$= \frac{1}{2} \pi \left(R^2 - \frac{r^2}{R^2} r^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \pi R^2 \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right)$$

$$K'_{tr} = \frac{1}{2} (M - m) v_{cm}^2 = \frac{1}{2} M \left(1 - \frac{e^2}{R^2} \right) v_{cm}^2$$

$$K'_{rot} = \frac{1}{2} I' \left(\frac{v_{cm}}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \left(\frac{v_{cm}}{R} \right)^2$$

$$\frac{K'_{rot}}{K'_{tr}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}}{\frac{1}{2} \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}} = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] > \frac{1}{2} = \frac{K_{rot}}{K_{tr}}$$

In realtà la risposta è più semplice. In entrambi i casi $\Delta U = \Delta E_k$ e il ΔU è uguale per entrambi.

Ora per K_{tr} è sempre nel cor avrà semplicemente masse diverse. K_{rot} invece ha la massa distribuita più lontano dall'asse per cui peserà di più che nel caso del cilindro pieno.

4. Una palla di massa m con velocità iniziale v si scontra con un'altra palla di massa M , inizialmente a riposo. Dopo la collisione le due palle si attaccano insieme, muovendosi con velocità V . Il rapporto tra la velocità finale V e la velocità iniziale v è $\frac{V}{v} =$

(a) $\frac{M}{M+m}$

(b) $\frac{M+m}{M}$

~~(c) $\frac{m}{M+m}$~~

(d) $\frac{M+m}{m}$

(e) $\sqrt{\frac{M}{M+m}}$

(f) $\sqrt{\frac{m}{M+m}}$

$$m v = (m + M) V \quad \checkmark$$

$$\frac{V}{v} = \frac{m}{m + M}$$

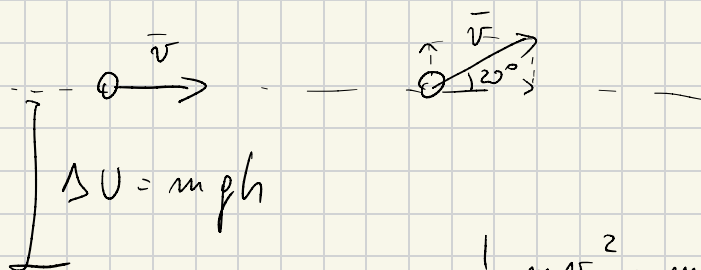
5. Due palle vengono lanciate dal tetto di un edificio con la stessa velocità iniziale. Uno viene lanciato orizzontalmente mentre l'altro viene lanciato con un angolo di 20° sopra l'orizzontale. Quale colpisce il terreno con la massima velocità? Ignora la resistenza dell'aria.

(a) Quello lanciato orizzontalmente

(b) Quello lanciato a 20°

~~(c) Colpiscono il suolo con la stessa velocità.~~

(d) La risposta non può essere determinata con le informazioni fornite.



$$\frac{1}{2} m v_i^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_f^2$$

6. Un ragno si trova su un DVD che ruota a una velocità angolare costante.
L'accelerazione a del ragno è

- (a) maggiore quanto più il ragno è vicino all'asse centrale.
- ☒ (b) maggiore quanto più il ragno è lontano dall'asse centrale.
- (c) diverso da zero e indipendente dalla posizione del ragno sul DVD.
- (d) zero.



$$a_c = \omega^2 R$$

7. Una donna è in piedi su una bilancia da bagno in un ascensore che non si muove. La scala legge 500 N. L'ascensore si muove quindi verso il basso a una velocità costante di 4,5 m/s. Cosa legge la scala mentre l'ascensore scende con velocità costante?

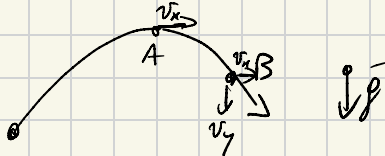
- (a) 100 N
- (b) 250 N
- (c) 450 N
- ☒ (d) 500 N
- (e) 750 N



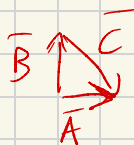
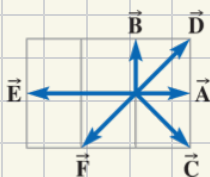
sistema
inerziale

8. Una palla viene lanciata in aria e segue una traiettoria parabolica. Il punto A è il punto più alto della traiettoria e il punto B è un punto mentre la palla ricade a terra. Scegli la relazione corretta tra i moduli delle velocità e dell'accelerazione nei due punti.

- (a) $v_A > v_B$, $a_A = a_B$
- (b) $v_A < v_B$, $a_A > a_B$
- (c) $v_A = v_B$, $a_A \neq a_B$
- ☒ (d) $v_A < v_B$, $a_A = a_B$

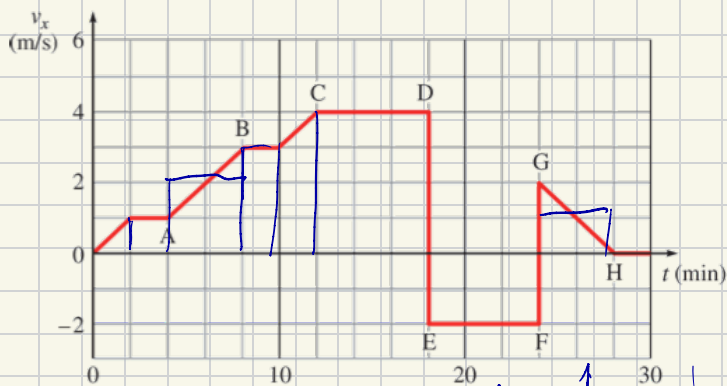


9. Il vettore $\vec{A}$ nel disegno è uguale a



- (a) $\vec{C} + \vec{D}$.
- (b) $\vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$.
- (c) $\vec{C} + \vec{F}$.
- ~~(d) $\vec{B} + \vec{C}$.~~
- (e) $\vec{B} + \vec{F}$.

10. Un'atleta si esercita lungo una strada dritta che corre da nord a sud. Parte in direzione nord. Il suo moto è descritto dal grafico sottostante di $v_x(t)$. Qual è la velocità media dell'atleta durante i 30,0 minuti?



- ~~(a) 1,3 m/s, nord~~
- (b) 2,1 m/s, nord
- (c) 1,7 m/s, nord
- (d) 2,9 m/s, nord

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1
2	2	4
1	3	3
1	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$
3	4	12
3	-2	-6
2	1	2

$$\begin{aligned}
 & \text{Tot} \\
 & 15 \quad 20 \\
 & \Rightarrow \langle v \rangle \\
 & = \frac{20}{15} \\
 & = 1,33
 \end{aligned}$$