

Tutorial matematico

In questo tutorial verranno riproposti alcuni dei principali risultati dell'algebra, della geometria, della trigonometria e del calcolo. In molti casi verranno riportati i risultati senza le dimostrazioni. La [tabella M.1](#) elenca alcuni simboli matematici di uso frequente.

M.1 Cifre significative

Molti dei numeri con cui si ha a che fare nella scienza sono il risultato di misurazioni e sono quindi conosciuti con un certo grado di incertezza. Questa incertezza si dovrebbe ripercuotere nel numero di cifre utilizzate per riportare tali numeri. Per esempio, se si possiede un righello di lunghezza pari a 1 metro con una scala che riporta delle spaziature di 1 cm, si sa che si può misurare l'altezza di una scatola con una precisione di circa un quinto di centimetro. Utilizzando tale righello si può trovare, per esempio, che l'altezza della scatola è 27,0 cm. Se, sul righello, ci fosse una scala con spaziature corrispondenti a 1 mm, si potrebbe, per esempio, misurare che l'altezza della scatola corrisponde a 27,03 cm. Comunque, se vi è una scala con le spaziature corrispondenti a 1 mm, non si è in grado di misurare l'altezza della scatola con una accuratezza migliore di 27,03 cm, dato che l'altezza potrà variare di circa 0,01 cm, a seconda della posizione della scatola in cui si misura l'altezza. Quando si riporta che l'altezza della scatola è 27,03 cm, si sta affermando che la migliore stima dell'altezza è data da 27,03 cm, ma non si sta affermando che tale altezza corrisponde esattamente a 27,030000... cm. Le quattro cifre in 27,03 cm vengono definite **cifre significative**. L'altezza misurata, pari a 0,2703 m, ha quattro cifre significative.

Il numero di cifre significative nel risultato di un calcolo dipenderà dal numero di cifre significative dei dati. Quando si lavora con dei numeri ai quali è associata una incertezza, occorre prestare attenzione a non inserire nel risultato un numero maggiore di cifre rispetto a quanto le misurazioni effettivamente consentano. Calcoli *approssimati* (stime dell'ordine di grandezza) portano sempre a risposte che sono dotate di un'unica cifra significativa oppure nessuna. Quando si moltiplicano, dividono, sommano o sottraggono tra loro dei numeri, occorre considerare l'accuratezza dei risultati. Di seguito vengono elencate alcune regole che saranno di aiuto nel determinare il numero di cifre significative con cui va riportato il risultato.

1. Quando si moltiplicano o si dividono tra loro delle quantità, il numero di cifre significative nel risultato finale non può essere maggiore rispetto a quello della quantità conosciuta con il minor numero di cifre significative.
2. Quando si sommano o si sottraggono tra loro delle quantità, il numero di posizioni decimali nel risultato deve essere uguale a quello del termine con il numero minore di posizioni decimali.
3. I valori esatti hanno un numero illimitato di cifre significative. Per esempio, un valore che risulta, da un conteggio, come 2 tavoli, non ha una incertezza associata e rappresenta un valore esatto. Il fattore di conversione 0,025 400 0... m/in (metri /pollici) è un valore esatto, dato che 1,000... in è esattamente uguale a 0,025 400 0... m. Una yard è, per definizione, esattamente uguale a 0,9144 m, e 0,9144 diviso per 36 è esattamente uguale a 0,0254.

Tabella M.1 Simboli matematici.

=	uguale a
≠	diverso da
≈	approssimativamente uguale a
~	ordine di grandezza di
α	proporzionale a
>	maggiore di
≥	maggiore o uguale a
>>	molto maggiore di
<	minore di
≤	minore o uguale a
<<	molto minore di
Δx	variazione di x
x	valore assoluto di x
n!	$n(n-1)(n-2)\dots 1$
Σ	somma
lim	limite
Δt→0	Δt tendente a 0
dx/dt	derivata di x rispetto a t
∂x/∂t	derivata parziale di x rispetto a t
∫	integrale

4. Qualche volta gli zeri rappresentano cifre significative, altre volte no. Se lo zero si trova davanti a una cifra iniziale diversa da zero, allora tale zero non rappresenta una cifra significativa. Per esempio, il numero 0,008 90 ha tre cifre significative: i primi tre zeri non sono cifre significative, ma rappresentano solo degli indicatori per il posizionamento della virgola decimale. Si noti che lo zero dopo il nove è invece una cifra significativa.
5. Gli zeri che si trovano tra cifre diverse da zero sono considerati delle cifre significative. Per esempio, 5603 ha quattro cifre significative.
6. Il numero di cifre significative nei numeri con degli zeri finali e senza virgola decimale è ambiguo. Per esempio, 31 000 potrebbe avere sia cinque cifre significative sia due cifre significative. Per evitare l'ambiguità, occorrerebbe riportare i numeri utilizzando la notazione scientifica oppure utilizzando la virgola decimale.

Esempio M.1 Trovare il valore medio di tre numeri

Si trovi la media di 19,90, -7,524 e -11,8179.

■ Impostazione

Sommiamo tra loro i tre numeri e poi dividiamo il risultato per 3. Il primo numero ha tre cifre significative, il secondo numero ne ha quattro e il terzo numero ne ha sei.

■ Soluzione

Sommiamo i tre numeri:

$$19,90 + (-7,524) + (-11,8179) = 0,5581$$

Se il problema avesse chiesto unicamente la somma dei tre numeri, avremmo arrotondato la risposta al minimo numero di cifre decimali presenti tra tutti i numeri sommati, cioè due cifre. Invece, in questo caso, occorre dividere tale somma per 3, quindi si utilizza il risultato intermedio con le due cifre in più (indicate in rosso):

$$\frac{0,5581}{3} = 0,1860333...$$

Solo due delle cifre della risposta intermedia 0,1860333... sono cifre significative, quindi occorre arrotondare tale numero per ottenere la risposta finale. Il numero 3 a denominatore è un numero intero e ha un numero illimitato di cifre significative. Quindi la risposta finale ha lo stesso numero di cifre significative del numeratore, cioè due. La risposta finale è

$$\boxed{0,19}$$

■ Riflessione

La somma nel primo passaggio ha due cifre significative dopo la virgola decimale, come le cifre significative dell'addendo avente il minor numero di cifre significative dopo la virgola decimale.

Esercitazioni

1. $\frac{5,3 \text{ mol}}{22,4 \text{ mol/L}}$

2. $57,8 \text{ m/s} - 26,24 \text{ m/s}$

M.2 Equazioni

Un'equazione è una affermazione scritta utilizzando numeri e simboli per indicare che due grandezze, scritte da entrambe le parti di un segno di uguaglianza (=), sono

uguali tra loro. Le quantità da entrambe le parti del segno di uguaglianza possono essere costituite da un solo termine o da una somma o differenza di due o più termini. Per esempio, l'equazione

$$x = 1 - \frac{ay + b}{cx - d}$$

contiene tre termini, x , 1 e la frazione $(ay + b)/(cx - d)$.

Si possono eseguire le seguenti operazioni sulle equazioni.

1. La stessa quantità può essere sommata o sottratta a ogni membro di un'equazione.
2. Ciascun membro di un'equazione può essere moltiplicato o diviso per la stessa quantità.
3. Ciascun membro di un'equazione può essere elevato alla stessa potenza.

Queste operazioni devono essere applicate a ciascun *membro* dell'equazione e non a ciascun termine nell'equazione. Dato che la moltiplicazione è un'operazione distributiva rispetto alla somma, l'operazione relativa al punto 2 (e solo questa) può essere applicata anche a tutti i termini.

Attenzione. La divisione per 0 è proibita in qualunque passo della soluzione di un'equazione: i risultati (se mai ce ne fossero) non sarebbero validi.

Sommare o sottrarre quantità uguali

Per trovare x nel caso $x - 3 = 7$, si somma 3 a entrambi i membri dell'equazione:

$$(x - 3) + 3 = 7 + 3$$

Quindi $x = 10$.

Moltiplicare o dividere per quantità uguali

Se $3x = 17$, si trova x dividendo entrambi i membri dell'equazione per 3:

$$\frac{3x}{3} = \frac{17}{3}$$

Quindi $x = 17/3$, cioè 5,7.

Esempio M.2 Semplificare i reciproci in un'equazione

Risolvere la seguente equazione calcolando x :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Le equazioni che contengono i reciproci delle incognite si trovano nell'ottica geometrica e nell'analisi dei circuiti elettrici, per esempio per determinare la resistenza equivalente di resistori connessi in parallelo.

■ Impostazione

In questa equazione il termine che contiene x è nello stesso membro dell'equazione che contiene anche un termine senza l'incognita. Inoltre x si trova al denominatore di una frazione.

■ Soluzione

1. Sottraiamo $1/4$ da entrambi i membri:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

2. Semplifichiamo il membro di destra dell'equazione utilizzando il minimo comune denominatore:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$$

3. Moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per $12x$ al fine di trovare x :

$$12x \frac{1}{x} = 12x \frac{1}{12} \Rightarrow x = \boxed{12}$$

■ Riflessione

Sostituendo x con 12 nel membro di sinistra dell'equazione iniziale si ha

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Esercitazioni

3. $(7,0 \text{ cm}^3)x = 18 \text{ kg} + (4,0 \text{ cm}^3)x$

4. $\frac{4}{x} + \frac{1}{3} = \frac{3}{x}$

M.3 Proporzionalità dirette e inverse

Quando si afferma che due grandezze variabili x e y sono tra loro **direttamente proporzionali**, significa che, al variare di x e di y , il rapporto x/y rimane comunque costante. Dire che due grandezze sono tra loro *proporzionali* equivale a dire che le due grandezze sono direttamente proporzionali. Quando si afferma che due grandezze x e y sono tra loro **inversamente proporzionali** significa che, al variare di x e di y , il prodotto xy rimane comunque costante.

Le relazioni di proporzionalità diretta e inversa sono frequenti in fisica. Oggetti che si muovono alla stessa velocità hanno delle quantità di moto che sono direttamente proporzionali alle loro masse. La legge dei gas perfetti $PV = nRT$ afferma che la pressione P è direttamente proporzionale alla temperatura (assoluta) T quando il volume V rimane costante, ed è inversamente proporzionale al volume quando la temperatura rimane costante. La legge di Ohm $V = IR$ afferma che la differenza di potenziale V ai capi di un resistore è direttamente proporzionale alla corrente elettrica nel resistore quando la resistenza rimane costante.

Costante di proporzionalità

Se due grandezze sono tra loro direttamente proporzionali, allora le grandezze sono collegate da una **costante di proporzionalità**. Se, per esempio, si è pagati per lavorare con un retribuzione costante di R euro al giorno, i soldi m che si guadagnano sono direttamente proporzionali ai giorni di lavoro. La retribuzione costante R rappresenta la costante di proporzionalità che collega i soldi guadagnati m (in euro) al tempo lavorato t (in giorni):

$$\frac{m}{t} = R \Rightarrow m = Rt$$

Se si guadagnano 400 € in 5 giorni, il valore di R è dato da

$$\frac{400 \text{ €}}{5 \text{ giorni}} = 80 \text{ €/giorno}$$

Per determinare il denaro che si guadagnerebbe in 8 giorni, si può eseguire il seguente calcolo:

$$m = (80 \text{ €/giorno})(8 \text{ giorni}) = 640 \text{ €}$$

Qualche volta la costante di proporzionalità può essere ignorata in problemi che riguardano delle proporzioni. Dato che la quantità di soldi guadagnati in 8 giorni è $\frac{8}{5}$ rispetto a ciò che si guadagna in 5 giorni, tale quantità è data da

$$m = \frac{8}{5}(400 \text{ €}) = 640 \text{ €}$$

Esempio M.3 Verniciare dei cubi

Sono necessari 15,4 mL di vernice per verniciare una faccia di un cubo. L'area della faccia del cubo è 426 cm^2 . Qual è la relazione tra il volume di vernice necessario e l'area che deve essere verniciata? Quanta vernice è necessaria per verniciare una faccia di un cubo che misura 503 cm^2 ?

■ Impostazione

Per determinare la quantità di vernice richiesta per la faccia del cubo di 503 cm^2 occorrerà impostare una proporzione.

■ Soluzione

1. Il volume V di vernice richiesto aumenta in proporzione all'area che deve essere verniciata, quindi

$$\boxed{V \text{ e } A \text{ sono direttamente proporzionali}}$$

cioè

$$\frac{V}{A} = k \Rightarrow V = kA$$

in cui k è la costante di proporzionalità.

2. Determiniamo il valore della costante di proporzionalità utilizzando i valori dati di $V_1 = 15,4 \text{ mL}$ e $A_1 = 426 \text{ cm}^2$:

$$k = \frac{V_1}{A_1} = \frac{15,4 \text{ mL}}{426 \text{ cm}^2} = 0,0361 \text{ mL/cm}^2$$

3. Determiniamo il volume di vernice richiesto per dipingere una faccia di un cubo di superficie pari a 503 cm^2 utilizzando la costante di proporzionalità ottenuta nel precedente passaggio:

$$V_2 = kA_2 = (0,0361 \text{ mL/cm}^2)(503 \text{ cm}^2) = \boxed{18,2 \text{ mL}}$$

■ Riflessione

Il valore di V_2 è maggiore del valore di V_1 , come ci si aspettava. La quantità di vernice richiesta per dipingere un'area pari a 503 cm^2 deve essere maggiore della quantità di vernice richiesta per dipingere un'area di 426 cm^2 , dato che 503 cm^2 è maggiore di 426 cm^2 .

Esercitazioni

5. Un contenitore cilindrico contiene 0,384 L di acqua quando è pieno. Quanta acqua conterrebbe il contenitore se il raggio venisse raddoppiato e la sua altezza rimanesse uguale?

Suggerimento: il volume di un cilindro rettangolare è dato da $V = \pi r^2 h$, in cui r è il raggio del cilindro e h la sua altezza. Quindi V è direttamente proporzionale a r^2 quando h rimane costante.

6. Nel caso del contenitore dell'esercitazione 5, quanta acqua conterrebbe il contenitore se venissero raddoppiati sia il raggio sia l'altezza?

Suggerimento: il volume di un cilindro rettangolare è dato da $V = \pi r^2 h$, in cui r è il raggio del cilindro e h la sua altezza.

M.4 Equazioni lineari

Un'equazione lineare è un'equazione del tipo $x + 2y - 4z = 3$. Quindi un'equazione è lineare se ciascun termine in essa è una costante o il prodotto di una costante per una variabile elevata alla prima potenza. Una tale equazione è detta *lineare* poiché il suo grafico è una linea retta o un piano. Le relazioni di proporzionalità diretta tra due variabili sono rappresentate da equazioni lineari.

Grafico di una linea retta

Un'equazione lineare che mette in relazione x e y può sempre essere scritta nella forma

$$y = mx + b \quad \text{M.1}$$

in cui m e b sono delle costanti che possono assumere valori sia positivi sia negativi. La [figura M.1](#) mostra il grafico dei valori di x e di y che soddisfano l'equazione M.1. La costante b , chiamata l'**intercetta** con l'asse delle y , rappresenta il valore di y per $x = 0$. La costante m rappresenta la **pendenza** della retta, la quale è uguale al rapporto tra la variazione di y e la corrispondente variazione di x . Nella figura sono indicati due punti sulla retta, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, e le variazioni $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = y_2 - y_1$. La pendenza m è quindi data da

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se x e y sono entrambe incognite nell'equazione $y = mx + b$, non c'è una sola coppia di valori di x e y che è soluzione dell'equazione: ciascuna coppia di valori (x_1, y_1) sulla retta nella figura M.1 sarà una soluzione dell'equazione. Se si hanno due equazioni, ciascuna con le stesse incognite x e y , le equazioni possono essere risolte contemporaneamente per trovare le incognite. L'Esempio M.4 mostra come possano essere risolte contemporaneamente delle equazioni lineari.

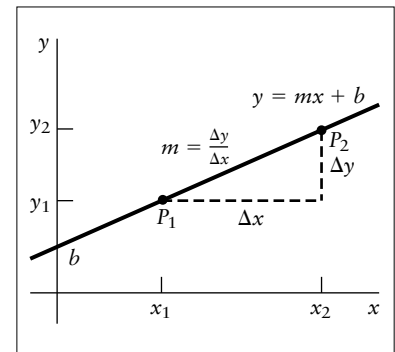


Figura M.1 Grafico dell'equazione lineare $y = mx + b$, in cui b è l'intercetta con l'asse delle y e $m = \Delta y / \Delta x$ è la pendenza.

Esempio M.4 Utilizzare due equazioni per trovare due valori incogniti

Si trovino tutti i valori di x e y che risolvono contemporaneamente le equazioni

$$3x - 2y = 8 \quad \text{M.2}$$

$$y - x = 2 \quad \text{M.3}$$

■ Impostazione

La [figura M.2](#) mostra il grafico delle due equazioni. Nel punto in cui le due rette si intersecano, i valori di x e y soddisfano entrambe le equazioni. Si possono risolvere allo stesso tempo due equazioni, risolvendo inizialmente una delle due equazioni per una variabile in funzione dell'altra e poi sostituendo il risultato nell'altra equazione.

■ Soluzione

1. Risolviamo l'equazione M.3 per y :

$$y = x + 2$$

2. Sostituiamo tale valore di y nell'equazione M.2:

$$3x - 2(x + 2) = 8$$

3. Semplifichiamo l'equazione e troviamo x :

$$3x - 2x - 4 = 8$$

$$x - 4 = 8$$

$$x = \boxed{12}$$

4. Utilizzando la soluzione per x e una delle equazioni iniziali, troviamo il valore di y :

$$y - x = 2, \text{ dove } x = 12$$

$$y - 12 = 2$$

$$y = 2 + 12 = \boxed{14}$$

■ Riflessione

Un metodo alternativo è quello di moltiplicare un'equazione per una costante, in modo tale che una delle incognite venga eliminata quando le equazioni vengono sommate o sottratte tra loro. Si può, per esempio, moltiplicare l'equazione M.3 per 2:

$$2(y - x) = 2(2) \Rightarrow 2y - 2x = 4$$

e poi sommare, membro a membro, l'equazione ottenuta all'equazione M.2, e infine risolvere per x :

$$2y - 2x = 4$$

$$3x - 2y = 8$$

$$\hline 3x - 2x = 12 \Rightarrow x = 12$$

Sostituendo tale risultato nell'equazione M.3 si trova y :

$$y - 12 = 2 \Rightarrow y = 14$$

Esercitazioni

7. Vero o falso: $xy = 4$ è un'equazione lineare.

8. Al tempo $t = 0,0$ s la posizione di una particella che si muove lungo l'asse x a velocità costante è $x = 3,0$ m. Al tempo $t = 2,0$ s la posizione è $x = 12,0$ m. Scrivere un'equazione lineare che mostri la relazione tra x e t .

9. Risolvere la seguente coppia di equazioni simultanee trovando x e y :

$$\frac{5}{4}x + \frac{1}{3}y = 30$$

$$y - 5x = 20$$

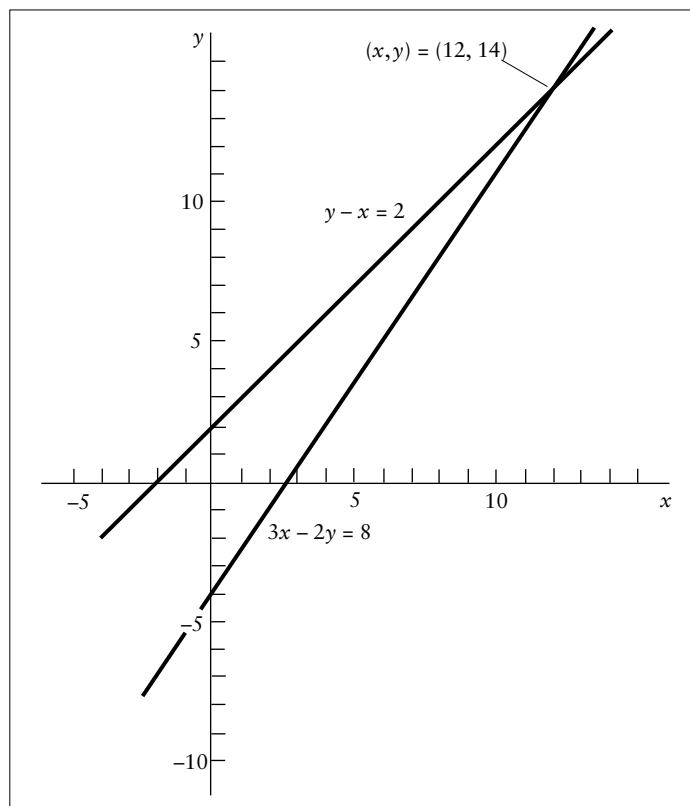


Figura M.2 Grafico delle equazioni M.2 e M.3. Nel punto in cui le rette si intersecano, i valori di x e di y soddisfano entrambe le equazioni.

M.5 Equazioni quadratiche e fattorizzazione

Un'equazione quadratica è un'equazione della forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + ex + fy + g = 0$$

in cui x e y sono le variabili e a, b, c, d, e, f e g sono delle costanti. In ciascun termine dell'equazione la potenza alla quale sono elevate le variabili è costituita da numeri interi la cui somma può essere 2, 1 o 0. La definizione di equazione quadratica (o *di secondo grado*) generalmente si applica a un'equazione di una variabile che può essere scritta nella forma standard

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{M.4}$$

in cui a, b e c sono delle costanti. L'equazione di secondo grado ha due soluzioni o radici, cioè valori di x per cui l'equazione è verificata.

Fattorizzazione

Alcune equazioni quadratiche possono essere risolte tramite una **fattorizzazione**. Molto spesso i termini di un'equazione possono essere raggruppati oppure organizzati in altri termini. Quando si esegue una fattorizzazione dei termini, si cercano moltiplicatori e moltiplicandi – che ora vengono chiamati **fattori** – che permetteranno di ottenere due o più termini nuovi sotto forma di prodotti. Per esempio, si possono trovare le radici dell'equazione di secondo grado $x^2 - 3x + 2 = 0$ fattorizzando il membro di sinistra, in modo da ottenere $(x - 2)(x - 1) = 0$. Le radici dell'equazione sono $x = 2$ e $x = 1$.

La fattorizzazione è utile per semplificare le equazioni e per comprendere le relazioni tra le diverse grandezze. Dovrebbe già essere familiare la moltiplicazione dei fattori

$$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$$

Altre tipiche combinazioni di fattori facilmente riconoscibili sono le seguenti.

1. Fattore comune:

$$2ax + 3ay = a(2x + 3y)$$

2. Quadrato perfetto:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Se l'espressione al membro di sinistra di un'equazione quadratica nella forma standard è rappresentata da un quadrato perfetto, le due radici saranno uguali.

3. Differenza di quadrati:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Inoltre i fattori che sono costituiti da numeri primi (2, 5, 7 ecc.) possono essere d'aiuto al fine di fattorizzare e semplificare rapidamente alcuni termini. Per esempio, l'equazione $98x^2 - 140 = 0$ può essere semplificata perché 98 e 140 hanno in comune il fattore 2. Cioè $98x^2 - 140 = 0$ diventa $2(49x^2 - 70) = 0$, quindi si ottiene $49x^2 - 70 = 0$. Tale risultato può essere ulteriormente semplificato dato che 49 e 70 hanno in comune il fattore 7. Quindi $49x^2 - 70 = 0$ diventa $7(7x^2 - 10) = 0$, per cui si ottiene $7x^2 - 10 = 0$.

Soluzione dell'equazione di secondo grado

Non tutte le equazioni di secondo grado possono essere risolte tramite la fattorizzazione. A ogni modo, tutte le equazioni di secondo grado nella forma standard $ax^2 + bx + c = 0$ possono essere risolte utilizzando la formula seguente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{M.5}$$

Nel caso in cui $b^2 > 4ac$ si avranno due soluzioni corrispondenti ai segni $+$ e $-$. La **figura M.3** mostra un grafico di y in funzione di x per $y = ax^2 + bx + c$. La curva, rappresentata da una parabola, interseca l'asse delle x due volte. (La più semplice rappresentazione di una parabola nelle coordinate x, y è data da un'equazione nella forma $y = ax^2 + bx + c$.) Le due radici di questa equazione corrispondono ai valori per cui risulta $y = 0$; esse sono quindi le intersezioni con l'asse delle x .

Nel caso in cui $b^2 < 4ac$ il grafico di y in funzione di x non interseca l'asse delle x , come è mostrato in **figura M.4**; ci sono ancora due soluzioni, ma esse non sono rappresentate da numeri reali (si veda la discussione sui numeri complessi).

Nel caso in cui $b^2 = 4ac$, il grafico di y in funzione di x è tangente all'asse x nel punto $x = -b/2a$; le due radici sono entrambe uguali a $-b/2a$.

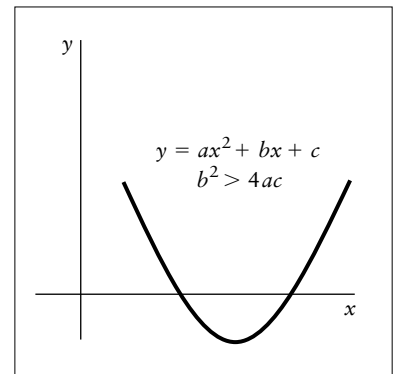


Figura M.3 Grafico di y in funzione di x quando $y = ax^2 + bx + c$, nel caso $b^2 > 4ac$. I due valori di x per i quali $y = 0$ verificano l'equazione di secondo grado (equazione M.4).

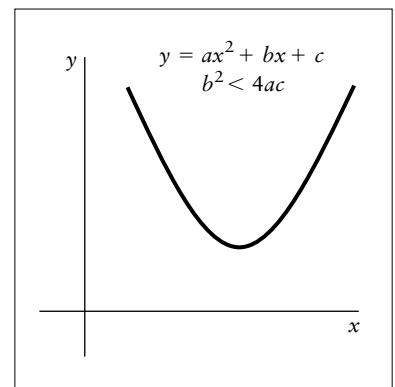


Figura M.4 Grafico di y in funzione di x quando $y = ax^2 + bx + c$, nel caso $b^2 < 4ac$. In questo caso non esistono valori reali di x per cui si ha $y = 0$.

Esempio M.5 Fattorizzazione di un polinomio di secondo grado

Si fattorizzi l'espressione $6x^2 + 19xy + 10y^2$.

■ Impostazione

Esaminiamo i coefficienti dei termini per vedere se l'espressione può essere fattorizzata senza ricorrere a metodi più avanzati. Si ricordi che

$$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$$

■ Soluzione

1. Il coefficiente di x^2 è 6, che può essere fattorizzato in due modi:

$$ac = 6 \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2 = 6 \\ 6 \cdot 1 = 6 \end{cases}$$

2. Il coefficiente di y^2 è 10, che può essere fattorizzato in due modi:

$$bd = 10 \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 2 = 10 \\ 10 \cdot 1 = 10 \end{cases}$$

3. Elenchiamo tutte le possibili combinazioni per a, b, c e d nella **tabella M.2** e includiamo una colonna per $ad + bc$. Ad esempio, se $a = 3$ allora $c = 2$, e viceversa. Inoltre, se $a = 6$ allora $c = 1$, e viceversa. Per ogni valore di a esistono quattro valori di b .

4. Troviamo una combinazione tale per cui $ad + bc = 19$. Come si può vedere dalla tabella, ci sono due combinazioni che soddisfano tale condizione, e ciascuna di esse fornisce lo stesso risultato:

$$ad + bc = 19 \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19 \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 19 \end{cases}$$

5. Utilizziamo la combinazione nella seconda riga della tabella per fattorizzare l'equazione in esame:

$$6x^2 + 19xy + 10y^2 = (3x + 2y)(2x + 5y)$$

■ Riflessione

Come controllo si può sviluppare il prodotto $(3x + 2y)(2x + 5y)$:

$$\begin{aligned} (3x + 2y)(2x + 5y) &= \\ &= 6x^2 + 15xy + 4xy + 10y^2 = \\ &= 6x^2 + 19xy + 10y^2 \end{aligned}$$

Tabella M.2

a	b	c	d	
3	5	2	2	16
3	2	2	5	19
3	10	2	1	23
3	1	2	10	32
2	5	3	2	19
2	2	3	5	16
2	10	3	1	32
2	1	3	10	23
6	5	1	2	17
6	2	1	5	32
6	10	1	1	16
6	1	1	10	61
1	5	6	2	32
1	2	6	5	17
1	10	6	1	61
1	1	6	10	16

La combinazione nella quinta riga della tabella fornisce lo stesso risultato del passaggio 4.

Esercitazioni

10. Mostrare che la combinazione nella quinta riga della tabella fornisce lo stesso risultato del passaggio 4.

11. Fattorizzare $2x^2 - 4xy + 2y^2$.

12. Fattorizzare $2x^2 + 10x^3 + 12x^2$.

M.6 Esponenti e logaritmi

Esponenti

La notazione x^n rappresenta la quantità ottenuta moltiplicando x per se stesso n volte. Per esempio, $x^2 = x \cdot x$ e $x^3 = x \cdot x \cdot x$. La quantità n è chiamata **potenza** (o **esponente**) di x , mentre x è chiamata **base**. Di seguito vengono elencate alcune regole che saranno di aiuto al fine di semplificare dei termini provvisti di esponente.

1. Quando due potenze di x vengono moltiplicate tra loro, gli esponenti vengono sommati:

$$(x^m)(x^n) = x^{m+n} \quad \text{M.6}$$

Esempio: $x^2x^3 = x^{2+3} = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^5$.

2. Ogni numero (a eccezione di 0) elevato alla potenza 0 vale 1 per definizione:

$$x^0 = 1 \quad \text{M.7}$$

3. Basandosi sulla regola al punto 2, si può scrivere:

$$x^n x^{-n} = x^0 = 1$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{M.8}$$

4. Quando due potenze vengono divise tra loro, gli esponenti vengono sottratti:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^n x^{-m} = x^{n-m} \quad \text{M.9}$$

5. Quando una potenza viene elevata a un'altra potenza, gli esponenti vengono moltiplicati tra loro:

$$(x^n)^m = x^{nm} \quad \text{M.10}$$

6. Quando gli esponenti vengono scritti come frazioni (positive), essi rappresentano le radici della base. Per esempio

$$x^{1/2} = \sqrt[2]{x} = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$

$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

Quindi, per la regola al punto 1, si ha

$$x^{1/2} x^{1/2} = x$$

Esempio M.6 Semplificare una grandezza provvista di esponenti

Si semplifichi l'espressione

$$\frac{x^4 x^7}{x^8}$$

■ Impostazione

Secondo la regola al punto 1, quando due potenze di x vengono moltiplicate tra loro gli esponenti vengono sommati; secondo la regola al punto 4, quando due potenze vengono divise gli esponenti vengono sottratti.

■ Soluzione

1. Semplifichiamo il numeratore $x^4 x^7$ utilizzando la regola 1.

$$x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$$

2. Semplifichiamo $\frac{x^{11}}{x^8}$ utilizzando la regola 4:

$$\frac{x^{11}}{x^8} = x^{11} x^{-8} = x^{11-8} = x^3$$

■ Riflessione

Si può utilizzare il valore $x = 2$ per determinare se la soluzione ottenuta è corretta:

$$\frac{2^4 2^7}{2^8} = 2^3 = 8$$

$$\frac{2^4 2^7}{2^8} = \frac{(16)(128)}{256} = \frac{2048}{256} = 8$$

Esercitazioni

13. $(x^{1/18})^9 = ?$

14. $x^6 x^0 = ?$

Logaritmi

Ogni numero positivo può essere espresso come una potenza di ogni altro numero positivo a eccezione di uno. Se y è legato a x tramite $y = a^x$, allora il numero x è detto essere il **logaritmo** di y in **base** a , e la relazione viene scritta come

$$x = \log_a y$$

Quindi i logaritmi sono degli esponenti e le regole per lavorare con i logaritmi sono simili alle regole per gli esponenti. Di seguito vengono elencate alcune regole che aiuteranno a semplificare i termini che contengono dei logaritmi.

1. Se $y_1 = a^n$ e $y_2 = a^m$, allora

$$y_1 y_2 = a^n a^m = a^{n+m}$$

Corrispondentemente

$$\log_a y_1 y_2 = \log_a a^{n+m} = n + m = \log_a a^n + \log_a a^m = \log_a y_1 + \log_a y_2 \quad \text{M.11}$$

Ne consegue che

$$\log_a y^n = n \log_a y \quad \text{M.12}$$

2. Dato che $a^1 = a$ e $a^0 = 1$,

$$\log_a a = 1 \quad \text{M.13}$$

e

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{M.14}$$

Ci sono due basi di uso comune: i logaritmi in base 10 vengono chiamati **logaritmi decimali**, mentre i logaritmi in base e ($e = 2,718\dots$) vengono chiamati **logaritmi naturali**.

In questo libro, il simbolo « $\ln$ » viene utilizzato per indicare i logaritmi naturali e il simbolo « $\log$ », senza pedice, viene utilizzato per indicare i logaritmi decimali; cioè

$$\begin{aligned} \log_e x &= \ln x \\ \log_{10} x &= \log x \end{aligned} \quad \text{M.15}$$

Quindi

$$y = \ln x \Rightarrow x = e^y \quad \text{M.16}$$

È possibile cambiare la base dei logaritmi. Si supponga che

$$z = \log x \quad \text{M.17}$$

Allora

$$10^z = 10^{\log x} = x \quad \text{M.18}$$

Eseguendo il logaritmo naturale di entrambi i membri dell'equazione M.18, si ottiene

$$z \ln 10 = \ln x$$

Sostituendo $\log x$ al posto di z (equazione M.17) si ha

$$\ln x = (\ln 10) \log x \quad \text{M.19}$$

Esempio M.7 Conversione tra logaritmi decimali e logaritmi naturali

I passaggi che hanno portato all'equazione M.19 mostrano che, in generale, si ha

$$\log_b x = (\log_b a) \log_a x$$

e quindi che la conversione da una base a un'altra implica solamente la moltiplicazione per una costante ($\log_b a$). Si descriva la relazione matematica tra le costanti per la conversione da logaritmi decimali a logaritmi naturali e per la conversione da logaritmi naturali a logaritmi decimali.

■ **Impostazione**

Abbiamo una formula matematica generale per convertire i logaritmi da una base a un'altra. Si cercherà la relazione matematica scambiando nella formula a con b e viceversa.

■ **Soluzione**

1. La formula per convertire i logaritmi dalla base a alla base b è

$$\log_b x = (\log_b a) \log_a x$$

2. Per convertire dalla base b alla base a scambiamo tutti gli a con i b :

$$\log_a x = (\log_a b) \log_b x$$

3. Dividiamo entrambi i membri dell'equazione presente nel passaggio 1 per $\log_a x$:

$$\frac{\log_b x}{\log_a x} = \log_b a$$

4. Dividiamo entrambi i membri dell'equazione presente nel passaggio 2 per $(\log_a b) \log_a x$:

$$\frac{1}{\log_a b} = \frac{\log_b x}{\log_a x}$$

5. I risultati mostrano che i fattori di conversione $\log_b a$ e $\log_a b$ sono uno il reciproco dell'altro:

$$\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$$

■ Riflessione

Per il $\log_{10} e$ la calcolatrice fornisce il valore 0,43429. Per $\ln 10$ la calcolatrice fornisce il valore 2,3026. Se moltiplichiamo 0,43429 per 2,3026 si ottiene 1,0000.

Esercitazioni

15. Calcolare $\log_{10} 1000$.

16. Calcolare $\log_2 5$.

M.7 Geometria

Le proprietà delle più comuni **figure geometriche** – forme limitate in due o tre dimensioni, le cui lunghezze, aree o volumi sono regolati da rapporti specifici – costituiscono uno strumento analitico basilare in fisica. Per esempio, i rapporti caratteristici dei triangoli forniscono le leggi della trigonometria (si veda il paragrafo M.8), la quale a sua volta fornisce la teoria dei vettori, essenziale nell'analisi del moto in due o tre dimensioni. I cerchi e le sfere sono essenziali per comprendere, tra gli altri concetti, il momento angolare e le densità di probabilità della meccanica quantistica.

Formule basilari in geometria

Cerchio Il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro è rappresentato dal numero π , il quale ha il valore approssimato di

$$\pi = 3,141592$$

La circonferenza C di un cerchio è quindi legata al suo diametro d e al suo raggio r dalle relazioni

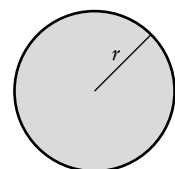
$$C = \pi d = 2\pi r \quad \text{circonferenza del cerchio} \quad \text{M.20}$$

L'area di un cerchio è data da (figura M.5)

$$A = \pi r^2 \quad \text{area del cerchio} \quad \text{M.21}$$

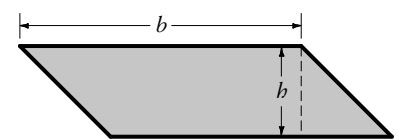
Parallelogramma L'area di un parallelogramma è data dal prodotto tra la base b e l'altezza h (figura M.6)

$$A = bh$$



Area del cerchio $A = \pi r^2$

Figura M.5 Area del cerchio.



Area del parallelogramma
 $A = bh$

Figura M.6 Area del parallelogramma.

Triangolo L'area di un triangolo è uguale alla metà del prodotto tra la base b e l'altezza h (figura M.7)

$$A = \frac{1}{2}bh$$

Sfera Una sfera di raggio r (figura M.8) ha una superficie di area

$$A = 4\pi r^2 \quad \text{superficie della sfera} \quad \text{M.22}$$

e un volume dato da

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{volume della sfera} \quad \text{M.23}$$

Cilindro Un cilindro di raggio r e lunghezza L (figura M.9) ha una superficie (escludendo le due facce terminali) di area

$$A = 2\pi rL \quad \text{superficie del cilindro} \quad \text{M.24}$$

e un volume di

$$V = \pi r^2 L \quad \text{volume del cilindro} \quad \text{M.25}$$

Esempio M.8 Calcolo del volume del un guscio sferico

Un guscio sferico di alluminio ha un diametro esterno di 40,0 cm e un diametro interno di 39,0 cm. Si trovi il volume del guscio sferico di alluminio.

■ Impostazione

Il volume del guscio sferico si ottiene sottraendo dal volume della sfera esterna, con diametro $d_e = 2r_e = 40,0$ cm, il volume della sfera interna, con diametro $d_i = 2r_i = 39,0$ cm.

■ Soluzione

1. Sottraiamo il volume della sfera di raggio r_i dal volume della sfera di raggio r_e :

$$V = \frac{4}{3}\pi r_e^3 - \frac{4}{3}\pi r_i^3 = \frac{4}{3}\pi (r_e^3 - r_i^3)$$

2. Sostituiamo i valori numerici $r_e = 20,0$ cm e $r_i = 19,5$ cm:

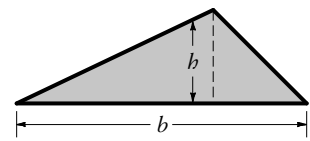
$$V = \frac{4}{3}\pi [(20,0 \text{ cm})^3 - (19,5 \text{ cm})^3] = \boxed{2,45 \cdot 10^3 \text{ cm}^3}$$

■ Riflessione

Ci si aspetta che il volume del guscio sferico sia dello stesso ordine di grandezza del volume di un cubo cavo, avente il lato esterno pari a 40,0 cm e il lato interno pari a 39,0 cm. Il volume di tale cubo cavo è dato da $(40,0 \text{ cm})^3 - (39,0 \text{ cm})^3 = 4,68 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$. Il risultato è in accordo con quanto ci si aspetta.

Esercitazioni

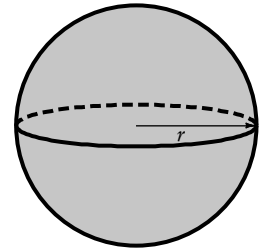
- Trovare il rapporto tra il volume V e la superficie A di una sfera di raggio r .
- Quanto vale l'area di un cilindro avente il raggio pari a un terzo della sua lunghezza?



Area del triangolo

$$A = \frac{1}{2}bh$$

Figura M.7 Area del triangolo.



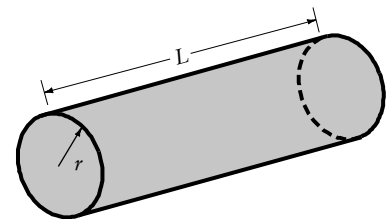
Superficie della sfera

$$A = 4\pi r^2$$

Volume della sfera

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Figura M.8 Superficie e volume della sfera.



Superficie del cilindro

$$A = 2\pi rL$$

Volume del cilindro

$$V = \pi r^2 L$$

Figura M.9 Superficie (escluse le due facce terminali) e volume del cilindro.

M.8 Trigonometria

La trigonometria, la quale trae il suo nome dalle radici delle parole greche utilizzate per indicare il «triangolo» e la «misura», è lo studio di alcune importanti funzioni

matematiche, chiamate **funzioni trigonometriche**. Di solito queste funzioni sono semplicemente definite come il rapporto tra i lati di un triangolo rettangolo. Queste definizioni legate al triangolo rettangolo sono però di utilizzo limitato, dato che sono valide solo per angoli compresi tra 0° e 90° . La validità delle definizioni basate sui triangoli rettangoli può essere estesa definendo le funzioni trigonometriche in termini del rapporto tra le coordinate dei punti su un cerchio di raggio unitario, disegnato in modo che il suo centro coincida con l'origine del piano xy .

In fisica si incontrano per la prima volta le funzioni trigonometriche quando si utilizzano i vettori per analizzare il moto in due dimensioni. Le funzioni trigonometriche sono inoltre essenziali in ogni tipo di fenomeno periodico, come nel caso del moto circolare, del moto oscillatorio e delle onde meccaniche.

Angoli e loro misura: gradi e radianti

La dimensione di un **angolo** formato dall'intersezione di due linee rette è conosciuta come la sua **misura**. Il modo standard per trovare la misura di un angolo prevede di posizionare l'angolo stesso in modo tale che il suo **vertice** (o punto di intersezione tra le due rette che formano l'angolo) coincida con il centro di un cerchio, situato nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane, tale per cui una delle due rette che formano l'angolo giaccia sull'asse x . La distanza percorsa in senso *antiorario* lungo la circonferenza, partendo dall'asse x fino a raggiungere l'intersezione della circonferenza stessa con l'altra retta che forma l'angolo, definisce la **misura dell'angolo**. (Muoversi in senso *orario*, fino all'altra retta che forma l'angolo, fornirà semplicemente una misura negativa; quindi, per illustrare i concetti basilari, posizioniamo l'angolo in modo che la rotazione di minore entità per raggiungere la seconda retta dell'angolo sia nel verso antiorario.)

L'unità più familiare per esprimere la misura di un angolo è il **grado** ($^\circ$), che è uguale a $1/360$ -esimo dell'angolo spazzato percorrendo l'intera circonferenza. Per un maggiore livello di precisione, o per indicare angoli più piccoli, si possono usare i gradi più i *minuti primi* ($'$) e i *minuti secondi* ($''$), essendo $1' = 1^\circ/60$ e $1'' = 1'/60 = 1^\circ/3600$, oppure, in alternativa, indicare i gradi come un numero decimale ordinario.

In ambito fisico-matematico la misura di un angolo può essere espressa anche in **radianti** (rad). Come visto per i gradi, si pone l'angolo con il suo vertice coincidente con il centro di un cerchio e si misura in senso antiorario la rotazione lungo la circonferenza. La misura dell'angolo in radianti è definita come la lunghezza dell'arco che va da una retta all'altra, divisa per il raggio del cerchio (**figura M.10**). Se s è la lunghezza dell'arco e r è il raggio del cerchio, l'angolo θ misurato in radianti è dato da

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{M.26}$$

Dato che l'angolo espresso in radianti risulta dal rapporto tra due lunghezze, esso è adimensionale. La relazione tra radianti e gradi è data da

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

ossia

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,3^\circ$$

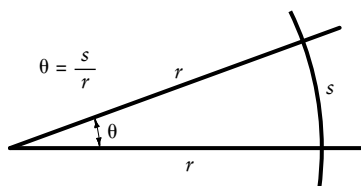
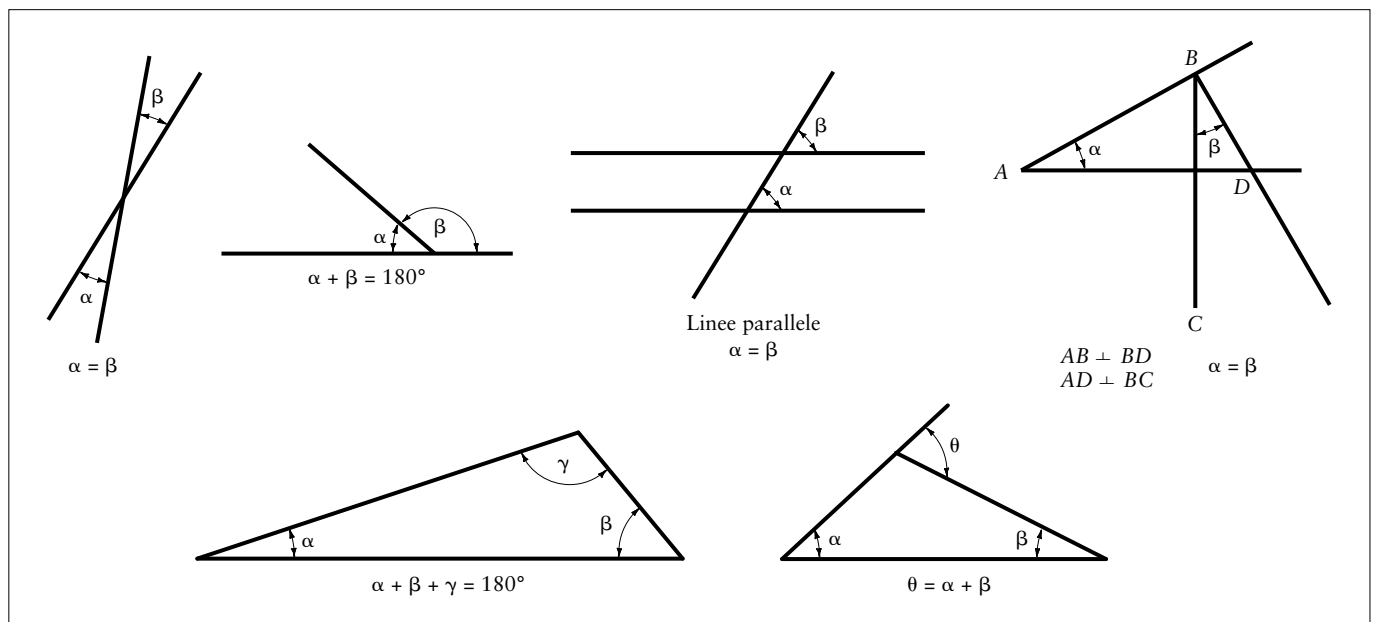


Figura M.10 L'angolo θ espresso in radianti è definito come il rapporto s/r , dove s è la lunghezza dell'arco intercettato sul cerchio di raggio r .



La **figura M.11** mostra alcune utili relazioni tra gli angoli.

Figura M.11 Alcune utili relazioni tra gli angoli.

Le funzioni trigonometriche

La **figura M.12** mostra un triangolo rettangolo formato tracciando la linea BC perpendicolarmente ad AC . Le lunghezze dei lati sono indicate con a , b e c . Le definizioni delle funzioni trigonometriche $\text{sen } \theta$ (seno), $\text{cos } \theta$ (coseno) e $\text{tg } \theta$ (tangente) basate sul triangolo rettangolo sono

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$$

M.27

$$\text{cos } \theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}$$

M.28

$$\text{tg } \theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$$

M.29

(Gli **angoli acuti** sono gli angoli per i quali la rotazione positiva lungo la circonferenza di un cerchio misura meno di 90° o $\pi/2$.) Altre tre funzioni trigonometriche, definite come il reciproco delle precedenti, sono $\text{sec } \theta$ (secante), $\text{cosec } \theta$ (cosecante) e $\text{cotg } \theta$ (cotangente):

$$\text{sec } \theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\text{cos } \theta}$$

M.30

$$\text{cosec } \theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

M.31

$$\text{cotg } \theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\text{tg } \theta} = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$$

M.32

L'angolo θ il cui seno è x è chiamato «arccoseno di x » e viene scritto con la notazione $\text{sen}^{-1} x$. Quindi, se

$$\text{sen } \theta = x$$

allora

$$\theta = \text{arcsen } x = \text{sen}^{-1} x$$

M.33

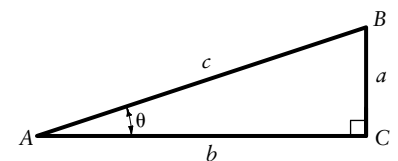


Figura M.12 Triangolo rettangolo con lati di lunghezza a e b e con ipotenusa di lunghezza c .

La funzione arcoseno è la funzione inversa del seno. L'inverso del coseno e della tangente vengono definiti in modo analogo.

L'angolo il cui coseno è y è chiamato «arcocoseno di y ». Quindi, se

$$\cos \theta = y$$

allora

$$\theta = \arccos y = \cos^{-1} y$$

L'angolo la cui tangente è z è chiamato «arcotangente di z ». Quindi, se

$$\operatorname{tg} \theta = z$$

allora

$$\theta = \operatorname{arctg} z = \operatorname{tg}^{-1} z$$

M.34

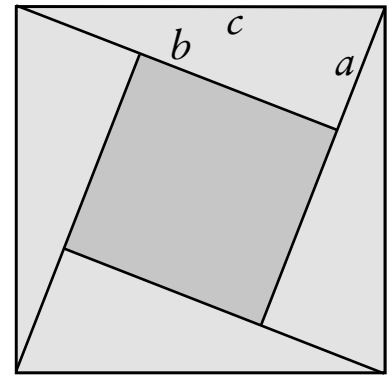


Figura M.13 Quando questa figura è stata pubblicata per la prima volta, le lettere erano assenti ed era accompagnata semplicemente dalla parola «Ecco!». Utilizzando il disegno, dimostrare il teorema di Pitagora ($a^2 + b^2 = c^2$).

M.35

Identità trigonometriche

Si possono derivare diverse formule utili, chiamate **identità trigonometriche**, esaminando le relazioni tra le funzioni trigonometriche. Le equazioni da M.30 a M.32 elencano tre delle più ovvie identità, cioè le formule che esprimono alcune funzioni trigonometriche come il reciproco delle altre. Facilmente riconoscibili sono anche le identità derivate dal **teorema di Pitagora** (la **figura M.13** illustra una dimostrazione grafica del teorema)

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{M.36}$$

Semplici manipolazioni algebriche dell'equazione M.36 forniscono ulteriori tre identità. Come prima cosa, se si divide ciascun termine dell'equazione M.36 per c^2 si ottiene

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

che, introducendo le definizioni di $\sin \theta (= a/c)$ e di $\cos \theta (= b/c)$, diviene

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{M.37}$$

In modo simile, possiamo dividere ciascun termine nell'equazione M.36 per a^2 , ottenendo

$$1 + \cotg^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \quad \text{M.38}$$

oppure per b^2 , ottenendo

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta \quad \text{M.39}$$

La **tabella M.3** elenca queste e molte altre identità trigonometriche. Si noti che tali identità si possono raggruppare in quattro categorie: funzioni riguardanti la somma o la differenza tra angoli, somma o differenza di funzioni elevate al quadrato, funzioni riguardanti angoli doppi (2θ) e funzioni riguardanti la metà di angoli ($\theta/2$). Si noti inoltre che alcune delle formule contengono coppie alternative, espresse dai segni $\pm$ e $\mp$ (si

Tabella M.3 Identità trigonometriche.

1.	$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
2.	$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
3.	$\operatorname{tg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$
4.	$\sin A \pm \sin B = 2 \sin \left[\frac{1}{2}(A \pm B) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(A \mp B) \right]$
5.	$\cos A + \cos B = 2 \cos \left[\frac{1}{2}(A + B) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(A - B) \right]$
6.	$\cos A - \cos B = 2 \sin \left[\frac{1}{2}(A + B) \right] \sin \left[\frac{1}{2}(B - A) \right]$
7.	$\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}$
8.	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
9.	$\sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1$
10.	$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cotg^2 \theta = 1$
11.	$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
12.	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$
13.	$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}$
14.	$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$
15.	$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$
16.	$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$

ricordi di usare tali formule sempre con le alternative tutte superiori oppure tutte inferiori). La **figura M.14** mostra la dimostrazione grafica delle prime due identità riguardanti la somma di angoli.

Alcuni importanti valori delle funzioni

La **figura M.15** rappresenta un triangolo rettangolo isoscele (un *triangolo isoscele* è un triangolo con due lati uguali), dal quale è possibile ottenere i valori per il seno, il coseno e la tangente di 45° . I due angoli acuti di questo triangolo sono uguali. Dato che la somma dei tre angoli di un triangolo deve essere uguale a 180° e l'angolo retto è 90° , ciascun angolo acuto deve essere di 45° . Per convenienza, si assuma che i lati uguali abbiano ciascuno lunghezza unitaria. Il teorema di Pitagora fornisce per l'ipotenusa il valore di

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Calcoliamo i valori delle funzioni nel modo seguente:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$$

Un altro triangolo molto comune è il triangolo rettangolo avente gli altri angoli di 30° e di 60° , come mostrato in **figura M.16**. Dato che questo particolare triangolo rettangolo è in effetti equivalente a metà *triangolo equilatero* (un triangolo con angoli di 60° - 60° - 60° , ossia un triangolo con i tre lati eguali e gli angoli uguali), si può vedere che il seno di 30° deve essere esattamente 0,5 (**figura M.17**). Il triangolo equilatero deve avere tutti i lati uguali a c , cioè uguali all'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente gli altri angoli di 30° e di 60° . Il lato a ha lunghezza uguale a metà dell'ipotenusa, e quindi

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Per trovare gli altri rapporti, sempre nel caso del triangolo rettangolo con angoli di 30° e di 60° , si assegni il valore 1 al lato opposto all'angolo di 30° :

$$c = \frac{1}{0,5} = 2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

$$\tan 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$$

$$\sin 60^\circ = \frac{b}{c} = \cos 30^\circ = 0,866$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{c} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1,732$$

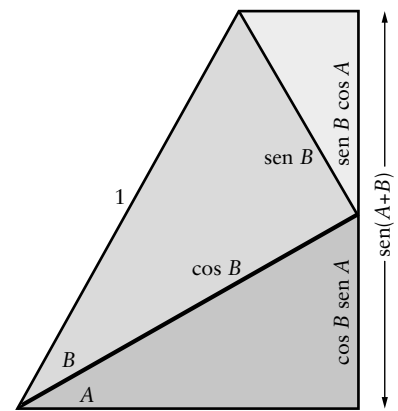


Figura M.14 Utilizzando questa figura, si dimostri l'identità $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$. Si può anche utilizzare per dimostrare l'identità $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$. Provate a farlo.

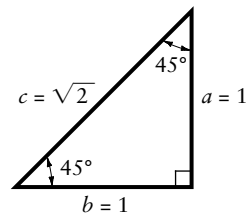


Figura M.15 Triangolo rettangolo isoscele.

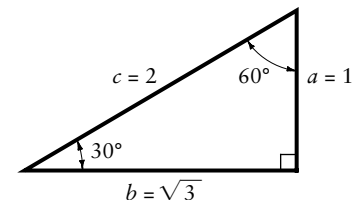


Figura M.16 Triangolo rettangolo con angoli di 30° e di 60° .

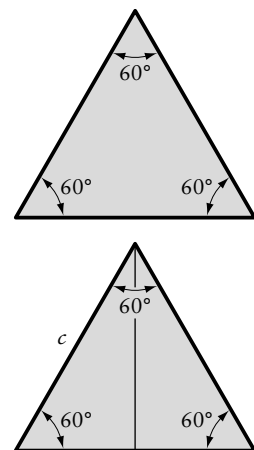


Figura M.17 (a) Triangolo equilatero. (b) Un triangolo equilatero che è stato diviso per formare due triangoli rettangoli con angoli di 30° e di 60° .

Approssimazione per piccoli angoli

Per piccoli angoli, la lunghezza a è quasi uguale all'arco di lunghezza s , come si può vedere dalla **figura M.18**. L'angolo $\theta = s/c$ è quindi quasi uguale a $\sin \theta = a/c$:

$$\sin \theta \approx \theta \quad \text{per piccoli valori di } \theta \quad \text{M.40}$$

In modo simile, le lunghezze c e b sono quasi uguali tra loro, quindi $\tan \theta = a/b$ è quasi uguale sia a θ sia a $\sin \theta$ per piccoli valori di θ :

$$\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta \quad \text{per piccoli valori di } \theta \quad \text{M.41}$$

Le equazioni M.40 e M.41 valgono solo se l'angolo θ è misurato in radianti. Dato che $\cos \theta = b/c$ e che tali lunghezze sono approssimativamente uguali per piccoli valori di θ , si ha

$$\cos \theta \approx 1 \quad \text{per piccoli valori di } \theta \quad \text{M.42}$$

La **figura M.19** mostra i grafici di θ , $\sin \theta$ e $\tan \theta$ in funzione di θ per piccoli valori di θ . Se è richiesta un'accuratezza di qualche punto percentuale, l'approssimazione di piccoli angoli può essere utilizzata solo per angoli di circa un quarto di radiante (circa 15°) o più piccoli. Al di sotto di questo valore, al diminuire del valore dell'angolo, l'approssimazione $\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta$ è ancora più accurata.

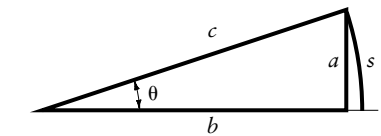
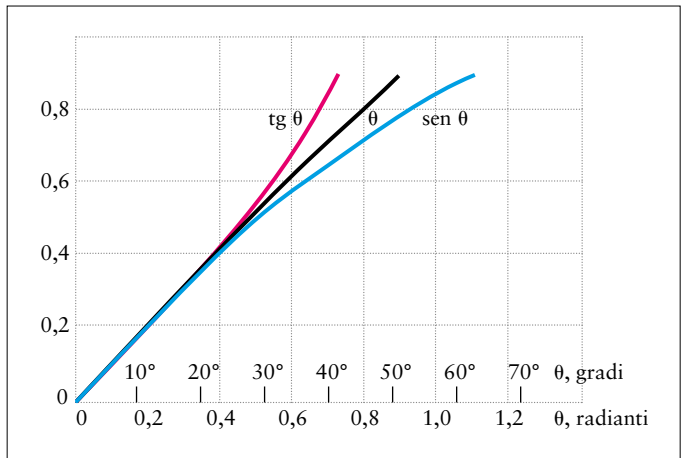


Figura M.18 Per piccoli angoli, i valori di $\sin \theta = a/c$, $\tan \theta = a/b$ e dell'angolo $\theta = s/c$ sono approssimativamente uguali.

Le funzioni trigonometriche come funzioni di numeri reali

Fino a questo punto le funzioni trigonometriche sono state considerate come proprietà degli angoli. La **figura M.20** mostra un angolo ottuso con il suo vertice posto nell'origine e un lato lungo l'asse delle x . Le funzioni trigonometriche per un angolo «generale» come questo sono definite dalle seguenti espressioni:

$$\sin \theta = \frac{y}{c} \quad \text{M.43}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{c} \quad \text{M.44}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{M.45}$$

È importante ricordarsi che i valori di x alla sinistra dell'asse verticale e i valori di y al di sotto dell'asse orizzontale sono negativi; nella figura, c ha valori sempre positivi.

La **figura M.21** mostra i grafici generali per le funzioni seno, coseno e tangente in funzione di θ . La funzione seno ha un periodo di 2π rad, quindi, per ogni valore di θ , $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$. Ciò vuol dire che, quando un angolo cambia il suo valore di una quantità pari a 2π rad, la funzione ritorna al suo valore di partenza. La funzione tangente ha un periodo di π rad, quindi $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$. Altre utili relazioni sono le seguenti:

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad \text{M.46}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \quad \text{M.47}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right) = \cos \theta \quad \text{M.48}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right) = \sin \theta \quad \text{M.49}$$

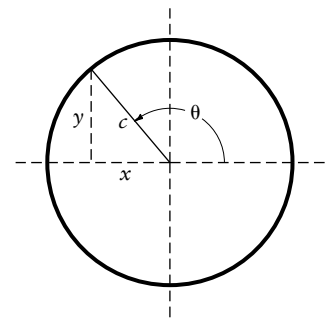


Figura M.20 Diagramma per definire le funzioni trigonometriche nel caso di un angolo ottuso.

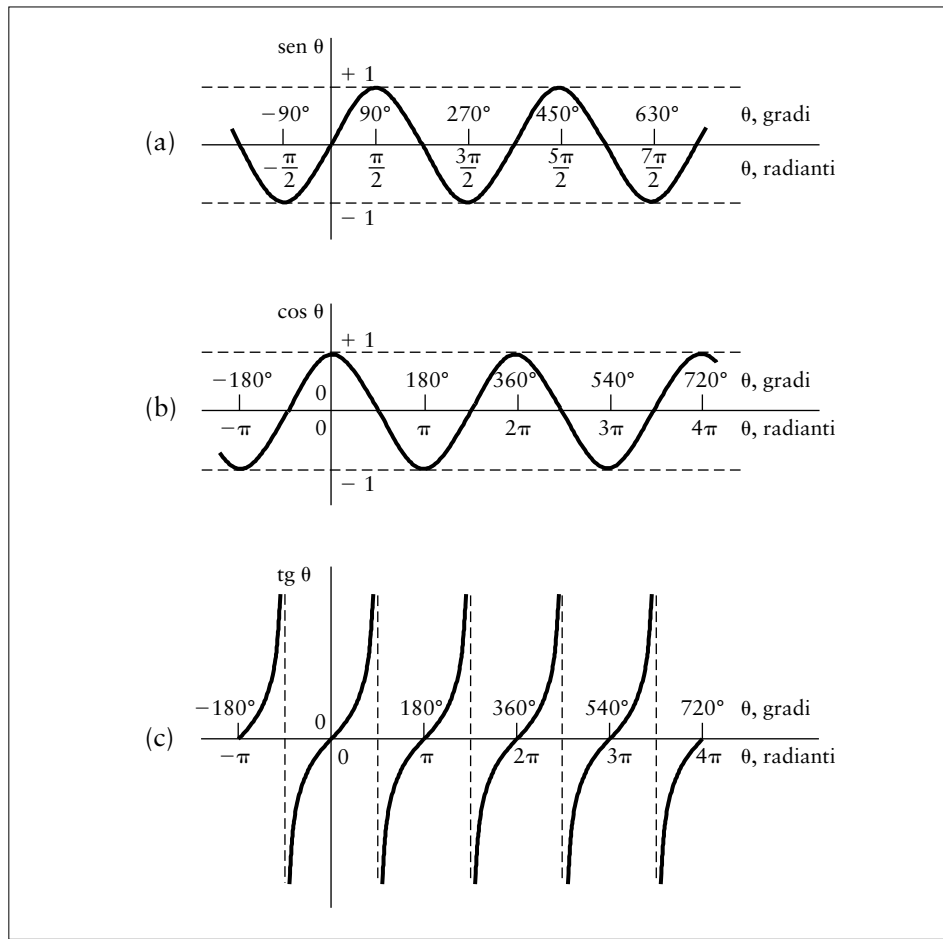


Figura M.21 Le funzioni trigonometriche $\sin \theta$, $\cos \theta$ e $\tan \theta$ in funzione di θ .

Non è difficile vedere dai grafici in figura M.21 che le funzioni trigonometriche sono funzioni di tutti i numeri reali.

Le funzioni trigonometriche possono anche essere espresse come serie di potenze di θ . Le serie per $\sin \theta$ e $\cos \theta$ sono

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad \text{M.50}$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad \text{M.51}$$

Quando θ è piccolo, buone approssimazioni vengono ottenute utilizzando solo pochi termini nelle serie.

Esempio M.9 Coseno di una somma

Utilizzando le opportune identità trigonometriche della tabella M.3, calcolare $\cos(135^\circ + 22^\circ)$. Esprimere la risposta con quattro cifre significative.

■ Impostazione

Se tutti gli angoli vengono espressi in gradi, non c'è necessità di convertirli in radianti, dato che tutte le operazioni sono effettuate sui valori numerici delle funzioni. Occorre comunque assicurarsi che la propria calcolatrice sia impostata nel modo specifico per le operazioni con i gradi. L'identità da utilizzare in questo caso è $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$, dove occorre considerare il segno in alto.

■ Soluzione

1. Scriviamo l'identità trigonometrica per il coseno della somma utilizzando $A = 135^\circ$ e $B = 22^\circ$:

$$\cos(135^\circ + 22^\circ) = (\cos 135^\circ)(\cos 22^\circ) - (\sin 135^\circ)(\sin 22^\circ)$$

2. Con la calcolatrice troviamo i valori di $\cos 135^\circ$, $\sin 135^\circ$, $\cos 22^\circ$ e $\sin 22^\circ$:

$$\cos 135^\circ = -0,7071$$

$$\cos 22^\circ = 0,9272$$

$$\sin 135^\circ = 0,7071$$

$$\sin 22^\circ = 0,3746$$

3. Inseriamo i valori nella formula e calcoliamo il risultato:

$$\cos(135^\circ + 22^\circ) = (-0,7071)(0,9272) - (0,7071)(0,3746) = -0,9205$$

■ Riflessione

La calcolatrice mostra che $\cos(135^\circ + 22^\circ) = \cos(157^\circ) = -0,9205$.

Esercitazioni

19. Trovare $\sin \theta$ e $\cos \theta$ per il triangolo rettangolo mostrato in figura M.12 in cui $a = 4$ cm e $b = 7$ cm. Qual è il valore di θ ?
20. Trovare $\sin \theta$ nel caso in cui $\theta = 8,2^\circ$. La risposta ottenuta è consistente con l'approssimazione per piccoli angoli?

M.9 L'espansione binomiale

Un **binomio** è una espressione costituita da due termini uniti tra loro da un segno più o un segno meno. Il **teorema binomiale** afferma che un binomio elevato a una potenza può essere scritto, o *espanso*, come una serie di termini. Se si eleva il binomio $(1 + x)$ alla potenza n , il teorema binomiale assume la forma

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \quad \text{M.52}$$

La serie è valida per ogni valore di n se $|x| < 1$. L'espansione binomiale è molto utile per approssimare delle espressioni algebriche, dato che quando $|x| < 1$ i termini di ordine superiore nella somma sono piccoli (l'*ordine* di un termine è dato dalla potenza di x nel termine. Quindi, i termini mostrati esplicitamente nell'equazione M.52 sono di ordine 0, 1, 2 e 3). La serie è particolarmente utile in situazioni in cui $|x|$ è piccolo rispetto a 1; in questo caso, infatti, ciascun termine è molto più piccolo del precedente e si possono trascurare tutti i termini nell'espansione tranne i primi due o tre. Se $|x|$ è molto più piccolo di 1, si ha

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx, \quad |x| \ll 1 \quad \text{M.53}$$

L'espansione binomiale viene utilizzata per ottenere molte formule dei calcoli che sono importanti in fisica. Un caso molto noto in fisica dell'utilizzo dell'approssimazione mostrata nell'equazione M.53 è la dimostrazione che l'energia cinetica relativistica si riduce alla formula classica quando la velocità di una particella è molto piccola rispetto alla velocità della luce c .

Esempio M.10 Calcolo della potenza di un numero con l'espansione binomiale

Utilizzare l'equazione M.53 per calcolare un valore approssimato della radice quadrata di 101.

■ Impostazione

Il numero 101 suggerisce direttamente un binomio, cioè $(100 + 1)$. Per ottenere una risposta approssimata utilizzando l'espansione binomiale, occorre manipolare l'espressione per ottenere un binomio costituito da 1 e un termine minore di 1.

■ Soluzione

1. Scriviamo $(101)^{1/2}$ in modo da ottenere un'espressione del tipo $(1 + x)^n$ in cui x è molto minore di 1:

$$(101)^{1/2} = (100 + 1)^{1/2} = (100)^{1/2} (1 + 0,01)^{1/2} = 10 (1 + 0,01)^{1/2}$$

2. Utilizziamo l'equazione M.53 con $n = 1/2$ e $x = 0,01$ per espandere $(1 + 0,01)^{1/2}$:

$$(1 + 0,01)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(0,01) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(0,01)^2 + \dots$$

3. Dato che $|x| \ll 1$, ci si aspetta che i valori del termine di ordine 2 e successivi siano significativamente più piccoli del termine di primo ordine. Approssimiamo il binomio tenendo solo i termini di ordine zero e di ordine uno e poi tenendo solo i primi tre termini.

- Tenendo solo i termini di ordine zero e uno si ha

$$(1 + 0,01)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}(0,01) = 1 + 0,005\,000\,0 = 1,005\,000\,0$$

- Tenendo solo i termini di ordine zero, uno e due si ha

$$\begin{aligned} (1 + 0,01)^{1/2} &\approx 1 + \frac{1}{2}(0,01) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(0,01)^2 \approx \\ &\approx 1 + 0,005\,000\,0 - 0,000\,012\,5 = 1,004\,987\,5 \end{aligned}$$

4. Sostituiamo tali risultati nell'equazione del passaggio 1.

- Tenendo solo i termini di ordine zero e uno si ha

$$(101)^{1/2} = 10(1 + 0,01)^{1/2} \approx \boxed{10,050\,000}$$

- Tenendo solo i termini di ordine zero, uno e due si ha

$$(101)^{1/2} = 10(1 + 0,01)^{1/2} \approx \boxed{10,049\,875}$$

■ Riflessione

Ci si aspetta quindi che la risposta ottenuta sia corretta entro circa lo 0,001%. Il valore di $(101)^{1/2}$ con otto cifre significative è 10,049 876. Questo differisce da 10,050 000 per un valore di 0,000 124, pari quindi a circa una parte su 10^5 , e differisce da 10,049 875 per circa una parte su 10^7 .

Esercitazioni Nelle seguenti esercitazioni, si calcoli la risposta prendendo i termini di ordine zero e uno nella serie binomiale (equazione M.53), si trovi la risposta utilizzando la calcolatrice e si mostri la percentuale di differenza tra i due valori:

19. $(1 + 0,001)^{-4}$

20. $(1 - 0,001)^{40}$

M.10 I numeri complessi

I numeri reali sono costituiti da tutti i numeri ordinati, compresi tra $-\infty$ e $+\infty$. Si sa che, dati due numeri reali, uno è sempre uguale, maggiore o minore rispetto all'altro. Per esempio, $3 > 2$, $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ e $3,14 < \pi < 3,15$. Un numero che *non* può essere messo in ordine è $\sqrt{-1}$; non si può misurare la grandezza di questo numero e quindi non ha alcun senso dire, per esempio, che $3\sqrt{-1}$ è maggiore o minore di $2\sqrt{-1}$. I primi matematici che operarono con i numeri contenenti $\sqrt{-1}$ li chiamarono *numeri immaginari*, dato che non potevano essere utilizzati per misurare o contare nulla. In matematica per rappresentare $\sqrt{-1}$ si utilizza il simbolo i .

La formula M.5, che si applica alle equazioni quadratiche, cioè del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mostra che non ci sono soluzioni reali quando $b^2 < 4ac$. Ci sono comunque ancora due radici di tale equazione. Ciascuna radice è costituita da un numero contenente due termini: un numero reale e un multiplo di $i = \sqrt{-1}$. Il multiplo di i è chiamato **numero immaginario** e i è detta **unità immaginaria**.

Un **numero complesso** z qualsiasi può essere scritto come

$$z = a + bi \quad \text{M.54}$$

in cui a e b sono numeri reali. La quantità a è chiamata **parte reale** di z e viene indicata con $\text{Re}(z)$, mentre la quantità b viene detta **parte immaginaria** di z e viene indicata con $\text{Im}(z)$. È possibile rappresentare un numero complesso z come un punto in un piano, chiamato **piano complesso**, come mostrato in [figura M.22](#), in cui l'asse x rappresenta l'**asse reale**, mentre l'asse y rappresenta l'**asse immaginario**. Si possono utilizzare le relazioni $a = r \cos \theta$ e $b = r \sin \theta$ (figura M.22) per scrivere il numero complesso z in **coordinate polari** (un sistema in cui un punto viene individuato dall'angolo di rotazione in senso antiorario θ e dalla distanza r nella direzione di θ):

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta \quad \text{M.55}$$

in cui $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ prende il nome di **modulo** di z .

Quando i numeri complessi vengono sommati o sottratti, le parti reali e immaginarie vengono sommate o sottratte separatamente:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{M.56}$$

Invece, quando due numeri complessi vengono moltiplicati, ciascuna parte di ciascun numero viene moltiplicata per ciascuna parte dell'altro numero:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned} \quad \text{M.57}$$

dove si è sfruttato il fatto che $i^2 = -1$.

Il **numero complesso coniugato** z^* del numero complesso z si ottiene sostituendo i con $-i$ in z . Quindi, se $z = a + ib$,

$$z^* = (a + ib)^* = a - ib \quad \text{M.58}$$

Quando un'equazione quadratica ha **radici complesse**, le radici sono costituite da numeri complessi coniugati nella forma $a \pm ib$. Il prodotto di un numero complesso e del suo numero complesso coniugato è uguale al quadrato del modulo del numero:

$$zz^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = r^2 \quad \text{M.59}$$

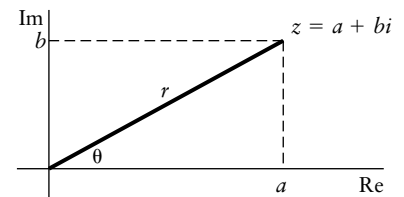


Figura M.22 Rappresentazione di un numero complesso in un piano. La parte reale del numero complesso viene riportata lungo l'asse orizzontale, mentre la parte immaginaria è riportata lungo l'asse verticale.

Una funzione particolarmente utile di un numero complesso è la forma esponenziale $e^{i\theta}$. Utilizzando una espansione per e^x , si ha

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$

Ricordando che $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ e così via, e separando le parti reali dalle parti immaginarie, tale espansione può essere scritta come segue:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right)$$

Confrontando questo risultato con le equazioni M.50 e M.51, si può vedere che

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \quad \text{M.60}$$

Tramite questo risultato è possibile esprimere un numero complesso qualsiasi come un esponenziale:

$$z = a + ib = r \cos\theta + ir \sin\theta = re^{i\theta} \quad \text{M.61}$$

Se $z = x + iy$, in cui x e y sono delle variabili reali, allora z viene chiamata **variabile complessa**.

Variabili complesse in fisica

Le variabili complesse sono spesso utilizzate nelle formule che descrivono i circuiti in corrente alternata: l'impedenza di un condensatore o di un induttore include una parte reale (la resistenza) e una parte immaginaria (la reattanza). (Ci sono comunque dei modi alternativi per analizzare i circuiti in corrente alternata: per esempio l'utilizzo di vettori rotanti chiamati *fasori*, che quali non richiedono l'assegnazione di valori immaginari.) Le variabili complesse sono inoltre importanti nello studio delle onde armoniche attraverso l'analisi e la sintesi di Fourier. L'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo contiene una funzione con valore complesso per la posizione e per il tempo.

Esempio M.11 Calcolo della potenza di un numero complesso

Calcolare $(1 + 3i)^4$ utilizzando l'espansione binomiale.

■ Impostazione

L'espressione è del tipo $(1 + x)^n$. Poiché n è un numero intero positivo, l'espansione è valida per qualsiasi valore di x .

■ Soluzione

1. Scriviamo l'espansione di $(1 + 3i)^4$ arrivando fino al termine di ordine quattro:

$$1 + 4(3i) + \frac{4 \cdot 3}{2!}(3i)^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}(3i)^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!}(3i)^4$$

2. Calcoliamo ciascun termine ricordando che $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = +1$:

$$1 + 12i - 54 - 108i + 81$$

3. Scriviamo il risultato nella forma $a + bi$:

$$(1 + 3i)^4 = \boxed{28 - 96i}$$

■ Riflessione

Si può risolvere il problema in modo algebrico per dimostrare che la risposta ottenuta è corretta. Si ottiene prima il quadrato di $(1 + 3i)$ e poi si eleva al quadrato il risultato per ottenere $(1 + 3i)^4$:

$$(1 + 3i)^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$$

$$(-8 + 6i)^2 = (-8)(-8) + 2(-8)(6i) + (6i)^2 = 64 - 96i - 36 = 28 - 96i$$

Esercitazioni Esprimere nella forma $a + bi$ i seguenti numeri complessi:

23. $e^{i\pi}$

24. $e^{i\pi/2}$

M.11 Calcolo differenziale

Il **calcolo** è quella branca della matematica che ci permette di valutare gli effetti di variazione istantanee di funzioni e variabili. Dall'equazione di una funzione – per esempio, x funzione di t – si può sempre ricavare il valore di x per un determinato valore di t , ma con metodi del calcolo è possibile andare molto al di là di questa possibilità. Si può sapere dove x avrà determinate proprietà, come per esempio un valore massimo o minimo, senza dover eseguire lunghe valutazioni di tentativo partendo dai valori di t . Con il calcolo (se vengono forniti i dati necessari) si potrà trovare, per esempio, la posizione corrispondente al massimo stress su una sbarra, oppure la velocità o la posizione di un oggetto che sta cadendo al tempo t , oppure l'energia che un oggetto che sta cadendo avrà acquistato al momento dell'impatto con il suolo. I principi del calcolo vengono ricavati analizzando le funzioni a livello infinitesimale, cioè analizzando, per esempio, come varia x a seguito di variazioni di t che diventano infinitesimali. Cominceremo col considerare il **calcolo differenziale**, in cui si determina il limite della velocità di variazione di x rispetto a t al tendere della variazione di t verso valori sempre più vicini a zero.

La **figura M.23** mostra un grafico di x rispetto a t per una tipica funzione $x(t)$. Per un particolare valore di $t = t_1$, x assume il valore x_1 , come indicato in figura. Per un altro valore t_2 , x assume il valore x_2 . La variazione di t , cioè $t_2 - t_1$, viene scritta come $\Delta t = t_2 - t_1$; analogamente, la corrispondente variazione di x viene indicata come $\Delta x = x_2 - x_1$. Il rapporto $\Delta x / \Delta t$ rappresenta la pendenza della linea retta che congiunge il punto (x_1, t_1) con il punto (x_2, t_2) . Se si fa il limite al tendere di t_2 a t_1 (cioè al tendere di Δx a zero) la pendenza della linea retta che congiunge (x_1, t_1) con (x_2, t_2) si avvicina sempre più alla pendenza della linea retta che è tangente alla curva nel punto (x_1, t_1) . La pendenza di questa tangente è uguale alla **derivata** di x rispetto a t e viene scritta come dx/dt :

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

M.62

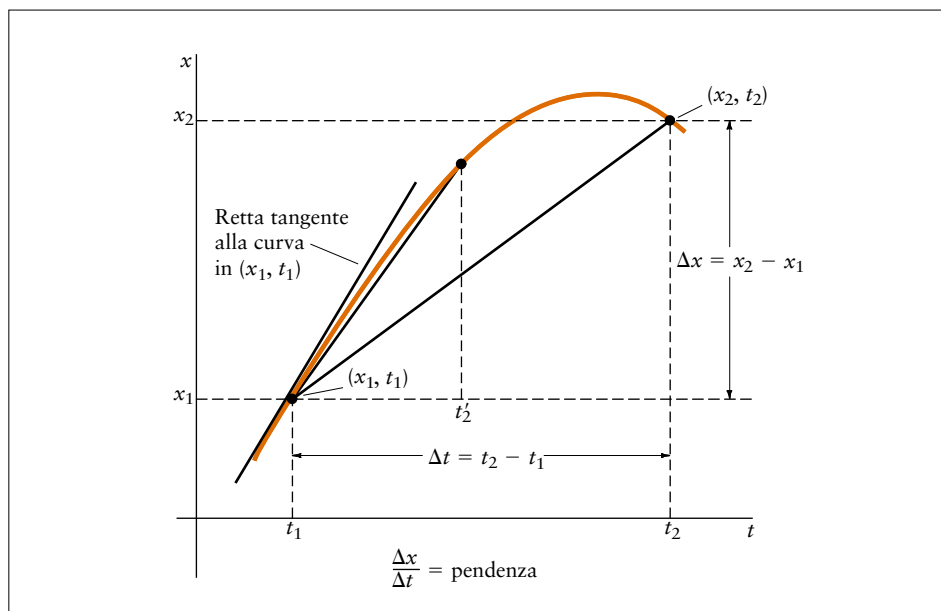


Figura M.23 Grafico di una tipica funzione $x(t)$. I punti (x_1, t_1) e (x_2, t_2) sono connessi da una linea retta. La pendenza di tale retta è data da $\Delta x / \Delta t$. Al diminuire dell'intervallo di tempo che inizia da t_1 , la pendenza associata alla retta che congiunge i punti dell'intervallo si avvicina alla pendenza della retta tangente alla curva al tempo t_1 , la quale rappresenta la derivata di x rispetto a t .

Quando si calcola la derivata di una funzione, si dice che si sta *differenziando* la funzione, e gli elementi molto piccoli dx e dt vengono chiamati rispettivamente **differenziali** di x e di t .

La derivata di una funzione di t è un'altra funzione di t . Se x è una costante, cioè non varia al variare di t , il grafico di x rispetto a t sarà una linea orizzontale con una pendenza pari a zero: la derivata di una costante è quindi 0. In [figura M.24](#), x non è una costante ma varia in modo proporzionale a t :

$$x = Ct$$

Questa funzione ha una pendenza costante uguale a C , quindi la derivata di Ct è C . La [tabella M.4](#) elenca alcune proprietà delle derivate e le derivate di alcune funzioni particolari che si presentano spesso in fisica. La tabella è seguita da alcuni commenti al fine di rendere tali proprietà e regole più chiare. Una discussione più dettagliata può essere trovata in molti libri di testo dedicati specificatamente al calcolo.

Tabella M.4 Proprietà delle derivate e derivate di funzioni particolari.

Linearità	
1.	La derivata di una costante C moltiplicata per una funzione $f(t)$ è uguale alla costante moltiplicata per la derivata della funzione:
	$\frac{d}{dt}[Cf(t)] = C \frac{df(t)}{dt}$
Derivata di una somma	
2.	La derivata della somma di funzioni è uguale alla somma delle derivate delle funzioni:
	$\frac{d}{dt}[f(t) + g(t)] = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$
Derivata di una funzione di funzione (regola della catena)	
3.	Se f è una funzione di x e, a sua volta, x è una funzione di t , la derivata di f rispetto a t è uguale al prodotto della derivata di f rispetto a x e la derivata di x rispetto a t :
	$\frac{d}{dt}f(x(t)) = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$
Derivata di un prodotto	
4.	La derivata di un prodotto di funzioni $f(t) \cdot g(t)$ è uguale alla prima funzione moltiplicata per la derivata della seconda funzione più la seconda funzione moltiplicata per la derivata della prima funzione:
	$\frac{d}{dt}[f(t) \cdot g(t)] = f(t) \frac{dg(t)}{dt} + g(t) \frac{df(t)}{dt}$
Derivata del reciproco	
5.	La derivata di t rispetto a x è il reciproco della derivata di x rispetto a t , assumendo che nessuna delle due derivate sia zero:
	$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} \quad \text{se } \frac{dt}{dx} \neq 0 \text{ e } \frac{dx}{dt} \neq 0$
Derivate di funzioni particolari	
6.	$\frac{dC}{dt} = 0 \quad C = \text{costante}$
7.	$\frac{d(t^n)}{dt} = nt^{n-1} \quad n = \text{costante}$
8.	$\frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cos \omega t \quad \omega = \text{costante}$
9.	$\frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t \quad \omega = \text{costante}$
10.	$\frac{d}{dt} \tan \omega t = \omega \sec^2 \omega t \quad \omega = \text{costante}$
11.	$\frac{d}{dt} e^{bt} = be^{bt} \quad b = \text{costante}$
12.	$\frac{d}{dt} \ln bt = \frac{1}{t} \quad b = \text{costante}$

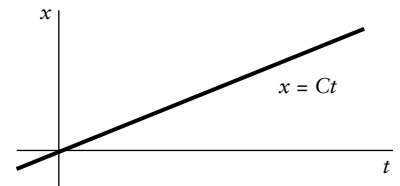


Figura M.24 Grafico della funzione lineare $x = Ct$. Questa funzione ha una pendenza costante pari a C .

Commenti sulle regole dalla 1 alla 5

Le regole 1 e 2 derivano dal fatto che il processo di limite è un processo lineare. Si può comprendere la regola 3 (regola della catena) moltiplicando $\Delta f/\Delta t$ per $\Delta x/\Delta x$ e notando che al tendere di Δt a zero, anche Δx tende a zero. Quindi si ha

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta t} \frac{\Delta x}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \\ &= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}\end{aligned}$$

In questi passaggi è stato utilizzato il fatto che il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti.

La regola 4 non è a prima vista chiara. La derivata del prodotto di due funzioni è il limite del rapporto

$$\frac{f(t + \Delta t)g(t + \Delta t) - f(t)g(t)}{\Delta t}$$

Se si somma e si sottrae la quantità $f(t + \Delta t)g(t)$ al numeratore, si può scrivere tale rapporto come

$$\begin{aligned}\frac{f(t + \Delta t)g(t + \Delta t) - f(t + \Delta t)g(t) + f(t + \Delta t)g(t) - f(t)g(t)}{\Delta t} &= \\ &= f(t + \Delta t) \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] + g(t) \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right]\end{aligned}$$

Al tendere di Δt a zero, i termini all'interno delle parentesi quadre diventano rispettivamente $dg(t)/dt$ e $df(t)/dt$, e il limite dell'espressione è quindi

$$f(t) \frac{dg(t)}{dt} + g(t) \frac{df(t)}{dt}$$

La regola 5 è una diretta conseguenza della definizione:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^{-1} = \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-1}$$

Commenti sulla regola 7

Si può ottenere tale importante risultato utilizzando l'espansione binomiale. Si ha

$$f(t) = t^n$$

$$\begin{aligned}f(t + \Delta t) &= (t + \Delta t)^n = t^n \left(1 + \frac{\Delta t}{t} \right)^n = \\ &= t^n \left[1 + n \frac{\Delta t}{t} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\Delta t}{t} \right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{\Delta t}{t} \right)^3 + \dots \right]\end{aligned}$$

Quindi

$$f(t + \Delta t) - f(t) = t^n \left[n \frac{\Delta t}{t} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\Delta t}{t} \right)^2 + \dots \right]$$

e

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = nt^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} t^{n-2} \Delta t + \dots$$

Il successivo termine omissso dall'ultima somma è proporzionale a $(\Delta t)^2$, il successivo a $(\Delta t)^3$ e così via. Ciascun termine, a eccezione del primo, tende a zero al tendere di Δt a zero. Quindi

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = nt^{n-1}$$

Commenti sulle regole dalla 8 alla 10

Si scrive inizialmente $\sin \omega t = \sin \theta$, con $\theta = \omega t$, e si usa la regola della funzione di funzione:

$$\frac{d \sin \theta}{dt} = \frac{d \sin \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d \sin \theta}{d\theta}$$

Successivamente si utilizza la formula trigonometrica per il seno della somma di due angoli θ e $\Delta\theta$:

$$\sin(\theta + \Delta\theta) = \sin \Delta\theta \cos \theta + \cos \Delta\theta \sin \theta$$

Dato che $\Delta\theta$ tende a zero, si possono utilizzare le approssimazioni per piccoli angoli

$$\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta \text{ e } \cos \Delta\theta \approx 1$$

Quindi

$$\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \Delta\theta \cos \theta + \sin \theta$$

e

$$\frac{\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin \theta}{\Delta\theta} \approx \cos \theta$$

Un ragionamento simile può essere applicato alla funzione coseno per ottenere la regola 9.

La regola 10 si ottiene scrivendo $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ e applicando la regola 4 insieme alle regole 8 e 9:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tan \theta) &= \frac{d}{dt} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = (\sin \theta) \frac{d}{dt} \frac{1}{\cos \theta} + \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \frac{d}{dt} \sin \theta = \\ &= \sin \theta (-1) \frac{1}{\cos^2 \theta} (-\sin \theta) + (\cos \theta) \frac{1}{\cos \theta} = \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \end{aligned}$$

Per ottenere la regola 10, si pone $\theta = \omega t$ e si usa la regola della funzione di funzione.

Commenti sulla regola 11

Si utilizza di nuovo la regola della funzione di funzione

$$\frac{de^\theta}{dt} = \frac{b}{b} \frac{de^\theta}{dt} = b \frac{de^\theta}{d(bt)} = b \frac{de^\theta}{d\theta} \text{ con } \theta = bt$$

e l'espansione in serie per la funzione esponenziale

$$e^{\theta + \Delta\theta} = e^\theta e^{\Delta\theta} = e^\theta \left[1 + \Delta\theta + \frac{(\Delta\theta)^2}{2!} + \frac{(\Delta\theta)^3}{3!} + \dots \right]$$

Quindi

$$\frac{e^{\theta + \Delta\theta} - e^\theta}{\Delta\theta} = e^\theta + e^\theta \frac{\Delta\theta}{2!} + e^\theta \frac{(\Delta\theta)^2}{3!} + \dots$$

Al tendere di $\Delta\theta$ a zero, il membro di destra di questa equazione tende a e^θ .

Commenti sulla regola 12

Sia

$$y = \ln bt$$

da cui segue

$$e^y = bt \Rightarrow t = \frac{1}{b} e^y$$

Quindi, utilizzando la regola 11, si ottiene

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{b} e^y \Rightarrow \frac{dt}{dy} = t$$

e successivamente, utilizzando la regola 5

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dt}{dy} \right)^{-1} = \frac{1}{t}$$

Derivate del secondo ordine e superiore: analisi dimensionale

Una volta che è stata fatta la derivata di una funzione, si può fare la derivata della funzione ottenuta, se sono rimasti dei termini da derivare. Per esempio, una funzione come $x = e^{bt}$ può essere derivata all'infinito: infatti risulta $dx/dt = b e^{bt}$ e questa funzione può essere nuovamente derivata ottenendo $b^2 e^{bt}$, e così via.

Consideriamo la velocità e l'accelerazione. Si può definire la velocità come la rapidità di variazione della posizione di una particella, o dx/dt , e l'accelerazione come la rapidità di variazione della velocità o la derivata seconda di x rispetto a t , scritta come d^2x/dt^2 . Se una particella si muove con velocità costante, allora la derivata prima, dx/dt , sarà uguale a una costante. L'accelerazione, invece, sarà zero: avere una velocità costante equivale ad avere un'accelerazione nulla e la derivata di una costante è zero. Consideriamo ora un oggetto che cade, soggetto unicamente all'accelerazione costante di gravità: la velocità stessa dipenderà linearmente dal tempo, quindi la derivata seconda, d^2x/dt^2 , sarà una costante.

Le dimensioni fisiche di una derivata rispetto a una variabile sono quelle che si avrebbero se la funzione originale di tale variabile fosse divisa per un valore della variabile. Per esempio, la dimensione fisica di un'equazione in cui un termine è x (posizione) è quella di una lunghezza (L); la dimensione fisica di dx/dt è quella di una velocità (L/T) e la dimensione fisica di d^2x/dt^2 è quella di una accelerazione (L/T²).

Esempio M.12 Posizione, velocità e accelerazione

Calcolare la derivata prima e la derivata seconda di

$$x = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$$

dove a , b e c sono delle costanti. La funzione fornisce la posizione (in m) in una dimensione di una particella, in cui t rappresenta il tempo (in s), a è l'accelerazione (in m/s²), b è la velocità (in m/s) al tempo $t = 0$ e c è la posizione (in m) della particella a $t = 0$.

■ Impostazione

Sia la derivata prima sia la derivata seconda sono costituite dalla somma di termini; per ciascuna derivata si esegue la derivata di ciascun termine separatamente e si sommano i risultati.

■ Soluzione

1. Per trovare la derivata prima, eseguiamo inizialmente la derivata del primo termine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}at^2\right) = \left(\frac{1}{2}a\right)2t^1 = at$$

2. Calcoliamo la derivata prima del secondo e del terzo termine:

$$\frac{d(bt)}{dt} = b$$

$$\frac{d(c)}{dt} = 0$$

3. Sommiamo i risultati:

$$\frac{dx}{dt} = at + b$$

4. Per calcolare la derivata seconda si ripete lo stesso procedimento sul risultato ottenuto nel passaggio 3:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a + 0 = a$$

■ Riflessione

La dimensione fisica evidenzia che la risposta ottenuta è plausibile. La funzione originaria è l'equazione di una posizione: tutti i termini sono in metri, poiché le unità di misura di t^2 e di t (s^2 e s) si elidono con i denominatori delle unità di misura di a e di b (m/s^2 e m/s).

Nella funzione dx/dt , tutti i termini sono in m/s , poiché la costante c è stata differenziata ottenendo zero e l'unità di misura di t (s) si elide con il denominatore dell'unità di misura di a (m/s).

Nella funzione d^2x/dt^2 rimane unicamente la costante dell'accelerazione; come ci si aspetta, la sua dimensione fisica è L/T^2 .

Esercitazioni

25. Calcolare dy/dx per $y = \frac{5}{8}x^3 - 24x - \frac{5}{8}$.

26. Calcolare dy/dt per $y = ate^{bt}$, in cui a e b sono delle costanti.

Risolvere le equazioni differenziali utilizzando i numeri complessi

Un'equazione differenziale è un'equazione in cui le derivate di una funzione appaiono come variabili e in cui le variabili sono collegate tra loro attraverso le loro derivate. Si consideri un'equazione nella forma

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = A \cos \omega t \quad \text{M.63}$$

che descrive un processo fisico, come per esempio un oscillatore armonico smorzato guidato da una forza sinusoidale, o un combinazione in serie RLC alimentata da una differenza di potenziale sinusoidale. Sebbene ciascuno dei parametri nell'equazione M.63 sia costituito da un numero reale, il termine dipendente dal tempo all'interno del coseno suggerisce che si può trovare una soluzione stabile per questa equazione introducendo i numeri complessi. Come prima cosa si costruisce l'equazione «parallela»

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = A \sin \omega t \quad \text{M.64}$$

L'equazione M.64 non ha di per sé alcun significato fisico e non si è interessati a risolverla. Comunque è utile nella soluzione dell'equazione M.63. Dopo aver moltiplicato ciascun termine dell'equazione M.64 per l'unità immaginaria i , si possono sommare tra loro le equazioni M.64 e M.63 ottenendo

$$\left(a \frac{d^2 x}{dt^2} + ai \frac{d^2 y}{dt^2}\right) + \left(b \frac{dx}{dt} + bi \frac{dy}{dt}\right) + (cx + ciy) = A \cos \omega t + Ai \sin \omega t$$

Si possono poi combinare tra loro i termini per ottenere

$$a \frac{d^2(x + iy)}{dt^2} + b \frac{d(x + iy)}{dt} + c(x + iy) = A(\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad \text{M.65}$$

che è valida poiché la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate. Si può semplificare il risultato ottenuto definendo $z = x + iy$ e utilizzando l'identità $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$. Sostituendo questa espressione nell'equazione M.65 si ottiene

$$a \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + cz = Ae^{i\omega t} \quad \text{M.66}$$

che può essere ora risolta per trovare z . Una volta che z è stata ottenuta si può trovare x utilizzando la relazione $x = \text{Re}(z)$.

Dato che si sta cercando solo la soluzione stabile per l'equazione M.65, si può assumere che la sua soluzione sia della forma $x = x_0 \cos(\omega t - \varphi)$ in cui φ è una costante. Questo è equivalente ad assumere che la soluzione dell'equazione M.66 sia della forma $z = \eta e^{i\omega t}$, in cui η (lettera greca «eta») è un numero complesso costante. Allora $dz/dt = i\omega z$, $d^2z/dt^2 = -\omega^2 z$ ed $e^{i\omega t} = z/\eta$. Sostituendo queste espressioni nell'equazione M.65 si ha

$$-a\omega^2 z + i\omega b z + cz = A \frac{z}{\eta}$$

Dividendo entrambi i membri di questa equazione per z e risolvendo per η si ha

$$\eta = \frac{A}{-a\omega^2 + i\omega b + c}$$

Esprimendo il denominatore in forma polare si ha

$$(-a\omega^2 + c) + i\omega b = \sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2} e^{i\varphi}$$

dove $\tan \varphi = \omega^2 b^2 / (-a\omega^2 + c)$. Quindi

$$\eta = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} e^{-i\varphi}$$

e perciò

$$\begin{aligned} z &= \eta e^{i\omega t} = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} e^{-i(\omega t - \varphi)} = \\ &= \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} [\cos(\omega t - \varphi) + i \sin(\omega t - \varphi)] \end{aligned} \quad \text{M.67}$$

Infine

$$x = \text{Re}(z) = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{M.68}$$

La funzione esponenziale

Una **funzione esponenziale** è una funzione nella forma a^{bx} , in cui $a > 0$ e b sono delle costanti. La funzione è tipicamente scritta nella forma e^{cx} , in cui c è una costante.

Quando la rapidità di variazione di una quantità è proporzionale alla quantità stessa, tale quantità aumenta o diminuisce esponenzialmente, a seconda del segno della costante di proporzionalità.

Un esempio di una funzione esponenziale **decrescente** è quella che descrive il decadimento nucleare. Se N è il numero di nuclei radioattivi a un certo istante di tempo, allora la variazione dN in un intervallo di tempo molto piccolo dt sarà proporzionale a N e a dt :

$$dN = -\lambda N dt$$

in cui λ rappresenta la *costante di decadimento* (non deve essere confusa con la rapidità di decadimento dN/dt). La funzione N che soddisfa la precedente equazione è

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{M.69}$$

in cui N_0 rappresenta il valore di N per $t = 0$. La **figura M.25** mostra il grafico di N in funzione di t . Una caratteristica del decadimento esponenziale è data dal fatto che N decresce di un fattore costante in un dato intervallo di tempo. L'intervallo di tempo richiesto perché N diventi pari alla metà del suo valore iniziale è chiamato *tempo di dimezzamento* $t_{1/2}$. Il tempo di dimezzamento è ottenuto dall'equazione M.69 ponendo $N = N_0/2$ e risolvendo per il tempo. Questa operazione fornisce

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} \quad \text{M.70}$$

Un esempio di una funzione esponenziale **crescente** è dato dalla crescita di una popolazione. Se il numero di organismi è rappresentato da N , la variazione di N dopo un intervallo di tempo dt molto piccolo è data da

$$dN = \lambda N dt$$

in cui λ rappresenta la *costante di crescita*. La funzione N che soddisfa tale equazione è data da

$$N = N_0 e^{\lambda t} \quad \text{M.71}$$

(Si noti la variazione del segno nell'esponente rispetto all'equazione M.69.) Un grafico di tale funzione è mostrato nella **figura M.26**. Una crescita esponenziale può essere caratterizzata da un *tempo di duplicazione* T_2 , che è collegato a λ attraverso la relazione

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} \quad \text{M.72}$$

Molto spesso si conosce la crescita della popolazione in termini di un aumento percentuale annuo e si desidera calcolare il tempo di duplicazione. In questo caso si può calcolare T_2 (in anni) con l'equazione

$$T_2 = \frac{69,3}{r} \quad \text{M.73}$$

in cui r è la percentuale annua. Per esempio, se la popolazione aumenta del 2% all'anno, la popolazione raddoppierà ogni $69,3/2 \approx 35$ anni. La **tabella M.5** elenca alcune utili relazioni per le funzioni esponenziali e logaritmiche.

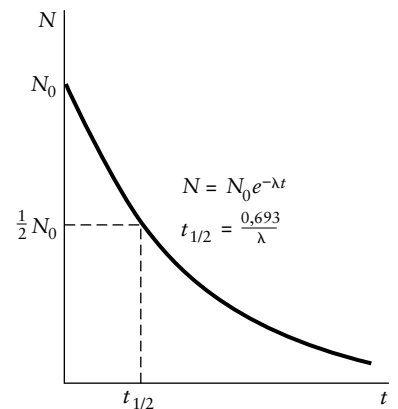


Figura M.25 Grafico di N in funzione di t nel caso in cui N decresce esponenzialmente. Il tempo $t_{1/2}$ rappresenta il tempo richiesto affinché N diventi metà del suo valore iniziale.

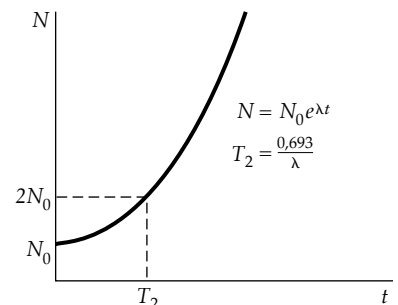


Figura M.26 Grafico di N in funzione di t nel caso in cui N aumenta esponenzialmente. Il tempo T_2 rappresenta il tempo necessario affinché il valore di N raddoppi.

Tabella M.5 Funzioni esponenziali e logaritmiche.

$e = 2,71828\dots$
$e^0 = 1$
$y = e^x \Rightarrow x = \ln y$
$e^{\ln x} = x$
$e^x e^y = e^{x+y}$
$(e^x)^y = e^{xy} = e^{yx} = (e^y)^x$
$\ln e = 1$
$\ln 1 = 0$
$\ln xy = \ln x + \ln y$
$\ln(x/y) = \ln x - \ln y$
$\ln e^x = x$
$\ln a^x = x \ln a$
$\ln x = (\ln 10) \log x = 2,3026 \log x$
$\log x = (\log e) \ln x = 0,434 29 \ln x$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

Esempio **M.13** Decadimento radioattivo del cobalto-60

Il tempo di dimezzamento del cobalto-60 (^{60}Co) è 5,27 anni. All'istante $t = 0$, si ha un campione di ^{60}Co con una massa uguale a 1,20 mg. A quale istante di tempo t (in anni) una quantità pari a 0,400 mg del campione di ^{60}Co sarà decaduta?

■ Impostazione

Quando è stato calcolato il tempo di dimezzamento in un decadimento esponenziale, si è imposta la condizione $N/N_0 = 1/2$. In questo esempio occorre trovare il tempo in cui due terzi del campione rimane nel suo stato iniziale, quindi il rapporto N/N_0 sarà uguale a 0,667.

■ Soluzione

1. Esprimiamo il rapporto N/N_0 come una funzione esponenziale:

$$\frac{N}{N_0} = 0,667 = e^{-\lambda t}$$

2. Prendiamo il reciproco di entrambi i membri:

$$\frac{N_0}{N} = 1,50 = e^{\lambda t}$$

3. Risolviamo trovando t :

$$t = \frac{\ln 1,5}{\lambda} = \frac{0,405}{\lambda}$$

4. La costante di decadimento è collegata al tempo di dimezzamento dalla relazione $\lambda = (\ln 2)/t_{1/2}$ (equazione M.70). Sostituiamo $(\ln 2)/t_{1/2}$ al posto di λ e calcoliamo il tempo:

$$t = \frac{\ln 1,5}{\ln 2} t_{1/2} = \frac{\ln 1,5}{\ln 2} (5,27 \text{ y}) = 3,08 \text{ y}$$

■ Riflessione

Ci vogliono 5,27 anni perché la massa di un campione di ^{60}Co decresca del 50% del suo valore iniziale. Quindi ci si aspetta che ci vogliano meno di 5,27 anni affinché il campione subisca un decadimento pari al 33,3% della sua massa. Il passaggio 4 fornisce come risultato 3,08 anni, un tempo quindi inferiore a 5,27 anni, come ci si aspettava.

Esercitazioni

27. La costante di tempo τ per la scarica di un condensatore in un circuito RC rappresenta il tempo richiesto affinché il condensatore si scarichi fino a raggiungere una carica pari a e^{-1} ($= 0,368$) volte la sua carica al tempo $t = 0$. Se $t = 1$ s per un certo condensatore, a quale tempo t (in secondi) si sarà scaricato fino al 50% della sua carica iniziale?
28. Se la popolazione dei coyote in un certo stato aumenta a un tasso pari all'8% su un intervallo di 10 anni e continua ad aumentare con la stessa rapidità per sempre, in quanti anni essa raggiungerà un numero di animali pari a 1,5 volte il suo valore attuale?

M.12 Calcolo integrale

L'integrazione può essere considerata l'operazione inversa rispetto alla derivazione. Integrare una funzione $f(t)$ significa determinare una funzione $F(t)$ per la quale $f(t)$ rappresenta la derivata di $F(t)$ rispetto al tempo.

L'integrale di un'area sotto a una curva: analisi dimensionale

Il processo che consente di determinare l'area limitata da una curva in un grafico illustra il significato dell'integrazione. La **figura M.27** mostra una funzione $f(t)$. L'area dell'elemento ombreggiato è approssimativamente data da $f_i \Delta t_i$, in cui per f_i si prende un qualunque valore nell'intervallo di tempo Δt_i . Questa approssimazione è altamente accurata se Δt_i è molto piccolo. L'area totale delimitata da una parte di curva viene trovata sommando tutti gli elementi di area che sono compresi sotto la curva e prendendone il limite al tendere di Δt_i a zero. Questo limite viene chiamato **integrale** di f su t e si scrive

$$\int f \, dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i f_i \Delta t_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \text{area}_i \quad \text{M.74}$$

La dimensione fisica di un integrale di una funzione $f(t)$ viene determinata moltiplicando la dimensione fisica dell'**integrand** (la funzione che viene integrata) per la dimensione fisica della variabile di integrazione t . Per esempio, se l'integrand è una funzione che rappresenta una velocità $v(t)$ (dimensione L/T) e la variabile di integrazione è il tempo t , la dimensione fisica dell'integrale è data da L = (L/T)T. Quindi, la dimensione fisica dell'integrale coincide con la dimensione fisica della velocità moltiplicata per il tempo.

Consideriamo la seguente scrittura:

$$y = \int_{t_1}^{t_2} f \, dt \quad \text{M.75}$$

La funzione y rappresenta l'area limitata dalla curva di f rispetto al tempo da t_1 fino a un qualunque valore di tempo t . Nel caso di un piccolo intervallo di tempo Δt , la variazione di area Δy è data approssimativamente da $f \Delta t$:

$$\Delta y \approx f \Delta t$$

$$f \approx \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

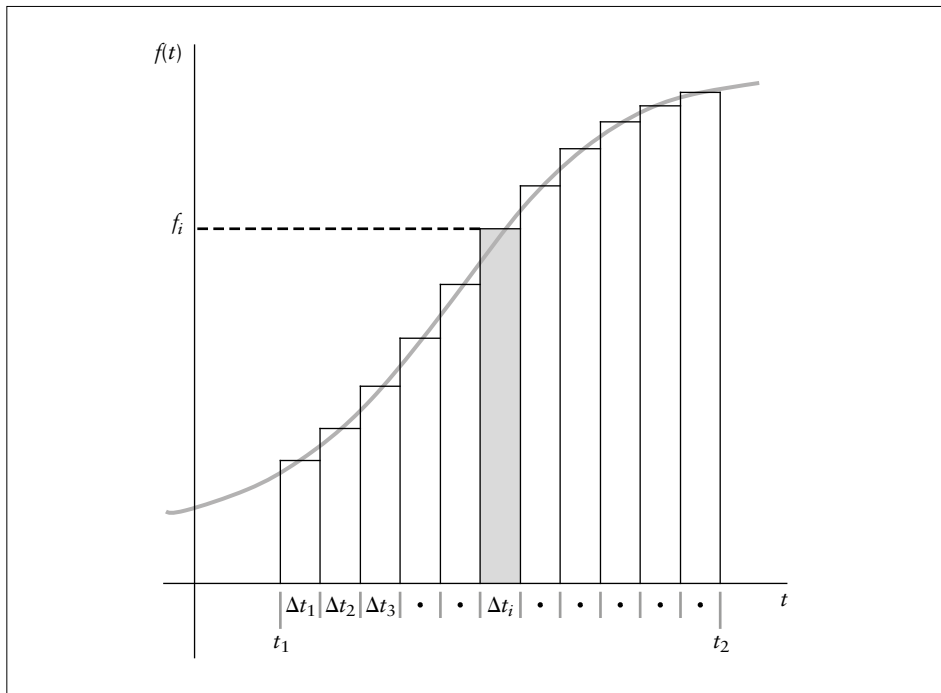


Figura M.27 Una generica funzione $f(t)$. L'area dell'elemento ombreggiato è approssimativamente data da $f_i \Delta t_i$, in cui f_i può essere un qualunque valore della funzione all'interno dell'intervallo di tempo Δt_i .

Se si considera il limite per Δt che tende a zero, si può notare che f rappresenta la derivata di y :

$$f = \frac{dy}{dt} \quad \text{M.76}$$

Integrali indefiniti e integrali definiti

Quando si scrive

$$y = \int f dt \quad \text{M.77}$$

ci si sta riferendo a y come a un **integrale indefinito** di f rispetto a t . Per calcolare un integrale indefinito, si trova la funzione y la cui derivata sia f . Dato che tale funzione potrebbe contenere un termine costante la cui derivata è zero, si include come termine finale una costante di integrazione C . Se si sta integrando la funzione su un intervallo conosciuto – come per esempio da t_1 a t_2 nella figura M.27 – si può calcolare un **integrale definito** eliminando l'incognita costituita dalla costante C :

$$\int_{t_1}^{t_2} f dt = y(t_2) - y(t_1) \quad \text{M.78}$$

La **tabella M.6** elenca alcune importanti formule di integrazione. Un elenco più completo di formule di integrazione può essere trovato in qualunque libro di testo sul calcolo oppure cercando «tabella di integrali» in Internet.

Tabella M.6 Formule di integrazione.

1.	$\int A dt = At$
2.	$\int At dt = \frac{1}{2}At^2$
3.	$\int At^n dt = A \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$
4.	$\int At^{-1} dt = A \ln t $
5.	$\int e^{bt} dt = \frac{1}{b} e^{bt}$
6.	$\int \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$
7.	$\int \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega} \cos \omega t$
8.	$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$
9.	$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
10.	$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{2}{a}$
11.	$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$
12.	$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{4}{a^2}$
13.	$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$

Nota. In queste formule, A , b e ω sono delle costanti. Nelle formule dalla 1 alla 7, una costante arbitraria C può essere aggiunta nel membro di destra di ciascun'equazione. La costante a è maggiore di zero.

Esempio M.14 Integrare le equazioni del moto

Una particella si sta muovendo con una accelerazione costante a . Scrivere una formula per la posizione x al tempo t considerando che la posizione e la velocità al tempo $t = 0$ sono rispettivamente x_0 e v_0 .

■ Impostazione

La velocità v rappresenta la derivata di x rispetto al tempo t , e l'accelerazione è la derivata di v rispetto al tempo t . Si dovrebbe scrivere una funzione $x(t)$ eseguendo due integrazioni.

■ Soluzione

- Integriamo rispetto a t per trovare v in funzione di t . L'accelerazione a può essere portata fuori dal simbolo di integrale dato che è costante:

$$v = \int a dt = at + C_1$$

$$v = at + C_1$$

in cui C_1 rappresenta a moltiplicato per la costante di integrazione.

- La velocità $v = v_0$ per $t = 0$:

$$v_0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0$$

quindi

$$v = v_0 + at$$

- Si integri v rispetto a t per trovare x in funzione di t :

$$x = \int v dt = \int (v_0 + at) dt = \int v_0 dt + \int at dt$$

$$x = v_0 \int dt + a \int t dt = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + C_2$$

in cui C_2 rappresenta la combinazione delle costanti di integrazione.

4. La posizione $x = x_0$ per $t = 0$ è

$$x_0 = 0 + 0 + C_2$$

quindi

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

■ Riflessione

Derivando il risultato ottenuto nel passaggio 4 per due volte rispetto al tempo per ottenere l'accelerazione si ha

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \right) = 0 + v_0 + a t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (v_0 + a t) = a$$

Esercitazioni

29. $\int_3^6 3 \, dx = ?$

30. $V = \int_5^8 \pi r^2 \, dL = ?$

Risposte alle Esercitazioni

- | | |
|---|---|
| 1. 0,24 L | 16. $\approx 2,322$ |
| 2. 31,6 m/s | 17. $V/A = (1/3)r$ |
| 3. 6,0 kg/cm ³ | 18. $A = (2/3)\pi L^2$ |
| 4. -3 | 19. $\sin \theta = 0,496$, $\cos \theta = 0,868$, $\theta = 29,7^\circ$ |
| 5. 1,54 L | 20. $\sin 8,2^\circ = 0,1426$, $8,2^\circ = 0,1431$ rad |
| 6. 3,07 L | 21. 0,996, 0,996 00, circa lo 0% |
| 7. Falso | 22. 0,96, 0,960 77, $\ll 1\%$ |
| 8. $x = (4,5 \text{ m/s})t + 3,0 \text{ m}$ | 23. $-1 + 0i = -1$ |
| 9. $x = 8$, $y = 60$ | 24. $0 + i = i$ |
| 11. $2(x - y)^2$ | 25. $dy/dx = (15/8)x^2 - 24$ |
| 12. $x^2(2x + 4)(x + 3)$ | 26. $dy/dt = ae^{bt}(bt + 1)$ |
| 13. $x^{1/2}$ | 27. 0,693 s |
| 14. x^6 | 28. 51 anni |
| 15. 3 | 29. 9 |
| | 30. $3\pi r^2$ |