DISPENSE DI LABORATORIO DI ASTRONOMIA

Stefano Ciroi
Valentina Cracco

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Università degli Studi di Padova

2014–2015

Indice

1 Diffrazione attraverso una fenditura **5**
- 1.1 Caso dell'apertura rettangolare . . . 10
- 1.2 Caso dell'apertura circolare . . . 12
- 1.3 Seeing . . . 13

2 Diffrazione attraverso due fenditure **17**
- 2.1 Interferometro e interferometria . . . 21

3 Grating **29**
- 3.1 Dispersione . . . 32
- 3.2 Risoluzione . . . 35

4 Spettrografo **39**
- 4.1 Risoluzione spettrale . . . 42
- 4.2 Dispersione e risoluzione . . . 44
- 4.3 Ingrandimento anamorfico . . . 44
- 4.4 Angolo di blaze . . . 46
- 4.5 Grating echelle . . . 50

5 Prisma **55**
- 5.1 Angolo di minima deviazione . . . 57
- 5.2 Dispersione angolare . . . 58
- 5.3 Spettrografo a prisma . . . 59
- 5.4 Risoluzione . . . 61

6 Grism e VPH **63**
- 6.1 Grism . . . 63
- 6.2 Reticolo VPH . . . 66

7 Tecniche spettroscopiche **71**
- 7.1 Longslit . . . 71
- 7.2 Slitless . . . 73
- 7.3 Multiobject . . . 75
- 7.4 Integral–Field . . . 77

8 Filtri fotometrici **81**
- 8.1 Filtri broad–band . . . 82
- 8.2 Filtri narrow–band . . . 86

9 Rivelatori **91**
- 9.1 Lastre fotografiche . . . 91
- 9.2 Charge Coupled Devices . . . 95
  - 9.2.1 Principio di funzionamento . . . 99
  - 9.2.2 CCD front/back-side illuminated . . . 103

10 Fotometria **109**
10.1 Seeing e potere risolutivo 109
10.2 Riduzione di dati fotometrici 111
10.2.1 Sottrazione del bias 111
10.2.2 Sottrazione del dark 113
10.2.3 Correzione per flat-field 113
10.2.4 Correzione per raggi cosmici 114
10.2.5 Calibrazione fotometrica 115

11 Spettroscopia **119**
11.1 Riduzione di dati spettroscopici 120
11.1.1 Sottrazione del bias 120
11.1.2 Correzione per flat–field 120
11.1.3 Correzione per raggi cosmici 122
11.1.4 Calibrazione in lunghezza d'onda 122
11.1.5 Calibrazione fotometrica 123
11.1.6 Sottrazione del cielo 125

12 Esperienze **129**
12.1 Temperatura e colore delle stelle 129
12.2 La classificazione spettrale delle stelle 133
12.3 Fotometria delle stelle 138
12.3.1 Fotometria di apertura 138
12.3.2 Fotometria di PSF 145
12.4 Morfologia di galassie 150

1

Diffrazione attraverso una fenditura

Definiamo **fenditura** un'apertura rettangolare di lunghezza molto maggiore della sua larghezza (Esempio: 50 mm $\times$ 0.1 mm).
Quando un fascio di luce passa attraverso una fenditura stretta si sparpaglia su una certa area. Questo effetto è il più semplice esempio di diffrazione, cioè il fallimento della luce nel viaggiare in linea retta. Come vedremo nel seguito questo può essere spiegato solo assumendo che la luce abbia una natura ondulatoria.

Esistono 2 tipi di diffrazione: la **diffrazione di Fraunhofer** che considera la sorgente all'infinito e la **diffrazione di Fresnel** che considera la sorgente a distanza finita. Delle due, la diffrazione di Fraunhofer è la più semplice da trattare dal punto vista teorico. Nella figura seguente (Fig. 1.1), le due lenti, L_1 e L_2, servono a simulare la condizione per la diffrazione di Fraunhofer.

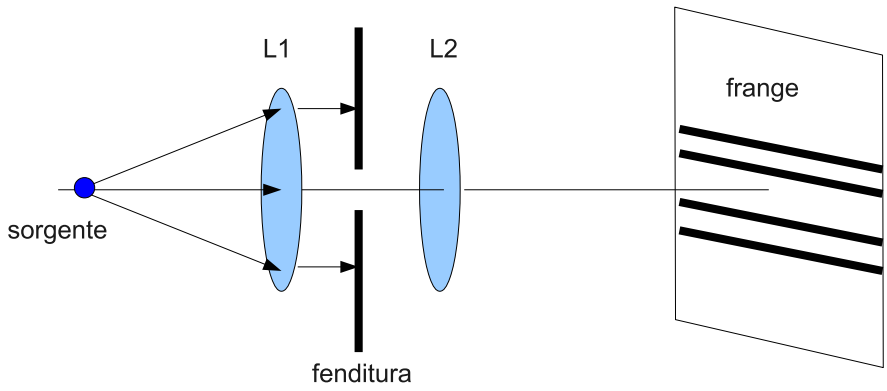


Figura 1.1: Schema ottico per ottenere la diffrazione di Fraunhofer: la lente L_1 funge da collimatore, per cui ponendo la sorgente luminosa nel suo fuoco si ottiene un fascio di raggi paralleli; la lente L_2 serve a mettere a fuoco sullo schermo le frange formate dalla fenditura.

La spiegazione dell'effetto di diffrazione da singola fenditura si basa sul **principio di Huygens**: *i fronti d'onda secondari generati da ogni punto interno alla fenditura interferiscono fra di loro producendo sul rivelatore strisce luminose (dette anche frange) alternate a zone scure.*

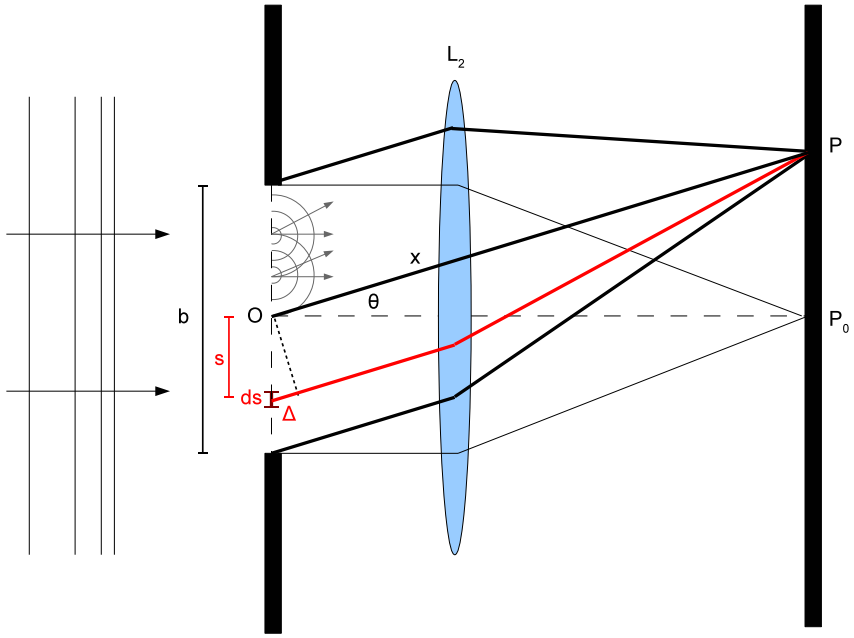


Figura 1.2: Descrizione geometrica dell'interferenza dei raggi luminosi che attraversano una fenditura. Fronti d'onda piani sono trasformati in fronti d'onda sferici che interferiscono dando luogo alle frange. L_2 è la lente che mette a fuoco i raggi sullo schermo.

Consideriamo una fenditura di larghezza b illuminata da fronti d'onda piani (Fig. 1.2). Secondo il principio di Huygens ogni punto della fenditura diventa sorgente di onde sferiche secondarie, le quali raggiungono la superficie di uno schermo o di un rivelatore. Le parti di onde sferiche secondarie che viaggiano in direzione ortogonale al piano della fenditura vanno a fuoco sullo schermo nel punto P_0, mentre quelle che viaggiano ad un angolo ϑ arrivano in posizione P. Sia ds un elemento della fenditura che genera onde sferiche posto a distanza s dal centro della fenditura stessa indicato con O. Le onde dy_s che da ds raggiungono P avranno forma:

$$dy_s = \frac{a\ ds}{x} \sin[\omega t - k(x + \Delta)]$$

dove a è l'ampiezza delle onde emesse, ds la dimensione dell'elemento infinitesimo di fenditura, x la distanza del punto O dallo schermo e infine Δ la differenza di cammino ottico fra il raggio uscente da ds e quello uscente da O, diretti verso P. Come al solito $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ e $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Come si nota in Fig. 1.2, $\Delta = s\ \sin\vartheta$, quindi:

$$dy_s = \frac{a\ ds}{x} \sin[\omega t - k(x + s\ \sin\vartheta)]$$

$$dy_s = \frac{a\ ds}{x}\sin[\omega t - kx - ks\ \sin\vartheta]$$

Se vogliamo conoscere l'effetto complessivo di tutti gli elementi ds compresi fra $-b/2$ e $+b/2$ dobbiamo integrare. In questo caso conviene considerare le coppie simmetriche rispetto ad O e integrare fra 0 e $b/2$.

$$dy = dy_{-s} + dy_s$$

$$dy = \frac{a\ ds}{x}[\sin(\omega t - kx + ks\ \sin\vartheta) + \sin(\omega t - kx - ks\ \sin\vartheta)]$$

Usando la relazione:

$$\sin X + \sin Y = 2\cos\left(\frac{X-Y}{2}\right)\sin\left(\frac{X+Y}{2}\right)$$

si ottiene:

$$dy = \frac{a\ ds}{x}[2\cos(ks\ \sin\vartheta)\sin(\omega t - kx)]$$

Integrando questa quantità si ha:

$$y = \frac{2a}{x}\sin(\omega t - kx)\int_0^{b/2}\cos(ks\ \sin\vartheta)ds$$

$$y = \frac{2a}{x}\sin(\omega t - kx)\left[\frac{\sin(ks\ \sin\vartheta)}{k\ \sin\vartheta}\right]_0^{b/2}$$

$$y = \frac{2a}{x}\sin(\omega t - kx)\frac{\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\vartheta\right)}{k\ \sin\vartheta}$$

Moltiplicando e dividendo per $\frac{b}{2}$:

$$y = \frac{ab}{x}\sin(\omega t - kx)\frac{\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\vartheta\right)}{\frac{kb}{2}\sin\vartheta}$$

$$y = A_0\frac{\sin\beta}{\beta}\sin(\omega t - kx)$$

avendo posto

$$\beta = \frac{kb}{2}\sin\vartheta \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\pi}{\lambda}b\ \sin\vartheta}$$

$$A_0 = \frac{ab}{x}$$

L'intensità della figura di diffrazione sullo schermo sarà data da

$$\boxed{I \approx A^2 = A_0^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}}$$

Se la luce, anziché incidere perpendicolarmente alla fenditura, arriva con un angolo i, l'espressione per β sarà

$$\beta = \frac{\pi b}{\lambda} (\sin i + \sin \vartheta)$$

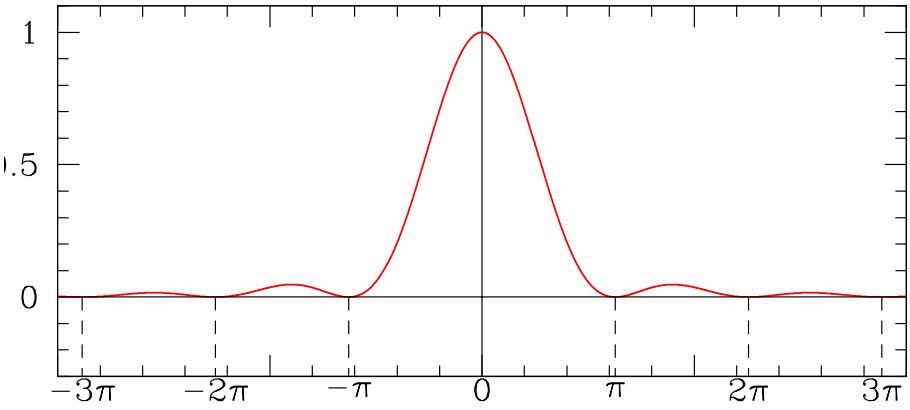


Figura 1.3: Distribuzione di intensità della figura di diffrazione $\sin^2 \beta/\beta^2$. Le linee tratteggiate indicano le posizioni dei minimi.

Si nota che il massimo di intensità della forte banda centrale sta nel punto P_0 dove tutti i fronti d'onda arrivano in fase poiché la differenza di cammino ottico è $\Delta = 0$.

Per $\vartheta = 0$, cioè $\beta = 0$, si ha:

$$\lim_{\beta \to 0} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) = \lim_{\beta \to 0} \left(\frac{\cos \beta}{1} \right) = 1$$

da cui $A = A_0$ e A_0^2 è il valore della intensità massima al centro della figura di diffrazione. A_0 è noto come **massimo principale**, mentre gli altri sono detti **massimi secondari** (Fig. 1.3).

Le posizioni dei **minimi** nella figura di diffrazione si trovano a

$$\beta = m\pi \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Invece, le posizioni dei **massimi** saranno date da

$$\frac{dA}{d\beta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\beta}\left(A_0 \frac{\sin\beta}{\beta}\right) = 0$$

$$A_0 \frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta^2} = 0$$

$$\tan\beta = \beta \qquad \text{per} \quad \beta \neq 0$$

$$\beta = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi$$

Si nota che i massimi secondari non cadono esattamente in mezzo ai punti di minimo, ma risultano spostati verso il centro della figura di una quantità che decresce con il crescere di m. Per determinare le intensità di questi massimi possiamo comunque considerarli nelle posizione intermedie dei minimi, cioè per

$$\beta = \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi, ...$$

$$\frac{\sin^2\beta}{\beta^2} = \frac{4}{9\pi^2},\ \frac{4}{25\pi^2},\ \frac{4}{49\pi^2}, ... \simeq \frac{1}{22},\ \frac{1}{62},\ \frac{1}{122}, ...$$

Come si può notare, già il primo massimo secondario ha un'intensità che è appena il 5% del massimo principale!

La **posizione angolare dei minimi** può essere ottenuta partendo dall'espressione di β e assumendo che ϑ sia piccolo. In questo caso

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} b\ \sin\vartheta \simeq \frac{\pi}{\lambda} b\ \vartheta$$

$$m\pi \simeq \frac{\pi}{\lambda} b\ \vartheta$$

$$\vartheta \simeq m\frac{\lambda}{b}$$

Invece l'estensione della figura di diffrazione sullo schermo sarà proporzionale alla distanza dello schermo dalla fenditura, che sarà praticamente la lunghezza focale f della lente. Per cui la **distanza lineare fra minimi** successivi sarà data da

$$d \simeq m\frac{\lambda}{b}\ f$$

Si nota:

1. la larghezza della figura cresce con la λ: se si usa luce bianca, il massimo centrale è bianco, mentre i bordi esterni sono rossi;

2. la larghezza della figura è inversamente proporzionale alla larghezza b della fenditura: quando la fenditura si allarga la figura rapidamente diminuisce di dimensione.

Inoltre dall'espressione della posizione angolare dei minimi si ha

$$\sin\vartheta = m\frac{\lambda}{b} \leq 1 \Rightarrow m\ \lambda \leq b$$

ossia, se la fenditura è più stretta della lunghezza d'onda della luce incidente non si ha passaggio di luce. Se è larga tanto quanto, la diffrazione è trascurabile. Se è molto più larga, la figura di diffrazione si riduce al massimo centrale.

1.1 Caso dell'apertura rettangolare

Finora abbiamo considerato quello che avviene su un piano ortogonale alla lunghezza della fenditura. Ma la fenditura è un'apertura rettangolare con dimensioni finite ($l \times b$). Se teniamo conto anche dell'altra dimensione, otteniamo una nuova espressione per l'intensità della figura di diffrazione

$$I \simeq b^2 l^2 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\frac{\sin^2\gamma}{\gamma^2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} b\ \sin\vartheta$$

$$\gamma = \frac{\pi}{\lambda} l\ \sin\Omega$$

con ϑ come prima e Ω misurato nella direzione ortogonale a quella di ϑ. Quando $b \sim l$ si ottiene una figura concentrata in due direzioni coincidenti con i lati dell'apertura. A causa della relazione inversa fra larghezza della fenditura e dimensione della figura di diffrazione, le **frange** saranno meno spaziate nella direzione della dimensione maggiore. In Fig. 1.4 ìriportato un caso in cui $b > l$.

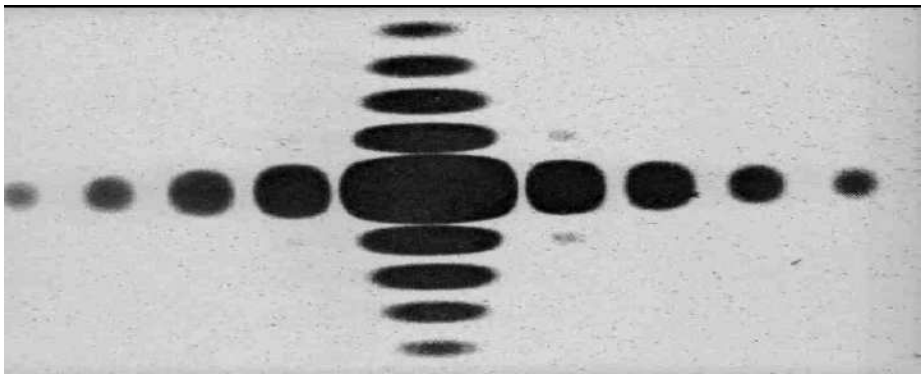


Figura 1.4: Figura di diffrazione ottenuta con un'apertura rettangolare in cui $b > l$.

Nel caso generale in cui la lunghezza è molto maggiore della larghezza,

$$l >> b \Rightarrow \frac{\sin^2\gamma}{\gamma^2} \to 0$$

e quindi la figura di diffrazione si limita alla sola direzione perpendicolare alla fenditura.

Per **potere risolutivo** di un'apertura rettangolare si intende la sua capacità di separare immagini di oggetti molto vicini. È la figura di diffrazione che fissa il limite teorico superiore del potere risolutivo. Le immagini di due oggetti non saranno risolte se la loro separazione è molto minore della larghezza del massimo centrale.
Consideriamo due sorgenti puntiformi vicine, di uguale intensità e con separazione angolare α. Le loro figure di diffrazione siano tali che il massimo principale dell'una cada sul secondo minimo dell'altra e viceversa. La separazione angolare dei due massimi sarà $\beta = 2\pi$, ossia

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} b \ \sin\vartheta \Rightarrow 2\pi = \frac{\pi}{\lambda} b \ \sin\vartheta$$

$$\sin\vartheta = 2\frac{\lambda}{b}$$

$$\vartheta \simeq 2\frac{\lambda}{b}$$

Se avviciniamo le due sorgenti, le figure di diffrazione si avvicinano e l'intensità cresce finché al centro resta un solo massimo (Fig.1.5).

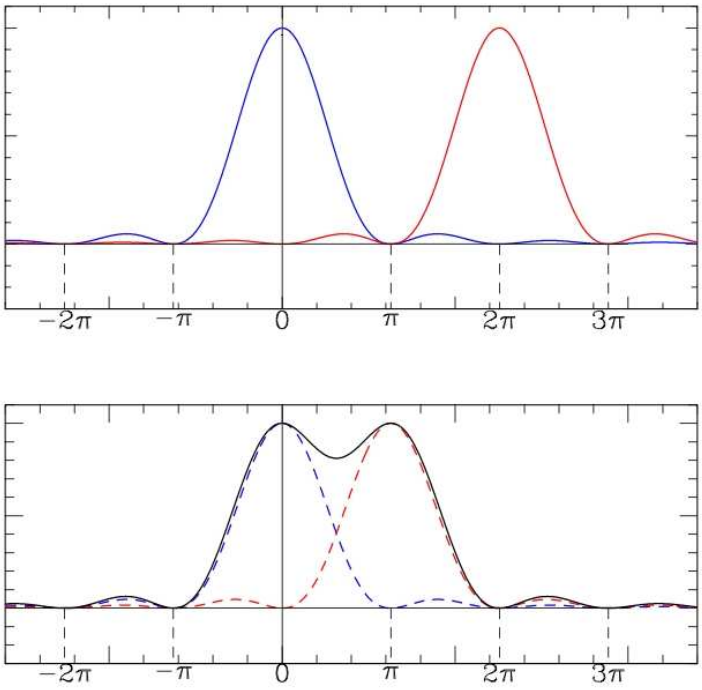


Figura 1.5: In alto: figure di diffrazione di due sorgenti ben separate. In basso: due sorgenti vicine ma ancora distinguibili.

La profondità del minimo al centro della figura risultante dalla sovrapposizione delle due figure di diffrazione, cambia molto rapidamente con la separazione. Quando il massimo di una figura cade in corrispondenza del minimo dell'altra (come in Fig. 1.5 in basso), la figura risultante mostra un minimo per

$$\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} = \frac{4}{\pi^2} \sim 0.4$$

quindi la somma dei contributi in questo punto è circa 0.8. Il minimo si trova all'80% di altezza dei due massimi.
Criterio di Rayleigh $\rightarrow$ (arbitrariamente) la risoluzione angolare è definita dall'espressione

$$\vartheta = \frac{\lambda}{b}$$

ossia, due sorgenti sono risolte quando il massimo della figura dell'una cade sul primo minimo della figura dell'altra.

1.2 Caso dell'apertura circolare

La figura di diffrazione prodotta da onde piane che passano attraverso un'apertura circolare è un problema di difficile soluzione, poiché richiede una doppia integrazione. Il problema è stato risolto da Airy (1835).

La figura di diffrazione consiste in un disco centrale brillante noto come **disco di Airy**, circondato da una serie di anelli più deboli. In pratica la distribuzione dell'intensità è simile a quella che si avrebbe ruotando la figura di diffrazione della fenditura attorno all'asse del massimo principale (Fig.10.1).



Figura 1.6: Immagine di diffrazione attraverso un'apertura circolare: visione tridimensionale (a sinistra) e proiezione sul piano (a destra). I colori sono invertiti.

Per la fenditura abbiamo visto che la posizione angolare dei minimi è data in prima approssimazione dalla relazione

$$\vartheta \simeq m\frac{\lambda}{b} \qquad \text{con } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

mentre per un'apertura circolare m non assume valori interi.

$m_{min} = 1.22, 2.33, 3.24, ...$
$m_{max} = 0, 1.63, 2.68, 3.70, ...$
$I_{max} = 1, 0.0175, 0.0042, 0.0016, ...$

Il caso dell'apertura circolare si applica ovviamente a un telescopio di diametro D e focale F. Immaginiamo di osservare due stelle separate di una certo angolo. Applicando il criterio di Rayleigh possiamo dire che le due sorgenti sono risolte quando sul piano focale il massimo centrale della figura di diffrazione di una delle due stelle cade in corrispondenza del primo anello scuro dell'altra.

Definiamo quindi **potere risolutivo teorico del telescopio** la distanza angolare a cui si trova il raggio del primo anello scuro della figura di diffrazione che si forma sul piano focale. Questo sarà dato da

$$\boxed{\vartheta = 1.22\frac{\lambda}{D}}$$

Il suo valore lineare si otterrà moltiplicando ϑ per la lunghezza focale del telescopio.

È facile vedere che a parità di lunghezza d'onda, il potere risolutivo teorico aumenta con il diametro del telescopio. Quindi telescopi di diametro crescente sono in teoria in grado di separare sorgenti luminose sempre più vicine e mostrare dettagli sempre maggiori.

Supponiamo di avere un telescopio di diametro D = 1 m e focale F = 5 m, alla lunghezza d'onda visibile $\lambda = 5500$ Å, il potere risolutivo è $\vartheta = 0.14''$ e $\vartheta' = \vartheta \times F = 3.3$ μm.

1.3 Seeing

Il **seeing** è una misura della risoluzione angolare reale dettata dalle condizioni di turbolenza della nostra atmosfera che causano un forte degrado della qualità delle immagini astronomiche. La luce si propaga indisturbata nello spazio sottoforma di fronti d'onda piani, che al momento di entrare nell'atmosfera della Terra incontrano vortici di varie dimensioni che causano cambiamenti locali e imprevedibili dell'indice di rifrazione dell'aria.
Questi cambiamenti spaccano il fronte d'onda in elementi non perturbati di dimensione r_0 (**parametro di Fried**), che dipende principalmente da $\lambda^{6/5}$, ma anche dalla distanza zenitale z di osservazione e dal percorso della luce attraverso l'atmosfera (Fig.1.7):

$$r_0 = 0.185\ \lambda^{\frac{6}{5}} (\cos z)^{\frac{3}{5}} \left(\int C_n^2(h) dh \right)^{-\frac{3}{5}} \qquad [\text{m}]$$

dove C_n^2 si chiama **parametro di struttura dell'indice di rifrazione** e dipende dalla pressione, dalla temperatura e della quota. Nel visibile r_0 è dell'ordine di 10 cm.

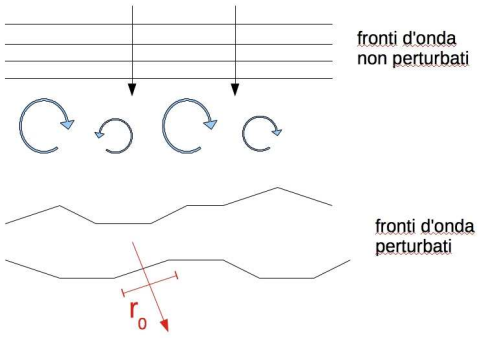


Figura 1.7: Ogni fronte d'onda piano viene spezzato in parti non perturbate di dimensione r_0 per effetto dei vortici locali.

In sostanza la figura di diffrazione è dominata dalla dimensione di r_0. Maggiore è r_0 e migliore è il seeing, che è espresso in unità di secondi d'arco e viene stimato sulla base del diametro angolare apparente delle sorgenti stellari, in quanto sorgenti puntiformi. Tipici valori misurati in osservatori professionali vanno da $0.5''$ per i luoghi migliori, a $2''$ per per quelli peggiori.

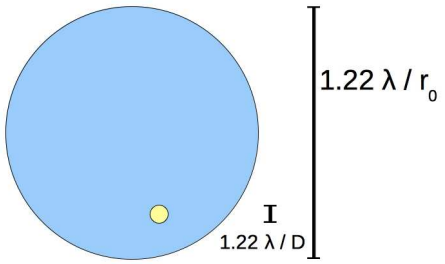


Figura 1.8: Confronto approssimativo fra il disco di Airy di un telescopio di 1.5 m (in giallo) e un disco di seeing da $1.3''$ (in azzurro).

Il seeing è caratterizzato da 3 effetti:

1) allargamento

$$\text{FWHM} = 1.035\frac{\lambda}{r_0} = 5.6\ \lambda^{-\frac{1}{5}}(\cos z)^{-\frac{3}{5}}\left(\int C_n^2(h)dh\right)^{\frac{3}{5}} \quad [\text{rad}]$$

dove FWHM = Full Width at Half Maximum è la larghezza a metà altezza della funzione di Gauss che descrive la distribuzione di intensità di una stella e corrisponde di fatto al diametro del disco di seeing. È evidente che a parità di lunghezza d'onda, tanto maggiore è r_0, tanto più piccolo sarà il disco di seeing e migliore la qualità dei dati raccolti dal telescopio. Inoltre la dipendenza dalla distanza zenitale indica che il seeing cambia

a seconda dell'altezza sull'orizzonte degli oggetti che stiamo osservando. In particolare, il disco di seeing diventa più grande quando un oggetto si abbassa sull'orizzonte.

2) agitazione

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 0.18\ D^{-\frac{1}{3}} r_0^{-\frac{5}{3}}$$

dove D è il diametro del telescopio. Il moto dell'immagine attorno ad una posizione media è tanto minore quanto maggiore è r_0, cioè quanto migliore è il seeing. Inoltre è più evidente nei telescopi di piccolo diametro.

3) scintillazione

$$\frac{\sigma_I^2}{I^2} \propto D^{-\frac{7}{3}} (\cos z)^{-3} \int C_n^2(h) h^2 dh$$

nel caso di telescopi di grande diametro,

$$\frac{\sigma_I^2}{I^2} = 19.12\ \lambda^{-7/6} (\cos z)^{-\frac{11}{6}} \int C_n^2(h) h^{\frac{5}{6}} dh$$

nel caso di piccoli telescopi.

In Fig. 1.9 è possibile osservare un confronto fra un'immagine presa da Terra e una dallo spazio. L'immagine di sinistra è ottenuta con un telescopio di 6 m di diametro, il cui potere risolutivo teorico dato dal limite di diffrazione è $0.02''$, in condizioni di seeing pari a $1.5''$. A destra la stessa area di cielo osservata dal Telescopio Spaziale Hubble, di diametro 2.4 m e potere risolutivo teorico pari a $0.06''$. Mentre HST lavora vicino al suo limite di diffrazione, il telescopio a terra si trova in condizioni dieci volte peggiori. È evidente il degrado di qualità nell'immagine con la diminuzione dei dettagli visibili e con la dilatazione dei diametri apparenti delle stelle.
Il vantaggio del telescopio da terra sta ovviamente nel suo maggior diametro che consente di raccogliere molta più luce in minor tempo e quindi osservare sorgenti più deboli.

In Fig. 1.10 è visibile un ingrandimento di una zona estratto dalle immagini precedenti. A destra una coppia di stelle con una separazione angolare di $1.2''$ nettamente risolte da HST. A sinistra le stesse stelle osservate con il telescopio a terra, il seeing di $1.5''$ limita le capacità del telescopio che vede praticamente un'unica sorgente luminosa.

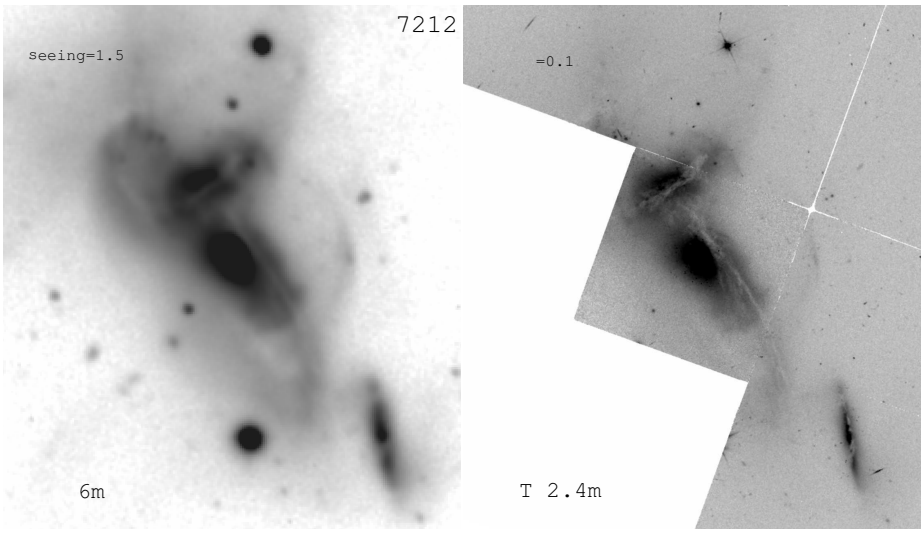


Figura 1.9: Confronto fra un'immagine di un gruppo di galassie presa da Terra (a sinistra) e dallo spazio (a destra). L'immagine ottenuta da Terra sembra sfuocata e mostra molti meno dettagli nonostante sia stata ottenuta con un telescopio di dimensioni maggiori.

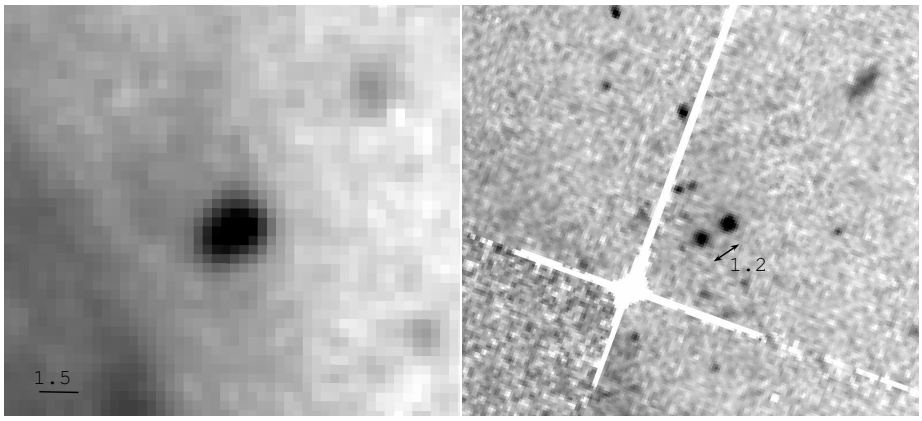


Figura 1.10: Effetto del seeing sulla risoluzione spaziale. A destra si vedono due stelle ben definite e nettamente separate, a sinistra le due stelle diventano una sola sorgente a causa del seeing.

2

Diffrazione attraverso due fenditure

Consideriamo due fenditure, simmetriche rispetto ad un'origine O, di larghezza b e spaziate in modo che i loro centri si trovino a distanza $\pm d/2$ da O (Fig. 2.1). Se c è la dimensione della zona compresa fra le due fenditure, potremo dire che

$$d = c + b$$

$$ds \in \left[\frac{c}{2}, \frac{c}{2} + b\right] = \left[\frac{d-b}{2}, \frac{d+b}{2}\right]$$

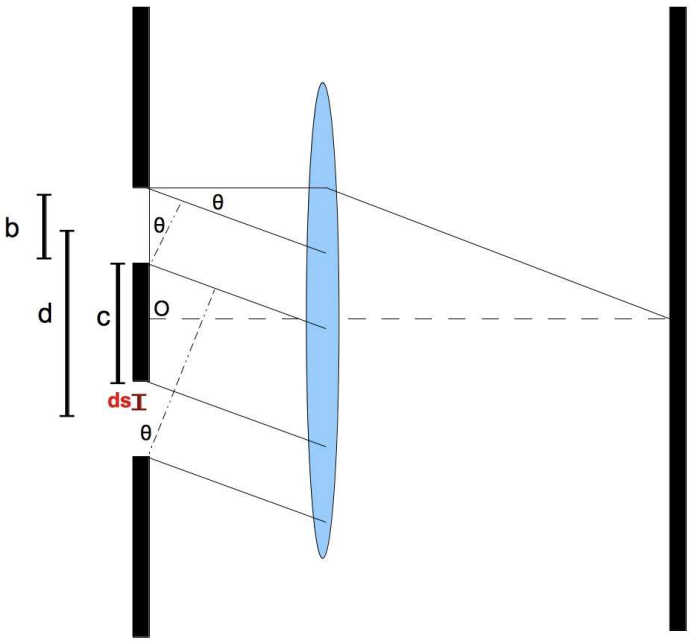


Figura 2.1: Diffrazione attraverso due fenditure di pari larghezza b e separate da una distanza d.

Riprendendo il formalismo utilizzato per la singola fenditura, dovremo integrare il contributo dell'elemento ds fra $(d-b)/2$ e $(d+b)/2$.

$$dy = \frac{a\ ds}{x}\left[2\ \cos(ks\ \sin\vartheta)\ \sin(\omega t - kx)\right]$$

$$y = \frac{2a}{x}\sin(\omega t - kx)\int_{\frac{d-b}{2}}^{\frac{d+b}{2}} \cos(ks\ \sin\vartheta)ds$$

$$y = \frac{2a}{x}\sin(\omega t - kx)\left[\frac{\sin(ks\ \sin\vartheta)}{k\ \sin\vartheta}\right]_{\frac{d-b}{2}}^{\frac{d+b}{2}}$$

$$y = \frac{2a}{xk\ \sin\vartheta}\sin(\omega t - kx)\left[\sin\left(k\frac{d+b}{2}\sin\vartheta\right) - \sin\left(k\frac{d-b}{2}\sin\vartheta\right)\right]$$

$$y = \frac{2a}{xk\ \sin\vartheta}\sin(\omega t - kx)\left[\sin\left(k\frac{d}{2}\sin\vartheta + k\frac{b}{2}\sin\vartheta\right) - \sin\left(k\frac{d}{2}\sin\vartheta - k\frac{b}{2}\sin\vartheta\right)\right]$$

Sapendo che:

$$\sin(X+Y) - \sin(X-Y) = 2\ \cos X\ \sin Y$$

possiamo scrivere:

$$y = \frac{2a}{xk\ \sin\vartheta}\sin(\omega t - kx)\ 2\ \cos\left(k\frac{d}{2}\sin\vartheta\right)\ \sin\left(k\frac{b}{2}\sin\vartheta\right)$$

e dopo aver posto

$$\beta = k\frac{b}{2}\sin\vartheta \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\pi}{\lambda}b\ \sin\vartheta}$$

$$\gamma = k\frac{d}{2}\sin\vartheta \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\pi}{\lambda}d\ \sin\vartheta}$$

otteniamo, moltiplicando e dividendo per b:

$$y = \frac{ab}{x}\left(\frac{2}{kb\ \sin\vartheta}\right)\sin(\omega t - kx)\ 2\ \cos\gamma\ \sin\beta$$

$$y = 2A_0\frac{sin\beta}{\beta}\cos\gamma\ \sin(\omega t - kx)$$

dove $A_0 = \frac{ab}{x}$, come nella singola fenditura.

Infine, passando all'espressione dell'intensità, si ottiene:

$$\boxed{I = 4A_0^2\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\cos^2\gamma}$$

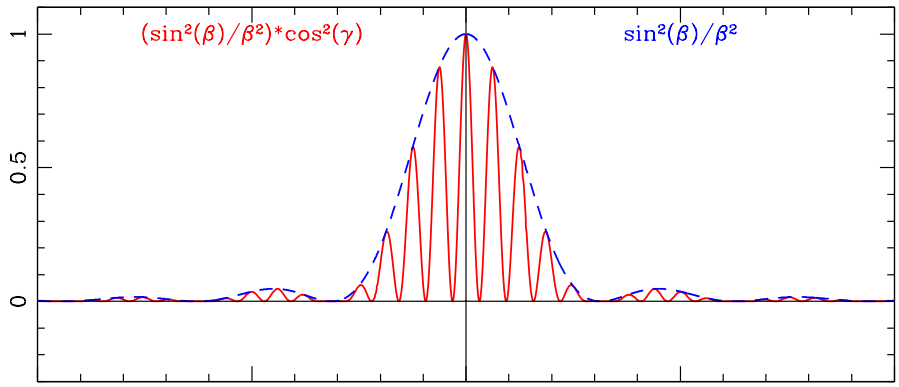


Figura 2.2: Diffrazione da doppia fenditura. L'intensità delle frange (in rosso) è modulata dalla figura di diffrazione della singola fenditura (in blu).

dove il termine $\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$ rappresenta la diffrazione da singola fenditura, mentre $\cos^2\gamma$ è il termine di interferenza prodotta da due fasci di luce di uguale intensità, ma con differenza di fase (Fig. 2.2).
Si noti bene: i termini β e γ non sono indipendenti! Infatti, la differenza di cammino ottico fra i due bordi di una fenditura vale $b\ \sin\vartheta$, quindi la differenza di fase vale

$$kb\ \sin\vartheta = \frac{2\pi}{\lambda} b\ \sin\vartheta = 2\beta$$

Ma la differenza di fase fra punti corrispondenti nelle due fenditure sarà:

$$\frac{2\pi}{\lambda} d\ \sin\vartheta = 2\gamma$$

da cui si ottiene la relazione fra β e γ

$$\boxed{\frac{\gamma}{\beta} = \frac{d}{b}}$$

In sintesi: con due fenditure si ottiene una figura che combina l'**interferenza** fra raggi provenienti da punti corrispondenti delle due fenditure, con la **diffrazione** che determina la quantità di luce emergente dalle fenditure ad una dato angolo ϑ.
Si noti che la diffrazione è il risultato dell'interferenza di onde secondarie, per cui è essa stessa una figura di interferenza.

Le posizioni dei **minimi** nella figura di interferenza saranno date da:

$$\cos\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

e sostituendo l'espressione di γ:

$$\frac{\pi}{\lambda} d \ \sin\vartheta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\boxed{d \ \sin\vartheta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}$$

Ma anche il termine di diffrazione produce dei minimi, per cui:

$$\sin\beta = 0 \Rightarrow \beta = p\pi \quad p = \pm 1, \pm 2, ...$$

$$\frac{\pi}{\lambda} b \ \sin\vartheta = p\pi$$

$$\boxed{b \ \sin\vartheta = p\lambda}$$

Determinare l'esatta posizione dei **massimi** non è cosa semplice.
Ma in prima approssimazione possiamo considerare il caso di fenditure molto strette, in modo tale che la figura di diffrazione diventi larga abbastanza da poter considerare determinante solo il termine $\cos^2\gamma$. In questo caso:

$$\cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = m\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$\boxed{d \ \sin\vartheta = m\lambda}$$

Il termine m è chiamato **ordine di interferenza**. Il termine $m\lambda$ indica il numero di lunghezze d'onda corrispondenti alla differenza di cammino ottico fra punti corrispondenti nelle due fenditure.
Si nota che vi sono alcuni **massimi mancanti**, i cosiddetti **missing orders** (Fig. 2.3). Questa condizione si ha quando un massimo di interferenza coincide con un minimo di diffrazione, cioè quando:

$$\begin{cases} d \ \sin\vartheta = m\lambda \\ b \ \sin\vartheta = p\lambda \end{cases}$$

da cui:

$$\frac{d}{b} = \frac{m}{p}$$

Per $d/b = 2$ mancano gli ordini $m = 2, 4, 6, ...$, per $d/b = 3$, mancano gli $m = 3, 6, 9, ...$ e così via.

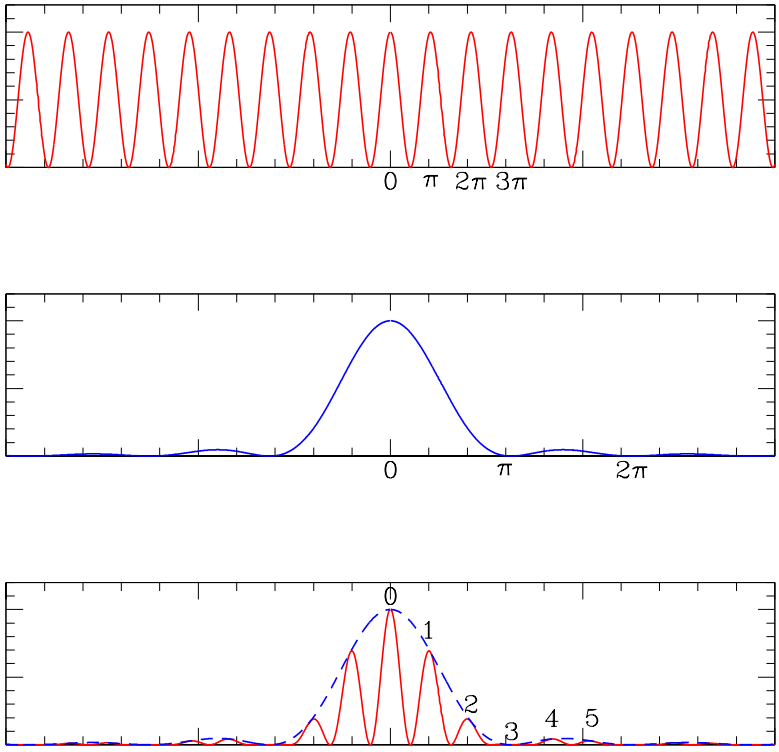


Figura 2.3: La combinazione di figura di interferenza (in alto) con figura di diffrazione (al centro) causa i missing order (in basso). In questo caso mancano gli ordini 3, 6, ecc.

2.1 Interferometro e interferometria

Consideriamo ora due stelle di pari intensità e con separazione angolare α. Se facciamo passare la loro luce attraverso due fenditure di larghezza b e separazione d, si formeranno due figure di interferenza sovrapposte. In particolare, i massimi delle due figure di interferenza saranno separati di una certa quantità pari allo stesso angolo α.
In approssimazione di angoli piccoli, la distanza angolare fra due frange successive è pari a $\vartheta \sim \frac{\lambda}{d}$. Considerando solo il termine di interferenza, $\cos^2\gamma$, e mettendoci nell'ipotesi in cui $\alpha < \frac{\lambda}{d}$, cioè nell'ipotesi in cui la separazione fra le due figure di interferenza è minore della distanza fra due massimi consecutivi, la figura risultante sembra ancora un $\cos^2\gamma$, ma con l'intensità che non va a zero ai minimi (Fig. 2.4).
Michelson definì **visibilità delle frange**, la quantità ν_M:

$$\nu_M = \frac{max - min}{min + max}$$

che in pratica equivale a calcolare il rapporto fra l'intesità massima delle frange rispetto alla loro intensità media, e l'intensità media.

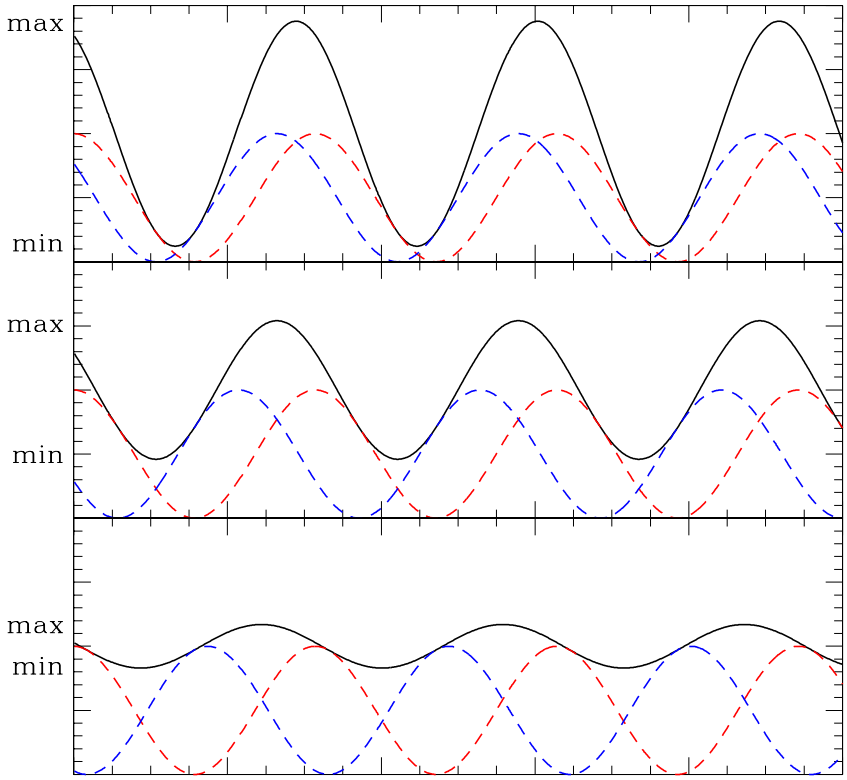


Figura 2.4: Figure di interferenza di due sorgenti di pari intensità separate di un angolo $\alpha < \lambda/d$. L'angolo α è crescente dall'alto verso il basso. La visibilità delle frange diminuisce dall'alto verso il basso.

Si vede che la visibilità è pari a 1 quando l'intensità minima delle frange va a zero, cioè quando $\alpha \ll \frac{\lambda}{d}$ e le due sorgenti risultano non risolte. Quando $\alpha < \frac{\lambda}{d}$, le due sorgenti sono parzialmente risolte, e infine quando α è tale che il massimo di interferenza di una figura coincide con il minimo dell'altra, le frange spariscono e le due sorgenti sono risolte. Questo accade quando:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{d}, \ \frac{3}{2}\frac{\lambda}{d}, \ \frac{5}{2}\frac{\lambda}{d}, \ldots}$$

In altri termini, distanziando le fenditure fino a far sparire le frange di interferenza, si può misurare la separazione angolare α fra le due stelle. Questa tecnica è nota come interferometria e la quantità $\frac{\lambda}{2d}$ è chiamata **potere risolutivo dell'interferometro**.

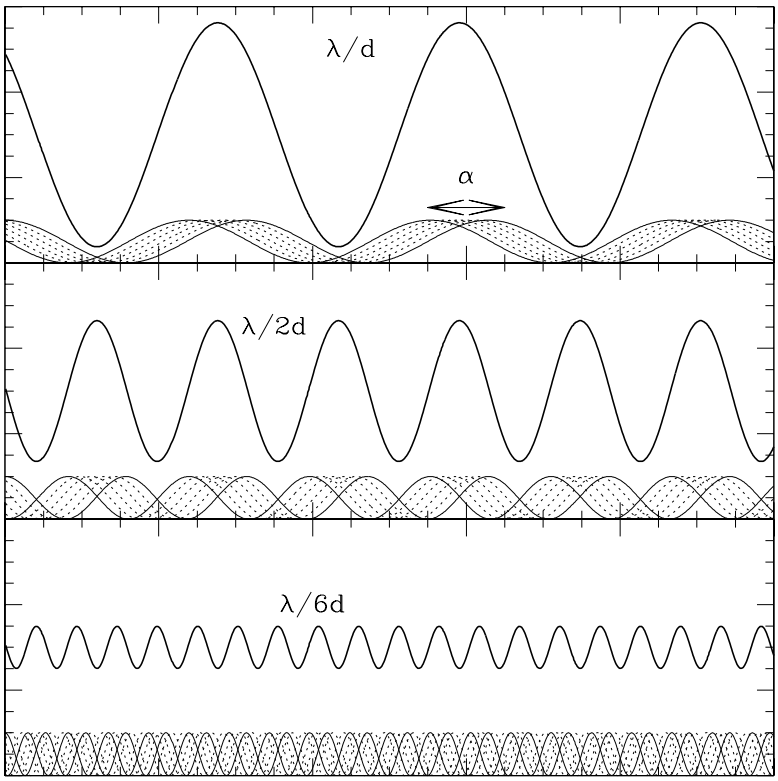


Figura 2.5: Figure di interferenza di una sorgente di dimensione $\alpha < \lambda/d$. Dall'alto verso il basso aumenta la distanza fra le due fenditure.

Lo stesso ragionamento è applicabile ad un'unica sorgente di cui si voglia misurare la dimensione angolare (Fig. 2.5), per esempio il diametro di una stella. Finché $\alpha \ll \lambda/d$, l'interferometro produce delle frange con visibilità pari a 1. Ma se aumentiamo il potere risolutivo dello strumento, distanziando le due fenditure, allora sarà prima $\alpha < \lambda/d$ e poi $\alpha \sim \lambda/d$, e la visibilità delle frange tenderà a zero. In Fig. 2.5 la distanza fra le fenditure diventa il doppio (pannello centrale) e poi sei volte tanto (pannello in basso).

Immaginiamo adesso di prendere il Sole e di mandarlo a una distanza di 1 pc da noi. Il Sole apparirà come una stella brillante di magnitudine apparente circa -0.2. Il raggio del Sole, che vale circa $R_\odot \sim 7 \times 10^5$ km, verrà visto sotto un angolo:

$$\theta_\odot = \frac{7 \times 10^5 \text{ km}}{3.09 \times 10^{13} \text{ km}} = 2.27 \times 10^{-8} \text{ rad} = 0.0047''$$

Supponiamo di essere in assenza di seeing e in assenza di aberrazioni ottiche. Che diametro minimo dovrà avere un telescopio per poter risolvere il Sole a quella distanza? Sappiamo che il potere risolutivo teorico corrisponde al raggio del disco di Airy e vale $1.22\frac{\lambda}{D}$, dove D è il diametro del telescopio. Se imponiamo che questa quantità sia pari al raggio del Sole a distanza di 1 pc da noi, otteniamo:

$$D = 1.22\frac{\lambda}{\theta_\odot} = 1.22\ \frac{5 \times 10^{-7} \text{ m}}{2.27 \times 10^{-8} \text{ rad}} \sim 27 \text{ m}$$

avendo posto $\lambda = 5000$ Å.
Si vede quindi che serve come minimo un telescopio di 27 m di diametro.

Invece, utilizzando un interferometro come quello di Michelson, quanto dovranno essere separate le due fenditure per poter misurare il diametro angolare del Sole a distanza di 1 pc da noi? Si utilizza l'espressione del potere risolutivo dell'interferometro e si ottiene:

$$d = \frac{\lambda}{2 \times (2\theta_\odot)} = \frac{5 \times 10^{-7} \text{ m}}{2 \times (4.54 \times 10^{-8} \text{ rad})} = 5.5 \text{ m}$$

È chiaro quindi che con un interferometro siamo in grado di misurare dimensioni angolari inferiori al potere risolutivo teorico di un singolo telescopio, alle volte anche molto inferiori.

Uno dei primi utilizzi dell'interferometria ottica si ebbe con la costruzione dell'**interferometro stellare di Michelson** (Fig. 2.6) che fu montato al telescopio di 2.5 m di Mount Wilson e permise di ottenere per la prima volta il diametro angolare della gigante rossa Betelgeuse (Fig. 2.7, 13 Dicembre 1920).

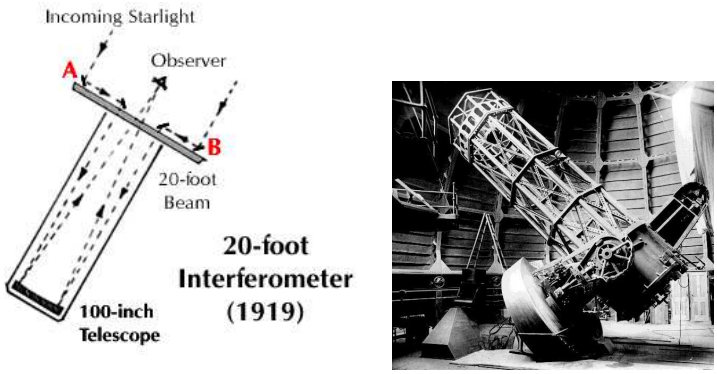


Figura 2.6: A sinistra, schema ottico dell'interferometro che Michelson applicò al telescopio Hooker di 2.5 m. Le lettere A e B indicano i due specchietti mobili, la cui distanza dal centro poteva essere variata. A destra il telescopio Hooker del Mount Wilson Observatory.

MEASUREMENT OF THE DIAMETER OF α ORIONIS WITH THE INTERFEROMETER[1]

By A. A. MICHELSON and F. G. PEASE

Assuming that the effective wave-length for α Orionis is λ 5750, its angular diameter from the formula $\alpha = 1.22\ \lambda/b$ proves to be 0″.047; and with a parallax[1] of 0″.018 its linear diameter turns out to be 240×10^6 miles, or slightly less than that of the orbit of Mars. This value corresponds to a uniformly illuminated disk, while for one darkened at the limb, this result, as mentioned above, would be increased by about 17 per cent. The uncertainty of the measurement of the angular diameter is about 10 per cent.

Figura 2.7: Estratto dell'articolo pubblicato da Michelson e Pease nel 1921 (Astrophysical Journal, v. 53, p. 249)

Al posto dell'interferometro stellare di Michelson, si può fare uso di una coppia di telescopi posti a una certa distanza (Fig. 2.8). Più è grande questa distanza, chiamata **baseline**, maggiore sarà il potere risolutivo dell'interferometro.

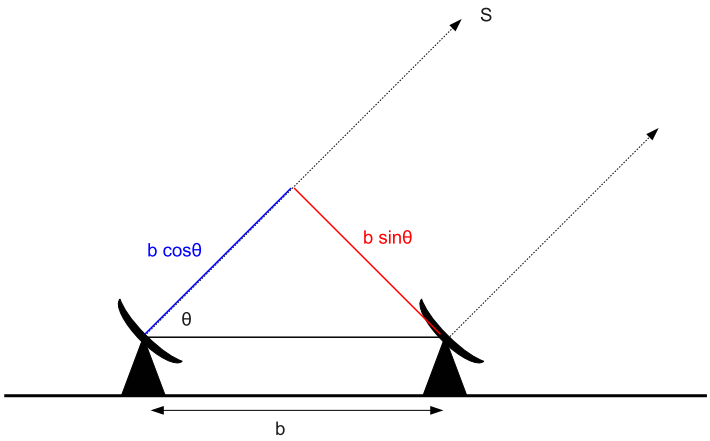


Figura 2.8: Schema di un interferometro costituito da due telescopi fissi posti a distanza b.

Diversamente dal caso precedente, quando una stessa sorgente S viene osservata con due telescopi a distanza b e sotto un angolo ϑ, i fronti d'onda piani raggiungono prima un telescopio e poi l'altro. Questo causa un ritardo di fase, legato a un diverso cammino ottico, $b\ \cos\vartheta$, che deve essere compensato. Per una data posizione in cielo della sorgente, si formeranno le frange, e se la sorgente è estesa si potrà studiare la visibilità delle frange al variare della posizione in cielo, sfruttando cioè la rotazione della Terra. Infatti, al variare di ϑ, varia anche la **baseline proiettata**, $b\ \sin\vartheta$. Osservazioni ripetute dello stesso oggetto con

baseline diverse consentono di interpolare i dati con un modello ed estrapolare il valore angolare corrispondente alla visibilità zero (Fig. 2.9).

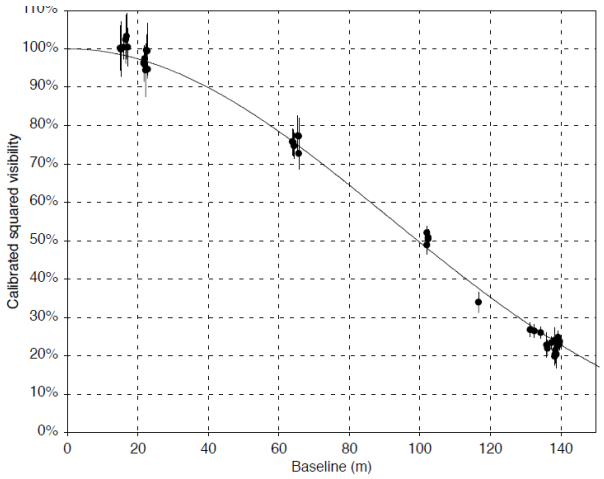


Figura 2.9: Grafico della visibilità in funzione della baseline per la stella δ Eri. I dati sono stati ottenuti con lo strumento VINCI del Very Large Telescope Interferometer (Thévenin et al. 2005, A&A 436, 253).

Abbiamo detto in precedenza che il raggio del disco di Airy cresce con la lunghezza d'onda.
Se consideriamo un telescopio di diametro 10 m, nel visibile (ad esempio $\lambda = 5500$ Å) il suo potere risolutivo è di circa $0.014''$, ma nel radio, per esempio a $\lambda = 10 - 20$ cm, il potere risolutivo sale a circa 1°. Si possono costruire singoli radiotelescopi di dimensioni notevoli (chiamati "single dish"), come lo storico Parkes di 64 m in Australia, l'antenna di 100 m a Effelsberg (Germania), il radiotelescopio di Arecibo (Porto Rico) da oltre 300 m, oppure il RATAN da 600 m in Russia. Ma nella maggior parte dei casi, i radiotelescopi sono un insieme di antenne di dimensioni relativamente ridotte che sfruttano il vantaggio dell'interferometria. Un esempio famoso è il Very Large Array (VLA) nel New Mexico, che consiste di 27 antenne da 25 m ciascuna, movibili e disposte a forma di Y. Il potere risolutivo di questo radiotelescopio raggiunge i centesimi di secondo d'arco. Esempi più recenti sono lo Square Kilometer Array (SKA) in Australia e Sud Africa, attualmente in costruzione, e l'Atacama Large Millimeter/sub–millimeter Array (ALMA), costruito da ESO sulle Ande cilene e operativo da poco. Esso consiste di 66 antenne da 12 m (Fig. 2.10).
La ragione per cui si utilizzano più antenne, anziché due a grande distanza, non è solo legata al fatto che maggiore è la superficie totale dei collettori di luce, più forte è il segnale raccolto, ma anche alla possibilità di ricostruire l'immagine della sorgente osservata (Fig. 2.11). Infatti, un interferometro costituito da una coppia di telescopi fornisce risoluzione spaziale/angolare solo nella direzione parallela alla baseline, non fornisce alcuna immagine. Ma se la sorgente osservata è estesa, diventa interessante riuscire a ricostruirne la forma e studiarne la distribuzione di energia in due dimensioni, anziché una soltanto.
In teoria sarebbe necessario osservare con un elevato numero di baseline di varia lunghezza e orientazioni, in modo da coprire completamente il cosiddetto **piano**



Figura 2.10: Immagine del radiotelescopio ALMA.

(u,v) (dove u corrisponde alla direzione est-ovest e v alla direzione nord-sud) e ottenere così l'informazione equivalente all'immagine di un telescopio di diametro pari alla massima baseline. Questo metodo si chiama **aperture synthesis** ed è ovviamente molto dispendioso in termini di tempo di osservazione. Ma negli anni '50 e '60 un gruppo di radioastronomi australiani e inglesi scoprirono che combinando antenne mobili con la rotazione della Terra era sufficiente un numero di limitato di osservazioni per ricostruire un'immagine ad alta risoluzione spaziale attraverso l'uso di algoritmi di deconvoluzione e le trasformate di Fourier. La tecnica di "aperture synthesis" è nota anche come **Fourier synthesis**.

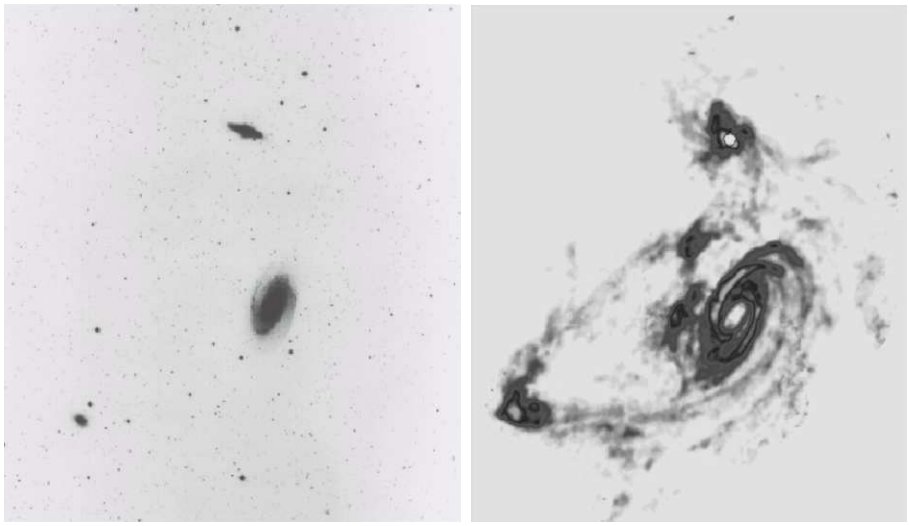


Figura 2.11: Confronto fra un'immagine in luce visibile del gruppo di M81 (a sinistra) e un'immagine radio in H I a 21 cm (a destra).

3
Grating

Se da 2 fenditure passiamo ad un numero N molto elevato otteniamo il cosiddetto **reticolo di diffrazione** o **grating**. Quale sarà la distribuzione di intensità della figura di interferenza del grating? Per determinarla è conveniente considerare l'espressione dell'onda nella forma complessa:

$$f(x) = a\ e^{i(\omega t - kx)}$$

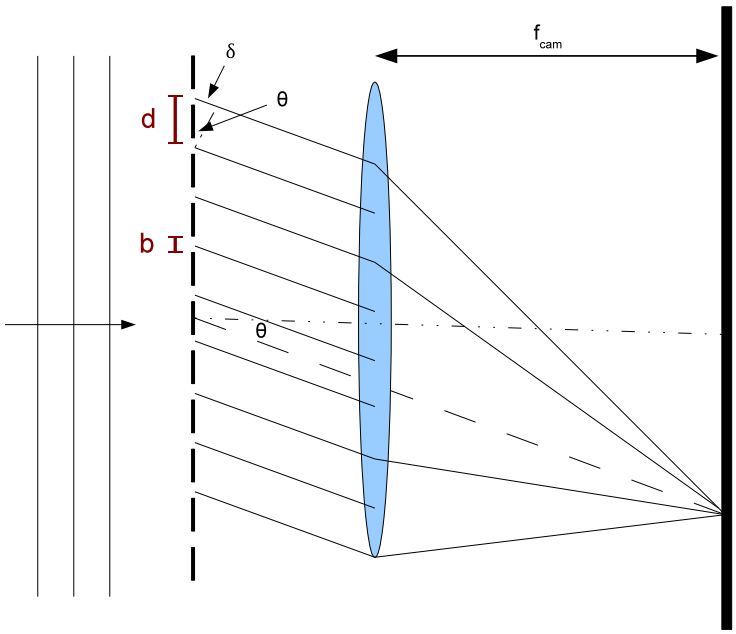


Figura 3.1: Caso delle N fenditure: b è la larghezza di ogni fenditura, d la distanza fra due fenditure consecutive, ϑ una qualunque direzione di propagazione delle onde uscenti dal reticolo, δ la differenza di cammino ottico fra due onde consecutive e infine f_{cam} la lunghezza focale della lente di camera che focalizza l'immagine sullo schermo.

Se indichiamo con δ la differenza di cammino ottico fra due fenditure consecutive (Fig. 3.1), abbiamo:

$$f(x) = a\ e^{i[\omega t - k(x+\delta)]} = a\ e^{-ik\delta}\ e^{i(\omega t - kx)}$$

L'ampiezza dell'onda ottenuta dall'interferenza di N contributi avrà un'espressione complessa data da:

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} a\ e^{-ink\delta} = a[1 + e^{-ik\delta} + e^{-i2k\delta} + ... + e^{-i(N-1)k\delta}]$$

Moltiplicando e dividendo per $1 - e^{-ik\delta}$, si ha:

$$A = a\frac{1 - e^{-iNk\delta}}{1 - e^{-ik\delta}}$$

Per passare all'intensità si deve moltiplicare per il complesso coniugato. Per cui si ottiene:

$$A^2 = a^2 \left(\frac{1 - e^{-iNk\delta}}{1 - e^{-ik\delta}}\right)\left(\frac{1 - e^{iNk\delta}}{1 - e^{ik\delta}}\right)$$

$$A^2 = a^2\frac{1 - e^{-iNk\delta} - e^{iNk\delta} + 1}{1 - e^{-ik\delta} - e^{ik\delta} + 1}$$

$$A^2 = a^2\frac{2 - \cos(Nk\delta) + i\sin(Nk\delta) - \cos(Nk\delta) - i\sin(Nk\delta)}{2 - \cos(k\delta) + i\sin(k\delta) - \cos(k\delta) - i\sin(k\delta)}$$

$$A^2 = a^2\frac{1 - \cos(Nk\delta)}{1 - \cos(k\delta)}$$

E sapendo che $\delta = d\sin\vartheta$, si ottiene:

$$A^2 = a^2\frac{1 - \cos\left(N\dfrac{2\pi}{\lambda}d\sin\vartheta\right)}{1 - \cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}d\sin\vartheta\right)} = a^2\frac{1 - \cos(2N\gamma)}{1 - \cos(2\gamma)} = a^2\frac{\sin^2(N\gamma)}{\sin^2\gamma}$$

Essendo a^2 l'intensità diffratta da una singola fenditura, possiamo scrivere l'espressione finale come:

$$\boxed{I = A_0^2\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\frac{\sin^2(N\gamma)}{\sin^2\gamma}}$$

dove $\dfrac{\sin^2(N\gamma)}{\sin^2\gamma}$ è il termine di **interferenza** fra N fenditure.

Si nota che per N = 1 si ottiene l'intensità della figura di diffrazione, mentre per N = 2 il termine di interferenza diventa $4\cos^2\gamma$.
Determiniamo le posizioni dei **massimi** di questa figura (Fig. 3.2).
Poiché N è un valore intero:

$$\sin^2(N\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$$

ma anche il termine $\sin^2\gamma$ va a zero per gli stessi valori, quindi:

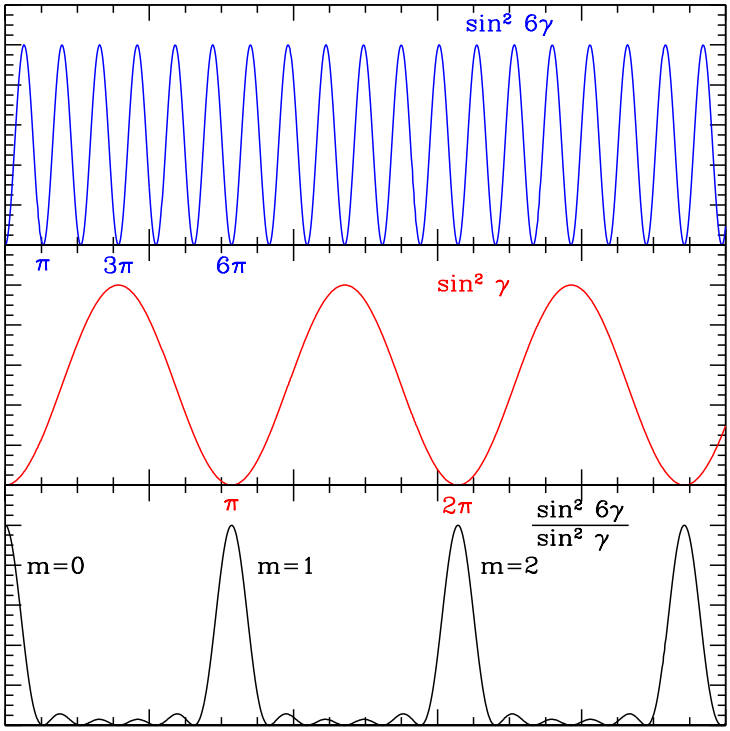


Figura 3.2: Il risultato del rapporto (in basso) fra il termine $\sin^2(N\gamma)$ (in alto) e il termine $\sin^2\gamma$ (in mezzo) per N=6.

$$\lim_{\gamma\to m\pi}\left[\frac{\sin(N\gamma)}{\sin\gamma}\right]=\lim_{\gamma\to m\pi}\left[\frac{N\cos(N\gamma)}{\cos\gamma}\right]=\pm N$$

cioè il termine di interferenza produce dei **massimi principali** di valore N^2 per

$$\frac{\pi}{\lambda}d\sin\vartheta=m\pi\quad\Rightarrow\quad d\sin\vartheta=m\lambda\qquad m=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$$

Per un fascio di luce monocromatica che incide con angolo $i\neq 0$ rispetto alla normale al piano delle fenditure, possiamo scrivere l'**equazione generale del grating**:

$$\boxed{d(\sin i+\sin\vartheta)=m\lambda}$$

Le intensità dei massimi principali, anche detti **righe spettrali**, sarà limitata e modulata dalla figura di diffrazione relativa alla singola fenditura.

Le posizioni dei **minimi** invece si hanno quando solamente il numeratore del termine di interferenza va a zero, cioè quando:

$$N\gamma=p\pi\qquad p\neq 0,\pm N,\pm 2N,\pm 3N,...$$

$$\gamma = \frac{p}{N}\pi \Rightarrow d\sin\vartheta = \frac{\lambda}{N}, \frac{2}{N}\lambda, \frac{3}{N}\lambda, ... = \frac{p}{N}\lambda$$

Esistono poi i **massimi secondari**, molto più deboli dei massimi principali e che sembrano quelli della figura di diffrazione da singola fenditura.

$$f(\lambda) = \frac{\sin(N\gamma)}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{N\cos(N\gamma)\sin\gamma - \sin(N\gamma)\cos\gamma}{\sin^2\gamma} = 0$$

$$\tan(N\gamma) = N\tan\gamma$$

3.1 Dispersione

La Fig. 3.3 mostra l'effetto della dispersione della luce e la conseguente formazione dello spettro causata dal reticolo. Sono state scelte tre lunghezze d'onda diverse nel blu, nel verde e nel rosso, $\lambda_\mathrm{B}, \lambda_\mathrm{V}, \lambda_\mathrm{R}$, per mostrare l'estensione dello spettro. Si deve quindi immaginare lo spettro continuo visibile come un insieme di luci monocromatiche che vanno dal vicino ultravioletto ($\sim$ 3000 Å) al vicino infrarosso ($\sim$ 8000 Å).
Come si può notare tutte le lunghezze d'onda coincidono all'ordine m=0 perché la differenza di cammino ottico è nulla per ogni λ. Quindi se la sorgente di luce che illumina il reticolo è bianca, l'immagine centrale sarà anch'essa bianca, mentre per gli altri ordini si formerà uno spettro continuo di infinite righe a differenti lunghezze d'onda, le cui posizioni angolari ($\theta(\lambda)$) sono date dall'equazione generale del reticolo.
In Fig. 3.3 è ben visibile il fatto che la separazione angolare fra le righe cresce con l'ordine. Questa separazione viene chiamata **dispersione angolare** (in unità di Å/$^\circ$ e si ottiene differenziando l'equazione del grating:

$$\Delta(d\sin i + d\sin\vartheta) = \Delta(m\lambda)$$

$$d\cos\vartheta\Delta\vartheta = m\Delta\lambda$$

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta} = \frac{d\cos\vartheta}{m}}$$

Da questa relazione si deduce che

1) lo spettro è maggiormente disperso con l'aumentare dell'ordine: infatti fissato un intervallo di lunghezze d'onda $\Delta\lambda$, la sua ampiezza angolare $\Delta\vartheta \propto$ m;

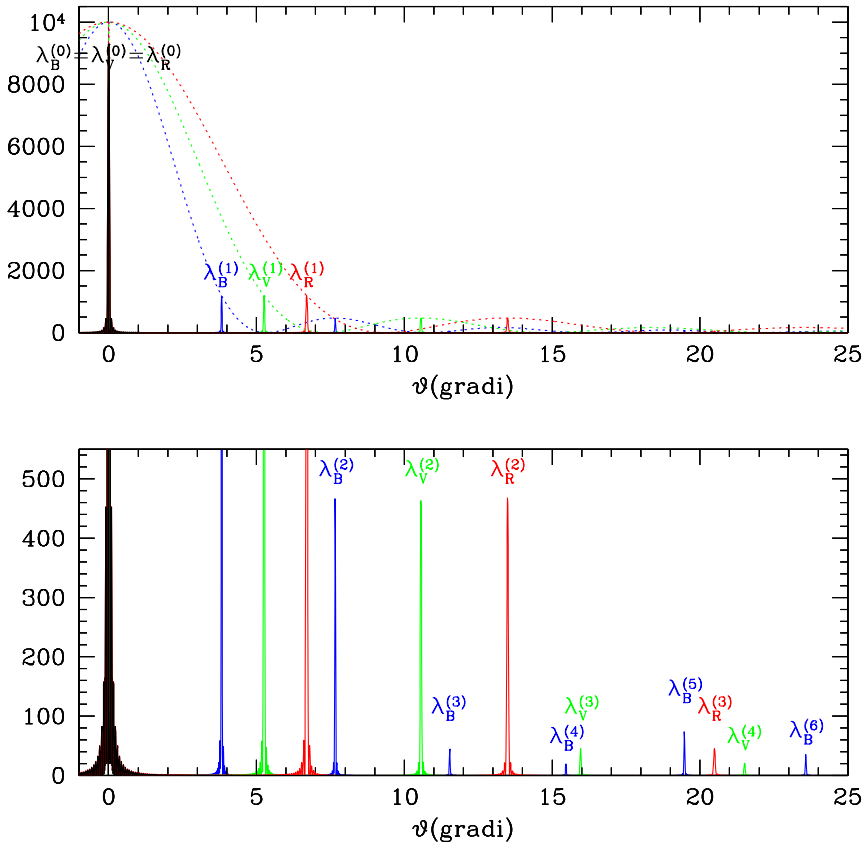


Figura 3.3: Fasci collimati di luci monocromatiche di tre diversi colori, λ_B=4000 Å, λ_V=5500 Å, λ_R=7000 Å, sono inviati con angolo di incidenza $i = 0$ verso un reticolo con N=100 fenditure. I numeri fra parentesi associati ad ogni λ indicano l'ordine m. Le linee tratteggiate nel grafico in alto mostrano che l'intensità di una data lunghezza d'onda ai vari ordini è modulata dalla figura di diffrazione della singola fenditura a quella lunghezza d'onda. Nel grafico in basso (ingrandimento di quello in alto) le linee tratteggiate non sono riportate per evitare la confusione prodotta dalla loro sovrapposizione.

2) lo spettro è maggiormente disperso con il diminuire della distanza fra le singole fenditure: infatti fissato un intervallo di lunghezze d'onda $\Delta\lambda$, la sua ampiezza angolare $\Delta\vartheta \propto \frac{1}{d}$;

3) la dispersione non è lineare: infatti fissato un intervallo di lunghezze d'onda $\Delta\lambda$, la sua ampiezza angolare $\Delta\vartheta$ varia in quanto $\Delta\vartheta \propto \frac{1}{\cos\vartheta}$. In particolare, nel caso in cui la radiazione incidente raggiunge il grating ad un angolo $i = 0$, lo spettro è maggiormente disperso al crescere di ϑ (considerando il suo valore assoluto), cioè al crescere della lunghezza d'onda. Questo non è vero se $i \neq 0$: si veda in Fig. 3.4 il confronto fra il caso $i = 0$ e il caso $i = 20$.

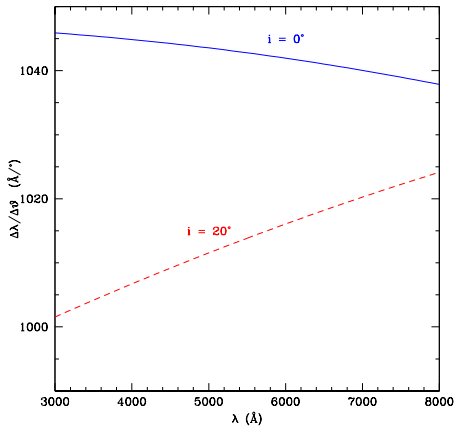


Figura 3.4: La dispersione angolare (in unità di Å/°) in funzione della lunghezza d'onda per uno spettro all'ordine m = 1. Se $i = 0$ la dispersione decresce al crescere della lunghezza d'onda (linea continua blu), mentre se $i = 20$ cresce (linea tratteggiata rossa).

Si faccia attenzione: più il valore della dispersione angolare diminuisce, più siamo in presenza di **alta dispersione**! Infatti, guardando Fig. 3.3 si vede che l'intervallo di lunghezze d'onda compreso fra λ_R e λ_B è di circa 3° all'ordine m=1 e di quasi 6° all'ordine m=2. Nel secondo caso lo spettro è maggiormente disperso, ma il valore della dispersione angolare è ovviamente minore.
La **dispersione lineare** (in unità di Å/mm) si ottiene da quella angolare una volta che sia nota la focale della camera:

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\Delta x} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta}\frac{1}{f_{cam}}}$$

Ci sono due effetti importanti dei quali bisogna tenere conto:

1) la sovrapposizione degli ordini:
come già visibile in Fig. 3.3, lo spettro al primo ordine è abbastanza separato da quello al secondo ordine, ma già il terzo ordine si sovrappone in parte al secondo, e la cosa peggiora andando a ordini più alti perché lo spettro è sempre più disperso;

2) la sovrapposizione di righe provenienti da ordini diversi:
dall'equazione del grating, essendo d e i valori costanti, dato un ordine, ad ogni angolo ϑ corrisponde una lunghezza d'onda λ. Ma in generale, $\sin\vartheta$ è dato dal prodotto fra l'ordine e la lunghezza d'onda, perciò accade che diverse righe spettrali a ordini diversi si trovino nella stessa posizione angolare e siano quindi sovrapposte.

$$d(\sin i + \sin\vartheta) = \lambda_1 = 2\lambda_2 = 3\lambda_3 = ...$$

con $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > ....$
Sappiamo che all'aumentare di m l'intensità dello spettro diminuisce, quindi è probabile che righe di ordini più alti contribuiscano poco, o talvolta per niente, in termini di flusso, ma si tratta comunque di un effetto da tenere ben presente.

3.2 Risoluzione

Supponiamo di avere due righe spettrali provenienti da transizioni atomiche diverse e vicine in lunghezza d'onda. Qual è la condizione per poterle vedere separate? Fino a che punto possiamo considerare le due righe distinguibili? Dipende dalla **risoluzione** dello spettro, vediamo come.

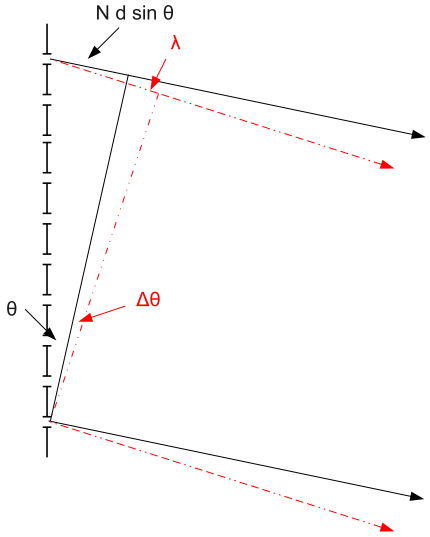


Figura 3.5: ϑ è una posizione angolare tale per cui si ha un massimo. Variando ϑ di una quantità $\Delta\vartheta$ tale per cui la differenza di cammino ottico fra raggi estremi del grating sia pari a N d sin $\vartheta + \lambda$, si ottiene un minimo.

Supponiamo che ad un certo valore di ϑ si abbia un massimo principale: la differenza di cammino ottico fra raggi estremi del grating sarà pari a $N\delta = Nd\sin\vartheta$ (Fig. 3.5). Ma per l'equazione del grating $Nd\sin\vartheta = Nm\lambda$ (nel caso $i = 0$). Se adesso variamo ϑ di una quantità tale da produrre una variazione di una lunghezza d'onda λ nella differenza totale di cammino ottico, osserviamo che la figura di interferenza ha intensità zero . Questo avviene perché la differenza di cammino ottico fra due fenditure adiacenti è $\frac{\lambda}{N}$ e abbiamo visto in precedenza che i minimi ai lati dei massimi principali si hanno quando $d\sin\vartheta = \frac{\lambda}{N}, \frac{2\lambda}{N}, \frac{3\lambda}{N}, ...$ Da considerazioni geometriche (Fig. 3.5) questa variazione di una lunghezza d'onda corrisponde a una variazione angolare $\Delta\vartheta$ pari a:

$$\Delta\vartheta = \frac{\lambda}{Nd\cos\vartheta}$$

e $\Delta\vartheta$ sarà proprio la separazione angolare fra il primo minimo, a destra o sinistra, e il massimo principale (Fig. 3.6). Applicando ancora una volta il criterio di Rayleigh assumiamo $\Delta\vartheta$ come la minima distanza angolare fra due massimi principali, o fra due righe spettrali, per poterli considerare ancora separati. Da questa formula si nota inoltre che quando N assume valori molto grandi i massimi principali diventano molto stretti. Infatti, fissato λ, $\Delta\vartheta \propto \frac{1}{N}$.

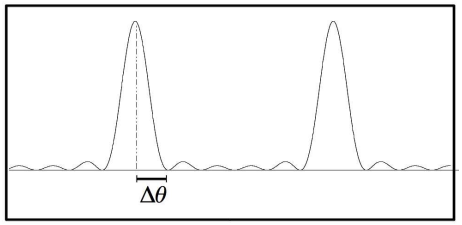


Figura 3.6: Posizione angolare del primo minimo.

Ricordando adesso l'espressione della dispersione angolare, si ha:

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta} = \frac{d\cos\vartheta}{m}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} N d\cos\vartheta = \frac{d\cos\vartheta}{m}$$

E infine:

$$\boxed{R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN}$$

La quantità R si chiama **potere risolutivo** (quantità adimensionale), mentre $\Delta\lambda$ è la **risoluzione spettrale** (in unità di Å o in generale in unità lineari). Nel caso specifico, R indica il **potere risolutivo teorico** del grating, che è costante e dipende solo dal numero di fenditure del grating e dall'ordine. Mentre $\Delta\lambda$ è variabile e cresce con la lunghezza d'onda. È facile capire dall'espressione di R che data una riga spettrale ad una certa lunghezza d'onda, tanto più la riga sarà stretta ($\Delta\lambda$ piccolo), tanto più elevato sarà il potere risolutivo del grating, cioè tanto maggiore sarà la sua capacità di separare righe vicine (Fig. 3.7).

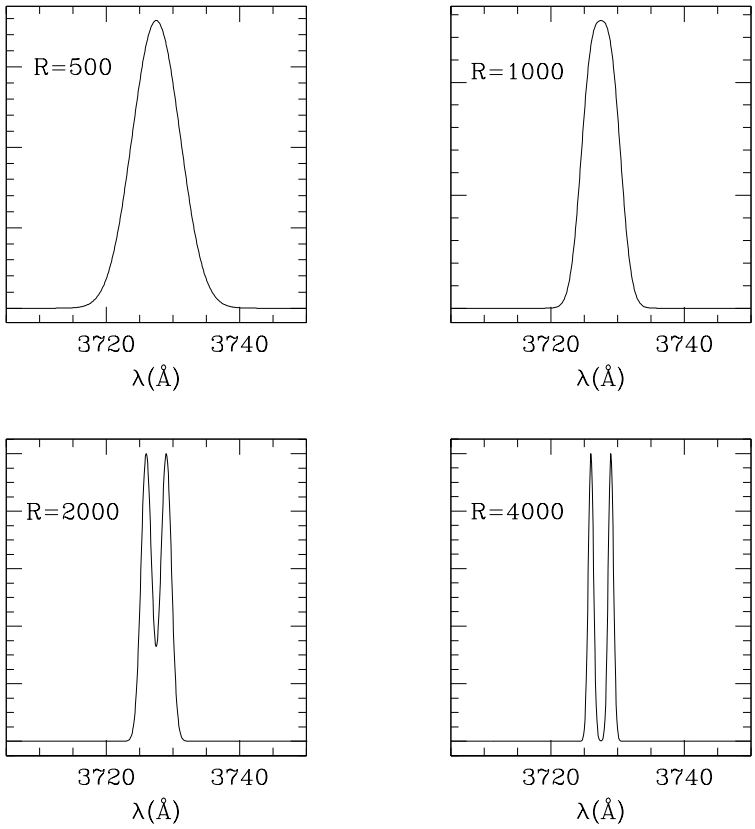


Figura 3.7: Il doppietto dell'[O II] a 3726 Å e 3729 Å. Ci vuole un potere risolutivo attorno a R=2000 per poter vedere le due righe separate. A valori bassi di R appare un'unica riga che è generalmente identificata come [O II] λ3727.

4

Spettrografo

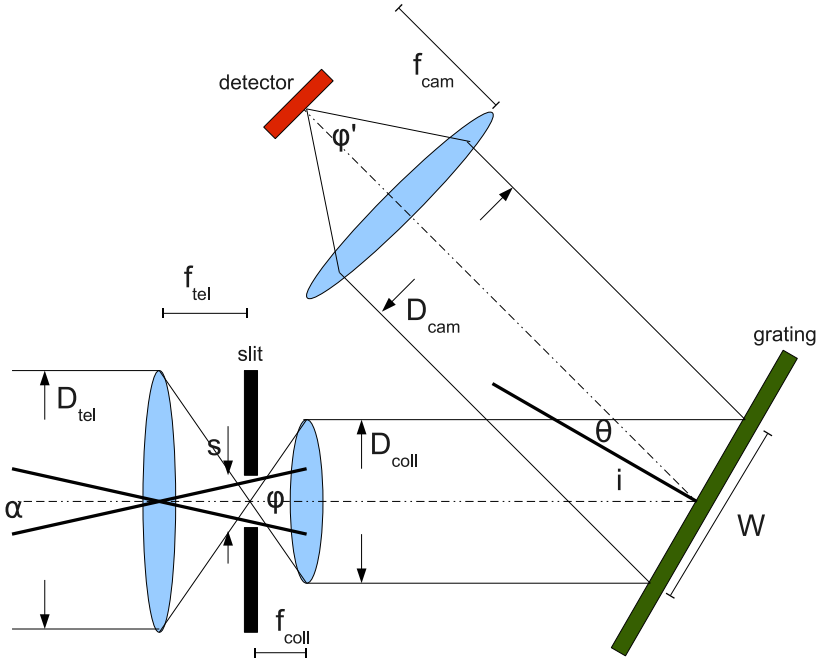


Figura 4.1: Schema ottico di uno spettrografo con grating a riflessione.

In Figura 4.1 è riportato lo schema di uno spettrografo con grating a riflessione (i grating possono essere anche a trasmissione).
Sul piano focale di un telescopio di diametro D_{tel} si trova un'apertura rettangolare con lunghezza molto maggiore della sua larghezza, chiamata **fenditura** o **slit**. Si tratta in genere di una doppia lamina con larghezza lineare variabile s (valori tipici sono dell'ordine dei 100-500 μm), che a seconda della lunghezza focale f_{tel} del telescopio, corrisponde in cielo ad una certa apertura angolare α (valori tipici sono dell'ordine di $0.5'' - 2''$). La funzione della slit è quella di selezionare, nel campo di vista del telescopio, le sorgenti delle quali ottenere lo spettro. La dispersione della luce da parte dello strumento avviene nella direzione ortogonale al lato lungo della slit, cioè parallelamente alla sua apertura, in

modo tale che più sorgenti di luce possano essere osservate spettroscopicamente evitando la sovrapposizione dei rispettivi spettri.
Oltre la slit si trova il collimatore, sistema ottico che serve a produrre un fascio collimato di diametro D_{coll}, ossia raggi paralleli che raggiungono il grating. ϕ è l'angolo di apertura del fascio di luce che investe il collimatore. La normale alla superficie del grating è inclinata di un angolo di incidenza i rispetto alla direzione di arrivo del fascio collimato e W è la dimensione lineare dell'area di grating illuminata dal fascio incidente. Al variare dell'angolo ϑ si genera lo spettro. La luce poi si propaga verso la lente di camera di diametro D_{cam} e lunghezza focale f_{cam}, che mette a fuoco lo spettro sul rivelatore (o detector). ϕ' è l'angolo di apertura del fascio focalizzato dalla lente di camera.

Si faccia attenzione, d'ora in avanti con il termine reticolo o grating si intenderà in generale un sistema ottico costituito da un supporto di vetro su cui sono incise righe molto sottili, parallele fra di loro e molto vicine, chiamate **tratti**. Non si parlerà più di fenditure e di distanza d fra di esse, ma di tratti e di **densità lineare di tratti** $\rho = \frac{1}{d}$ (in unità di numero di tratti per mm). C'è una sola fenditura in uno spettrografo, la **slit** appena descritta!

Se invece di considerare il numero totale di tratti, consideriamo la densità di tratti, le equazioni fondamentali del reticolo diventano:

$$\boxed{\sin i + \sin \vartheta = \rho m \lambda}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta} = \frac{\cos\vartheta}{\rho m}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta x} = \frac{\cos\vartheta}{\rho m f_{cam}}$$

$$R^* = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \rho m W$$

dove $\mathbf{R}^*$ è il **potere risolutivo teorico** per una slit infinitamente sottile.

Vediamo adesso un'applicazione pratica dell'equazione del grating (Fig. 4.2). Assumiamo che il grating abbia $\rho = 600/\text{mm}$ e che l'angolo fra la normale del collimatore e del reticolo sia $i = 45°$.

Per m = 0:

$$\sin\vartheta = -\sin i \Rightarrow \vartheta = -45°$$

cioè l'ordine zero è in direzione simmetrica al fascio collimato incidente, rispetto alla normale al reticolo.

Per m = 1:

$$\vartheta = \arcsin(600 \cdot 10^{-7} \times 1 \times \lambda - \sin 45)$$

Da cui, $\lambda_1 = 4000$ Å corrisponde a $\vartheta_1 \simeq -28°$, mentre $\lambda_2 = 7000$ Å corrisponde a $\vartheta_2 \simeq -17°$. Si può calcolare che tutto lo spettro visibile è compreso in una

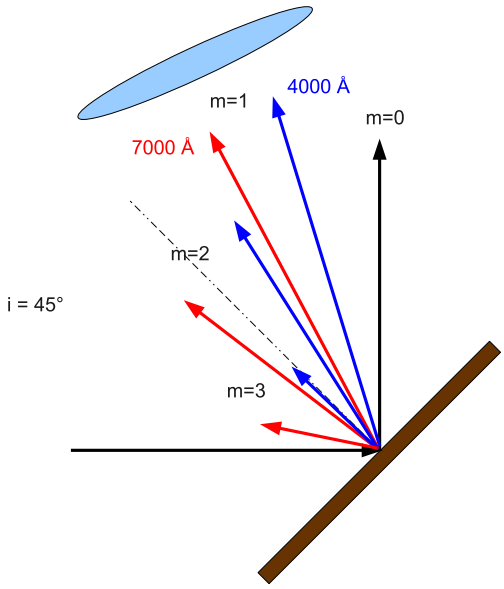


Figura 4.2: Formazione dello spettro visibile ai vari ordini.

ventina di gradi. La lente di camera è posizionata in modo tale da intercettare lo spettro.

Per m = 2:

$$\vartheta = \arcsin(600 \cdot 10^{-7} \times 2 \times \lambda - \sin 45)$$

Da cui, $\lambda_1 = 4000$ Å corrisponde adesso a $\vartheta_1 \simeq -13°$, mentre $\lambda_2 = 7000$ Å corrisponde a $\vartheta_2 \simeq 7.5°$. Cioè, l'intervallo angolare è più ampio e la direzione verso cui si dispone lo spettro contiene la normale al reticolo.

Per m = 3:

$$\vartheta = \arcsin(600 \cdot 10^{-7} \times 3 \times \lambda - \sin 45)$$

Da cui, $\lambda_1 = 4000$ Å corrisponde a $\vartheta_1 \simeq 0.75°$, mentre $\lambda_2 = 7000$ Å corrisponde a $\vartheta_2 \simeq 33.5°$. L'intervallo angolare è ancora più ampio e lo spettro si sovrappone a quello corrispondente all'ordine 2!

Riassumendo si ha:

m	ϑ_{4000}	ϑ_{7000}	$\Delta\vartheta$
0	-45	-45	0
1	-28	-17	11
2	-13	7.5	20.5
3	0.75	33.5	34.25

Se adesso allo stesso range angolare $\vartheta_1 - \vartheta_2$ (al primo ordine) vogliamo far corrispondere l'intervallo $5000 - 8000$ Å, dobbiamo portare l'inclinazione del grating a circa 50°. Infatti:

$$i = \arcsin(\rho m\lambda - \sin\vartheta) = \arcsin[600 \times 1 \times 5000 \cdot 10^{-7} - \sin(-28)] = 50^\circ$$

Calcoliamo adesso la dispersione angolare in corripondenza delle lunghezze λ_1 e λ_2 all'ordine m = 1:

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta}\right)_1 = \frac{\cos(-28^\circ)}{600 \cdot 10^{-7} \times 1} \frac{\pi}{180} \simeq 257 \text{ Å}/^\circ$$

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta}\right)_2 = \frac{\cos(-17^\circ)}{600 \cdot 10^{-7} \times 1} \frac{\pi}{180} \simeq 278 \text{ Å}/^\circ$$

La dispersione lineare dipenderà dalla lunghezza focale della camera.
Se ipotizziamo che f_{cam}= 100 mm:

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta x}\right)_1 = \frac{\cos(-28^\circ)}{600 \cdot 10^{-7} \times 1 \times 100} \simeq 147 \text{ Å/mm}$$

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta x}\right)_2 = \frac{\cos(-17^\circ)}{600 \cdot 10^{-7} \times 1 \times 100} \simeq 159 \text{ Å/mm}$$

La focale della camera dovrà essere tale che la risoluzione spettrale copra al minimo due o tre elementi di risoluzione del rivelatore. Questo criterio è noto come **limite di Nyquist**.

4.1 Risoluzione spettrale

Ricaviamo ora l'espressione per il potere risolutivo effettivo R, il quale come vedremo dipende non solo dalle caratteristiche del grating, ma anche da altri fattori, tra cui la larghezza della slit.
Sia s la larghezza lineare della slit e s' la larghezza lineare della sua immagine sul rivelatore. Applichiamo l'invarianza dei sistemi ottici:

$$n\Omega A = cost$$

dove Ω è l'angolo solido della radiazione che incide sull'area A in un mezzo che ha indice di rifrazione n. Nell'aria n=1 e per il caso bidimensionale possiamo scrivere:

$$s\phi = s'\phi'$$

$$s\frac{D_{coll}}{f_{coll}} = s'\frac{D_{cam}}{f_{cam}}$$

$$s' = s\frac{D_{coll}}{f_{coll}}\frac{f_{cam}}{D_{cam}} = s\frac{F_{cam}}{F_{coll}}$$

ossia l'immagine della slit è determinata dal rapporto fra i rapporti di apertura della lente di camera e del collimatore.

A questo punto possiamo calcolare la risoluzione spettrale:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\lambda}{\Delta x}s' = \left(\frac{\cos\vartheta}{\rho m f_{cam}}\right)\left(s\frac{D_{coll}}{f_{coll}}\frac{f_{cam}}{D_{cam}}\right) = \frac{s\cos\vartheta}{\rho m D_{cam}F_{coll}}$$

Ma la dimensione lineare W della parte illuminata del grating può essere espressa come $W = \dfrac{D_{cam}}{\cos\vartheta}$, per cui si ha:

$$\Delta\lambda = \frac{s}{\rho m W F_{coll}}$$

e infine, il **potere risolutivo reale R**, vale:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \rho m W\frac{F_{coll}\lambda}{s} = R^*\frac{F_{coll}\lambda}{s}$$

Si nota che R è indipendente dalle caratteristiche della camera!

Poiché l'apertura della slit è usualmente espressa in termini di unità angolari, anziché lineari, possiamo porre $\alpha = \dfrac{s}{f_{tel}}$, con α espresso in radianti. In condizioni ideali $F_{tel} = F_{coll}$, quindi:

$$\frac{f_{tel}}{D_{tel}} = \frac{f_{coll}}{D_{coll}}$$

$$R = R^*\frac{F_{coll}\lambda}{s} = R^*\frac{F_{coll}\lambda}{\alpha F_{coll}D_{tel}} \Rightarrow \boxed{R = R^*\frac{\lambda}{\alpha D_{tel}}}$$

Da cui segue che $R \leq R^*$ e $\lambda \leq \alpha D_{tel} = \lambda^*$.

Per $\lambda > \lambda^*$ siamo nel caso **diffraction limited**, cioè nel caso teorico in cui R risulta indipendente dall'apertura della slit. Inoltre si vede che R è inversamente proporzionale a D_{tel}, quindi per mantenere R costante al variare del diametro del telescopio, è necessario variare la dimensione W del reticolo.

Supponiamo di avere uno spettrografo con un grating con densità di tratti ρ = 1200 /mm e diametro del collimatore pari a D_{coll} = 100 mm. La slit abbia un'apertura angolare $\alpha = 0.5''$. Assumiamo inoltre che $m = 1$ e che stiamo osservando nel visibile, λ= 5000 Å. Lo spettrografo sia montato al fuoco di un telescopio di diametro D_{tel} = 8 m.
Dall'equazione del grating segue che:

$$\vartheta = \arcsin(\rho m\lambda - \sin i)$$

Se $i = 20°$, si ottiene:

$$\vartheta = \arcsin(1200 \times 1 \times 5000 \cdot 10^{-7} - \sin 20) = 15^\circ$$

La dimensione lineare del grating illuminato dal collimatore è: $W = \frac{D_{coll}}{\cos i} \sim 106$ mm. Da cui segue che il potere risolutivo teorico è

$$R^* = 1200 \times 1 \times 106 = 127200$$

mentre quello reale è molto minore e vale

$$R = 127200 \, \frac{5000 \cdot 10^{-10}}{\frac{0.5}{206265} \times 8} \simeq 3300$$

Infine la lunghezza d'onda per il caso diffraction limited è $\lambda^* = 19$ μm.

4.2 Dispersione e risoluzione

Che relazione c'è fra la dispersione e la risoluzione?
Abbiamo visto che l'espressione per la risoluzione spettrale nel caso di un grating inserito in uno spettrografo montato ad un telescopio, è data da:

$$R = \rho m \frac{D_{cam}}{\cos \vartheta} \frac{\lambda}{\alpha D_{tel}}$$

D'altra parte la dispersione angolare vale:

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta} = \frac{\cos\vartheta}{\rho m}$$

da cui segue che:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \left(\frac{D_{cam}}{D_{tel}}\right) \frac{\lambda}{\alpha \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta}\right)}$$

$$\Delta\lambda = \left(\frac{D_{tel}}{D_{cam}}\right) \alpha \frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta}$$

Queste formule indicano che in caso di alta dispersione, cioè quando $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta}$ assume valori piccoli, si può avere alta risoluzione, cioè valori elevati di R e valori piccoli di $\Delta\lambda$, ma anche bassa risoluzione, per esempio aumentando la larghezza della slit. Viceversa, in caso di bassa dispersione, cioè valori grandi di $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta}$, non si avrà mai alta risoluzione.

4.3 Ingrandimento anamorfico

Torniamo adesso alla relazione fra la larghezza lineare s della slit e larghezza lineare della sua immagine s' nel piano focale della lente di camera. La quantità s'/s è detta ingrandimento dello spettrografo nella direzione della dispersione. Ma la slit è un'apertura rettangolare, quindi esiste un ingrandimento anche nella direzione ortogonale alla dispersione, cioè lungo la slit stessa. In generale

l'ingrandimento nelle due direzioni è diverso e per questa ragione si parla di **ingrandimento anamorfico A**.

Quindi l'ingrandimento M_λ nella direzione della dispersione vale:

$$M_\lambda = \frac{s'}{s} = \frac{f_{cam}}{f_{coll}} \frac{D_{coll}}{D_{cam}} = \frac{F_{cam}}{F_{coll}}$$

Mentre l'ingrandimento M_x nella direzione della slit, chiamata direzione spaziale, è il normale ingrandimento causato dalla combinazione di due ottiche con focali diverse:

$$M_x = \frac{f_{cam}}{f_{coll}}$$

Esprimendo adesso il diametro della camera e del collimatore come $D_{cam} = W \cos\vartheta$ e $D_{coll} = W \cos i$, e calcolando il rapporto fra i due ingrandimenti M_x e M_λ, si ottiene l'espressione per l'ingrandimento anarmofico:

$$A = \frac{M_x}{M_\lambda} = \frac{D_{cam}}{D_{coll}} = \frac{\cos\vartheta}{\cos i}$$

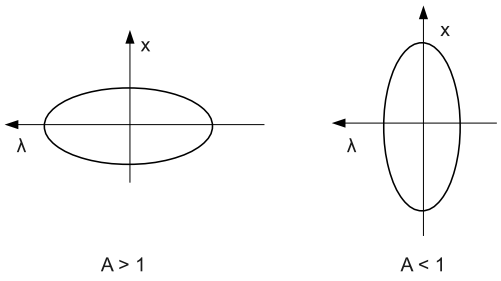


Figura 4.3: A sinistra, la scala spaziale lungo l'asse x è minore di quella lungo l'asse λ (A $>$ 1); a destra, il contrario (A $<$ 1).

Ricordando che in un sistema ottico al crescere del fattore di ingrandimento diminuisce il valore della scala spaziale, si noti che esistono due configurazioni possibili, a seconda di come è orientato il grating nello spettrografo.

1) la normale al grating è diretta verso la lente di camera:
in questo caso, $\vartheta < i$, per cui $\cos\vartheta > \cos i$ e $A > 1$, cioè il fattore di ingrandimento lungo la slit (x) è maggiore del fattore di ingrandimento lungo la dispersione (λ) e quindi la scala spaziale lungo la slit è minore di quella lungo la dispersione (Fig. 4.3, a sinistra);

2) la normale al grating è diretta verso il collimatore:
in questo caso, $\vartheta > i$, per cui $\cos\vartheta < \cos i$ e $A < 1$, cioè il fattore di ingrandimento lungo la slit (x) è minore del fattore di ingrandimento lungo la dispersione (λ) e quindi la scala spaziale lungo la slit è maggiore di quella lungo la dispersione (Fig. 4.3, a destra).

4.4 Angolo di blaze

Nel capitolo precedente abbiamo visto che il massimo di intensità di luce prodotta da un grating, chiamato anche **massimo di blaze**, si ha a $\vartheta = 0$, cioè a m = 0, dove però non vi è dispersione ed è quindi necessario che sia m≠0 perché si formi uno spettro. Poiché però l'intensità di luce è modulata dalla figura di diffrazione del singolo tratto, già a ordine m = 1 lo spettro è abbastanza debole e lo diventa sempre di più al crescere dell'ordine. Quindi bisogna in qualche modo spostare il massimo di **blaze** ad ordini più alti. Questo lo si può ottenere lavorando i tratti del grating in modo che essi formino un angolo δ con il piano del grating. Questo angolo è noto come **angolo di blaze** (Fig. 4.4).

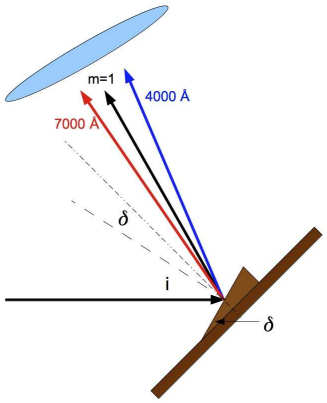


Figura 4.4: Effetto dell'introduzione dell'angolo di blaze δ. Il massimo di intensità si sposta all'ordine m=1.

Lo spazio fra ogni tratto sarà $b = d\cos\delta$. Per grating usati a ordini bassi, δ in genere è piccolo ($< 20°$), ma per grating in configurazione **echelle** può raggiungere anche valori di $60° - 70°$.

L'intensità del grating è data dall'espressione:

$$I = A_0^2 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2} \frac{\sin^2(N\gamma)}{\sin^2(\gamma)}$$

dove il termine $\sin^2\beta/\beta^2$ è chiamato anche **funzione di blaze**, e modula l'intensità della figura di interferenza ad una data lunghezza d'onda, e dove $2\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\vartheta = kd\sin\vartheta$ è la differenza di fase fra i centri di due tratti adiacenti, mentre $\beta = \frac{\pi}{\lambda} b\sin\vartheta = k\frac{b}{2}\sin\vartheta$ è la differenza di fase fra centro e bordo di ogni tratto.
Cambiamo adesso sistema di riferimento (Fig. 4.5): oltre alla normale alla superficie del grating rispetto alla quale sono misurati gli angoli i e ϑ, tracciamo la normale al singolo tratto e definiamo η l'angolo che essa forma con il raggio incidente e η' l'angolo che essa forma con il raggio diffratto. L'angolo compreso fra le due normali sarà δ e l'angolo fra il raggio incidente e quello diffratto sarà Ψ. Deriviamo la distribuzione della luce prodotta da un grating blazed:

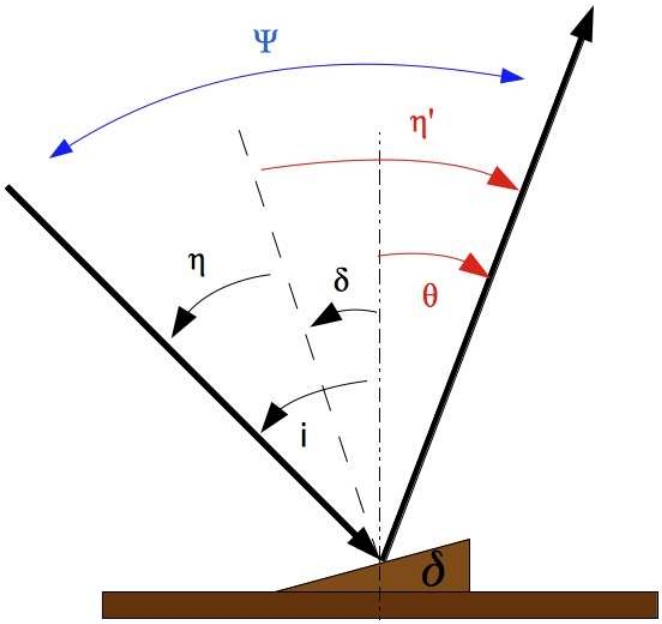


Figura 4.5: L'introduzione dell'angolo di blaze permette di fissare un nuovo sistema di riferimento basato sugli angoli η e η'. La linea tratto-lungo è la normale al tratto rialzato, mentre la linea tratto-punto è la normale alla superficie del grating.

$$I = \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

dove β in questo nuovo sistema di riferimento avrà la seguente espressione:

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} b(\sin \eta + \sin \eta')$$

Dalla Fig. 4.5 vediamo che $\eta = i - \delta$ e $\eta' = \vartheta - \delta$ (si faccia attenzione ai segni!), da cui:

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} b[\sin(i - \delta) + \sin(\vartheta - \delta)]$$

Ma, dall'equazione del reticolo sappiamo che:

$$\rho m \lambda = \sin i + \sin \vartheta \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{\rho m}{\sin i + \sin \vartheta}$$

Sostituendo:

$$\beta = \pi b \rho m \frac{\sin(i-\delta) + \sin(\vartheta - \delta)}{\sin i + \sin \vartheta}$$

Utilizzando adesso la relazione:

$$\sin X + \sin Y = 2 \sin\left(\frac{X+Y}{2}\right) \cos\left(\frac{X-Y}{2}\right)$$

si ottiene:

$$\beta = \pi b \rho m \frac{2 \sin\left(\frac{i+\vartheta-2\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{i-\vartheta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{i+\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{i-\vartheta}{2}\right)}$$

$$\beta = \pi b \rho m \frac{\sin\left(\frac{i+\vartheta}{2} - \delta\right)}{\sin\left(\frac{i+\vartheta}{2}\right)}$$

$$\beta = \pi b \rho m \frac{\sin\left(\frac{i+\vartheta}{2}\right) \cos\delta - \sin\delta \cos\left(\frac{i+\vartheta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{i+\vartheta}{2}\right)}$$

$$\beta = \pi b \rho m \left[\cos\delta - \frac{\sin\delta}{\tan\left(\frac{i+\vartheta}{2}\right)}\right]$$

Studiamo adesso questa nuova funzione di β.

Sappiamo che si ha un massimo per $\beta = 0$:

$$\cos\delta - \frac{\sin\delta}{\tan\left(\frac{i+\vartheta}{2}\right)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\left(\frac{i+\vartheta}{2}\right) = \tan\delta \Rightarrow i + \vartheta = 2\delta$$

e che i primi due minimi si trovano a $\beta = \pm\pi$:

$$\pi b \rho m \left[\cos\delta - \frac{\sin\delta}{\tan\left(\frac{i+\vartheta}{2}\right)}\right] = \pm\pi$$

$$\cos\delta - \frac{\sin\delta}{\tan\left(\frac{i+\vartheta}{2}\right)} = \pm\frac{1}{\rho m b}$$

$$\tan\left(\frac{i+\vartheta}{2}\right) = \frac{\sin\delta}{\cos\delta \pm \frac{1}{\rho m b}}$$

La condizione per il **massimo di blaze** si ha quando:

$$\beta = 0 \Rightarrow \eta = -\eta' \Rightarrow i + \vartheta_b = 2\delta$$

Da cui segue possiamo ricavare la lunghezza d'onda di blaze:

$$\sin i + \sin\vartheta_b = \rho m \lambda_b$$

$$2\sin\left(\frac{i+\vartheta_b}{2}\right)\cos\left(\frac{i-\vartheta_b}{2}\right) = \rho m \lambda_b$$

$$2\sin\left(\frac{i+2\delta-i}{2}\right)\cos\left(\frac{i-2\delta+i}{2}\right) = \rho m \lambda_b$$

$$2\sin\delta\ \cos(i-\delta) = \rho m \lambda_b$$

$$\boxed{\lambda_b = \frac{2\sin\delta\ \cos(i-\delta)}{\rho m}}$$

D'altra parte, $i - \vartheta_b = \Psi$ è l'angolo formato dall'asse ottico della camera e del collimatore, angolo fissato dallo spettrografo, per cui possiamo ottenere un'altra relazione nel caso sia noto questo angolo:

$$\boxed{\lambda_b = \frac{2\sin\delta\cos\frac{\Psi}{2}}{\rho m}}$$

La Fig. 4.6 mostra un esempio di funzione di blaze nel caso di uno grating con 600 tratti/mm, blazed al primo ordine, con angolo di blaze pari a 10° e angolo $i = 45°$. Dalle formule precedenti si ricava che la lunghezza d'onda di blaze vale $\lambda_b = 4740$ Å, e questa è la lunghezza d'onda a cui si ha il massimo di luce. Si può notare come la nuova figura di intensità sia molto diversa da quella vista nel caso non-blazed.
In Fig. 4.7 sono rappresentate delle funzioni di blaze reali, chiamate curve di efficienza, in cui la percentuale di luce trasmessa dal grating è in funzione della lunghezza d'onda. Conoscere queste curve è molto importante quando si devono scegliere i grating da utilizzare: ad esempio in questo caso, per osservare tutto lo spettro visibile di un oggetto si può usare il grating R300V che però ha un'efficienza bassa nel blu e nel rosso, oppure prima il grating R400V e poi il grating R400R e combinare i due spettri risultanti.

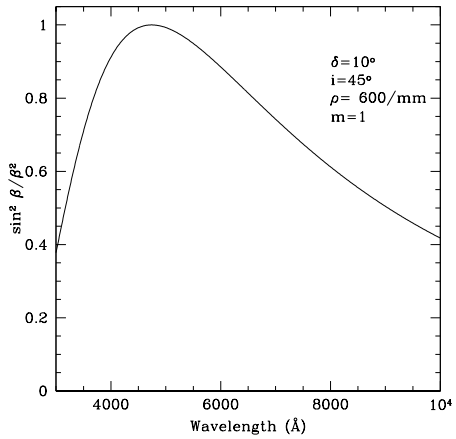


Figura 4.6: Esempio di funzione di blaze. I parametri utilizzati sono riportati in alto a destra.

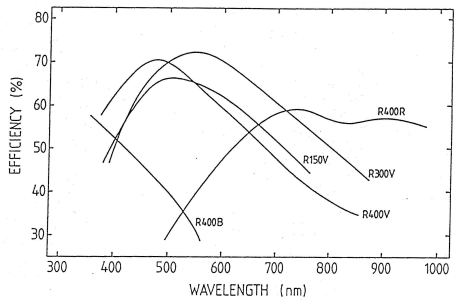


Figura 4.7: Esempi di curve di efficienza di grating blazed. Questa figura si riferisce ai grating dello spettrografo IDS montato all' Isaac Newton Telescope alle Canarie. I numeri associati ad ogni curva indicano la densità di tratti di ciascun grating e le lettere finale (B, V, oppure R) indicano in quale parte dello spettro sono maggiormente efficienti.

4.5 Grating echelle

In generale i grating sono blazed al primo ordine e permettono di raggiungere risoluzioni spettrali medio-basse con valori di R intorno a 500–2000. Per raggiungere risoluzioni decine o centinaia di volte superiori esistono i grating **echelle**, che sono caratterizzati da una bassa densità di tratti ($\rho \sim 50 - 100$ tratti/mm) ed elevati angoli di blaze, attorno ai $60° - 70°$ (Fig. 4.8).
Dalle formule viste finora sappiamo che non si può ottenere elevata risoluzione senza avere elevata dispersione. D'altra parte, per aumentare la dispersione si può

1) aumentare il valore di ρ, cioè utilizzare grating con elevata densità di tratti, ma questa densità non può essere aumentata all'infinito o comunque quando è troppo elevata il grating si comporta come uno specchio e non produce più uno spettro;

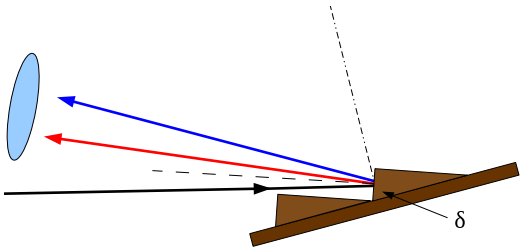


Figura 4.8: I grating echelle hanno angoli di blaze elevati e angoli fra collimatore e camera relativamente piccoli.

2) aumentare l'ordine m, cioè utilizzare lo spettro che si forma ad ordini elevati.

Per completezza, anche diminuendo la larghezza della slit si aumenta R, ma è un'operazione che non fa aumentare di tanto la risoluzione e piuttosto va a discapito della quantità di luce che entra nello spettrografo. Quindi la soluzione seguita è la seconda, ma poiché a ordini alti lo spettro è quasi invisibile, è necessario che il grating sia blazed e con angoli di blazed elevati, per fare in modo che il massimo di efficienza si abbia a ordini alti.

Ad ordini elevati si presenta però il problema della sovrapposizione degli ordini. Come abbiamo già visto, in genere solo il primo ordine e il secondo sono abbastanza separati, anche se talvolta accade che la parte più rossa dello spettro al primo ordine si sovrapponga con la parte più blu del secondo ordine. Per tutti gli altri ordini la sovrapposizione è crescente con l'aumentare di m. In questo caso, ruotare il grating e cambiare l'angolo i di incidenza del fascio collimato non serve a niente perché la confusione è troppa.

La Fig. 4.9 mostra cosa accade ai vari ordini per un grating non-blazed. Il grafico in alto contiene a sinistra l'ordine zero, qui indicato con il colore nero (ma in realtà è bianco!), il primo ordine dal blu al rosso, il secondo ordine immediatamente dopo, con il terzo che comincia a sovrapporsi e via via tutti gli altri. Al crescere di m diventa quasi impossibile capire quale lunghezza d'onda appartiene a quale ordine. I grafici successivi sono ottenuti isolando i vari ordini.

Piuttosto, essendo i e ρ costanti e tenendo conto che lo spettro avrà una certa apertura angolare $\Delta\vartheta = \vartheta_{max} - \vartheta_{min}$, dall'equazione del grating avremo un corrispondente intervallo $\{\lambda_{min}, \lambda_{max}\}$ variabile al variare dell'ordine m: in particolare al cresce di m, la lunghezza d'onda λ deve diminuire e quindi avremo che gli ordini più alti conterranno la parte blu dello spettro e quelli più bassi la parte rossa. Riuscendo a separare gli ordini è possibile ricostruire lo spettro totale ad alta dispersione e risoluzione. La sovrapposizione dei vari intervalli $\Delta\lambda$, cioè la regione in lunghezza d'onda comune a due ordine successivi, dipenderà dalla dispersione angolare: maggiore è la dispersione, minore sarà l'intervallo comune a due ordini. Negli spettrografi echelle, il grating echelle viene usato in combinazione con un altro sistema ottico, chiamato **cross disperser** che in genere è un prisma o talvolta un grating a bassa dispersione. Il cross disperser, come dice il termine, serve a disperdere la luce nella direzione ortogonale alla

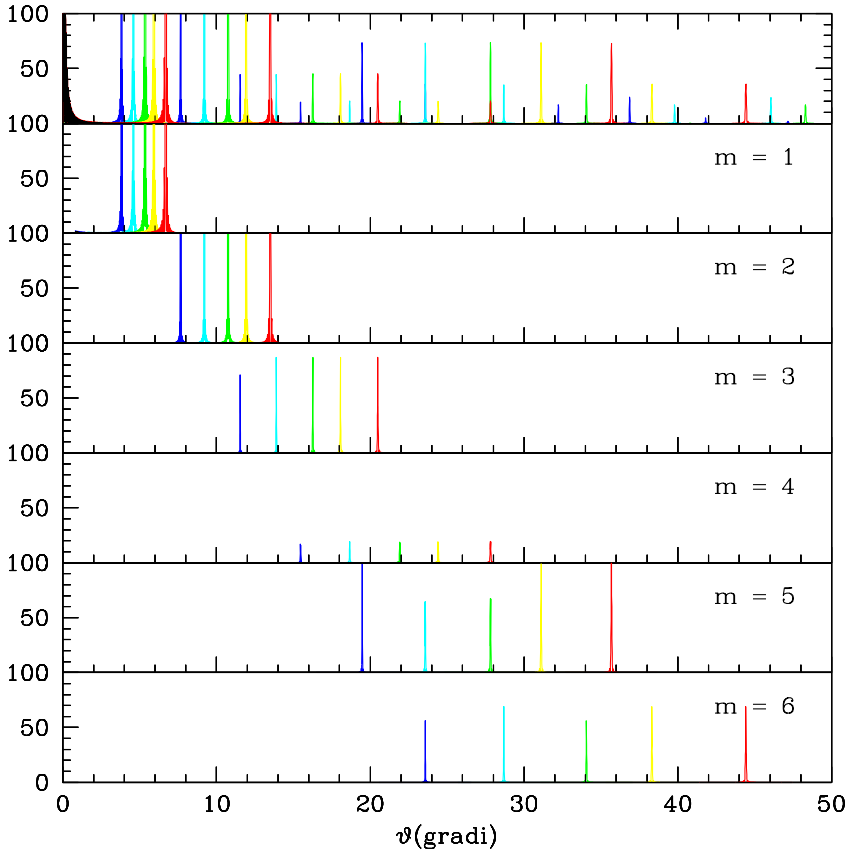


Figura 4.9: La sovrapposizione degli ordini: i colori corrispondono a $\lambda = 4000$ Å (blu), $\lambda = 4800$ Å (celeste), $\lambda = 5600$ Å (verde), $\lambda = 6200$ Å (giallo) e $\lambda = 7000$ Å (rosso). Nel primo grafico in alto c'è la sovrapposizione degli ordini, mentre negli altri grafici gli ordini sono separati.

dispersione prodotta dal grating echelle e quindi serve a separare gli ordini.

In Fig. 4.10 si può osservare lo spettro del Sole ottenuto con lo spettrografo MagE del Las Campanas Observatory (Cile). Il grating echelle ha $\rho = 175$ tratti/mm e angolo di blaze $\delta = 32°$. In rosso sono indicati a sinistra i numeri degli ordini (dal 6 al 19) e a destra la lunghezza d'onda centrale. Lo spettro si estende da 3200 Å a 1 μm, con dipersione compresa fra 40 Å/° nel blu e 140 Å/° nel rosso. Tenendo conto che la lunghezza focale della camera è $f_{cam} = 138$ mm, questi valori corrispondono rispettivamente a 17 Å/mm e 58 Å/mm. Il potere risolutivo ottenibile con questo strumento è R=8000 – 10000.

In Fig. 4.11 è riportato lo schema degli ordini dello spettrografo echelle Hamilton del Lick Observatory (USA). In questo caso il grating echelle ha $\rho = 31$ tratti/mm e angolo di blaze $\delta = 65°$. A sinistra sono indicati i numeri degli ordini (dal 57 al 163) e a destra la lunghezza d'onda centrale. Lo spettro si

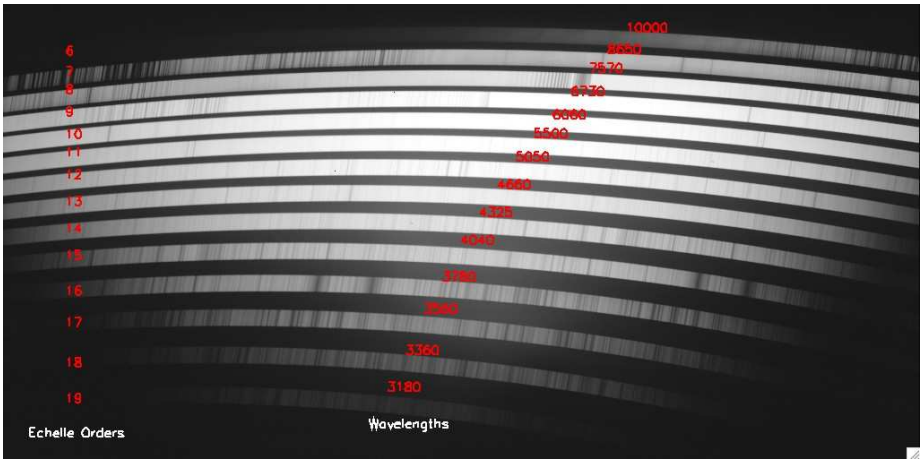


Figura 4.10: Spettro del Sole ottenuto con lo spettrografo Mag E. I numeri a sinistra indicano gli ordini, mentre quelli a destra indicano la lunghezza d'onda centrale di ogni spettro.

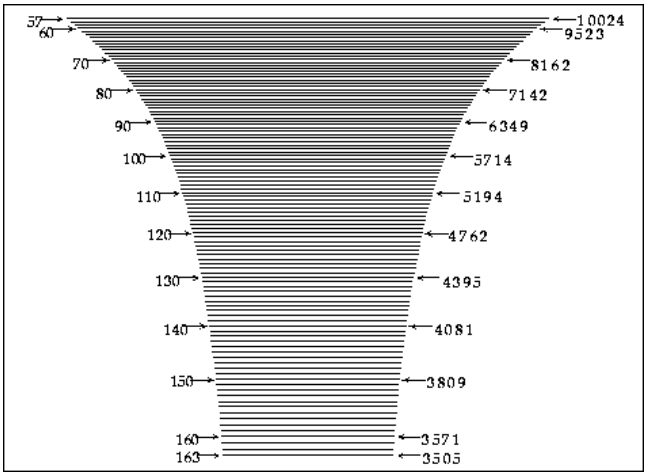


Figura 4.11: Schema ottico dello spettro formato dallo spettrografo Hamilton del Lick Observatory.

estende da 3500 Å a 1 μm, con dipersione compresa fra 17 Å/° nel blu e 50 Å/° nel rosso. Tenendo conto che la lunghezza focale della camera è $f_{cam} = 508$ mm, questi valori corrispondono rispettivamente a circa 2 Å/mm e 5.5 Å/mm. Il potere risolutivo ottenibile con questo strumento è R=60000 – 100000.
In Fig. 4.12 è mostrata la funzione di blaze a ordini diversi. I dati utilizzati sono riferiti all'esempio di Fig. 4.10. Come si può notare c'è un picco per ogni ordine, indicato dal numero fra parentesi, e c'e' una lunghezza d'onda di blaze per ogni ordine, indicata in corrispondenza di ogni massimo. Per effetto della diversa dispersione, la funzione di blaze nel blu è molto più stretta che nel rosso, il che significa che lo spettro nel blu è più corto dello spettro nel rosso.

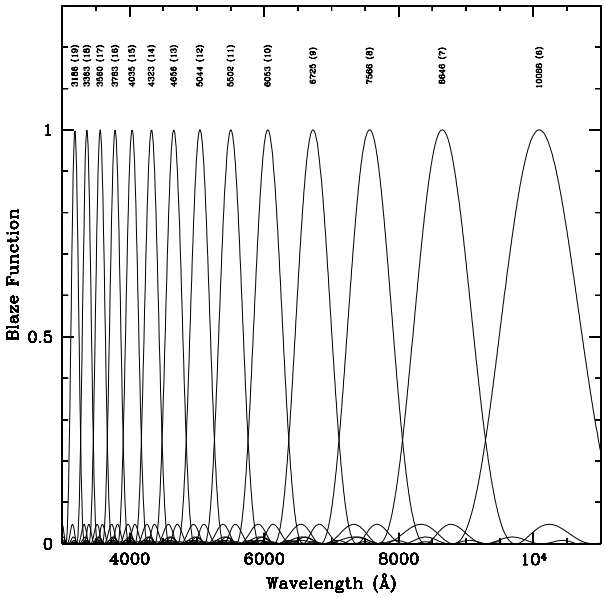


Figura 4.12: Funzione di blaze riferita al primo dei due esempi: ρ=175 tratti/mm, δ=32°, i=30°. Gli ordini variano dal 6 al 19.

5 Prisma

Il prisma è un mezzo ottico trasparente definito dal suo angolo al vertice ϕ e dal suo indice di rifrazione $n(\lambda)$.
Consideriamo un raggio luminoso di lunghezza d'onda λ che incide su una faccia del prisma con un angolo i rispetto alla normale alla superficie. Il raggio viene rifratto con un angolo i' all'interno del prisma e chiamiamo β l'angolo di deviazione del raggio incidente. Il raggio rifratto diventa raggio incidente per un'altra faccia del prisma e esce da esso rifratto una seconda volta. Siano ϑ' l'angolo di incidenza e ϑ l'angolo di rifrazione. Inoltre sia γ l'angolo di deviazione per questo raggio e δ l'angolo di deviazione globale fra la direzione del raggio che incide sul prisma e la direzione del raggio che esce dal prisma (Fig. 5.1). A causa della dipendenza di n dalla lunghezza d'onda, gli angoli i', ϑ' e ϑ variano al variare di λ e quindi un raggio di luce bianca viene convertito in uno spettro.

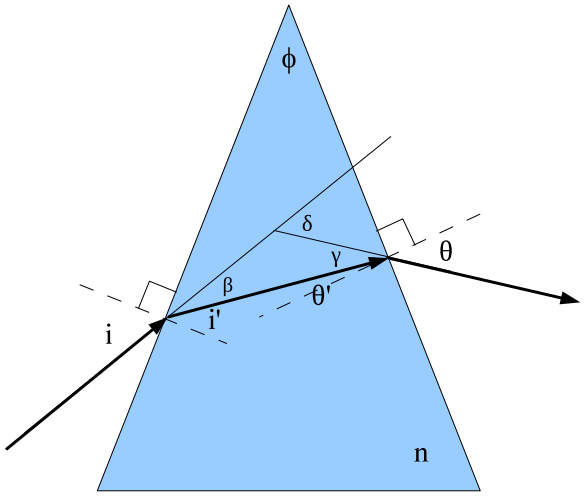


Figura 5.1: Schema di un possibile percorso di un raggio di luce ad una certa lunghezza d'onda attraverso un prisma.

Dalla legge di Snell segue che:

$$\sin i = n \sin i'$$

$$n \sin \vartheta' = \sin \vartheta$$

Inoltre, applicando semplici considerazioni geometriche si ha:

$$\begin{cases} \beta = i - i' \\ \gamma = \vartheta - \vartheta' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \delta = \beta + \gamma = i + \vartheta - \phi \\ \phi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - i' + \frac{\pi}{2} - \vartheta'\right) = i' + \vartheta' \end{cases}$$

Dalle relazioni precedenti si ha:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta &= n \sin \vartheta' \\ &= n \sin(\phi - i') \\ &= n \sin \phi \cos i' - n \cos \phi \sin i' \\ &= n \sin \phi \sqrt{1 - \sin^2 i'} - \cos \phi \, (n \sin i') \\ &= n \sin \phi \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} - \cos \phi \sin i \\ &= \sin \phi \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \phi \sin i \end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare l'espressione per l'angolo di deviazione globale δ:

$$\delta = i - \phi + \arcsin\left(\sin \phi \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \phi \sin i\right)$$

essendo ϕ e n quantità costanti in un prisma, δ dipende solo dall'angolo di incidenza i.

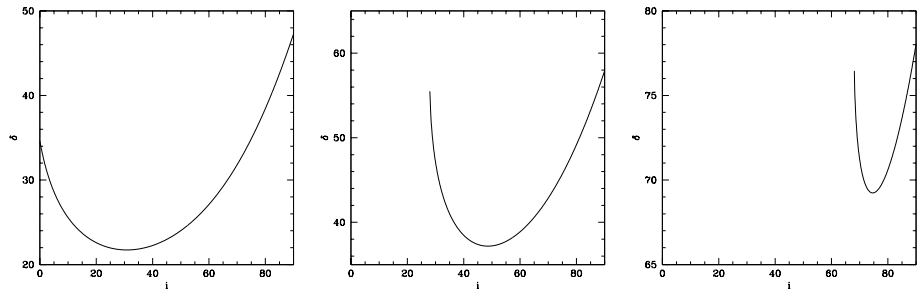


Figura 5.2: Grafici dell'angolo di deviazione globale δ in funzione dell'angolo di incidenza i per tre valori diversi di ϕ e per n=1.5: $\phi = 40°$ (a sinistra), $\phi = 60°$ (al centro), $\phi = 80°$ (a destra).

5.1 Angolo di minima deviazione

Come si vede dalla Fig. 5.2, la funzione δ ha un minimo. Calcoliamo adesso l'espressione per l'angolo di minima deviazione, δ_{min}.

Differenziamo le due equazioni di Snell viste prima:

$$\begin{cases} \cos i \Delta i = n \cos i' \Delta i' \\ n \cos \vartheta' \Delta \vartheta' = \cos \vartheta \Delta \vartheta \end{cases}$$

Differenziando anche l'espressione dell'angolo al vertice ϕ (che è una quantità costante) si ha:

$$\Delta\phi = \Delta i' + \Delta\vartheta' = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta i' = -\Delta\vartheta'$$

Da cui si ottiene:

$$\frac{\cos i}{\cos i'} \frac{\Delta i}{n} = -\frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta'} \frac{\Delta \vartheta}{n}$$

Differenziando adesso l'espressione per l'angolo di deviazione δ e sostituendo il valore di $\Delta\vartheta$ ricavato dall'uguaglianza precedente, si ha:

$$\Delta\delta = \Delta i - \frac{\cos i}{\cos i'} \frac{\cos \vartheta'}{\cos \vartheta} \Delta i$$

da cui si ricava:

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta i} = 1 - \frac{\cos i}{\cos i'} \frac{\cos \vartheta'}{\cos \vartheta}$$

Per ottenere il minimo, deve essere:

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{\cos i}{\cos i'} \frac{\cos \vartheta'}{\cos \vartheta} = 0$$

La soluzione di questa equazione è:

$$\begin{cases} i = \vartheta = \dfrac{\delta_{min} + \phi}{2} \\ i' = \vartheta' = \dfrac{\phi}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sin \frac{\delta_{min} + \phi}{2} = n \sin \frac{\phi}{2} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\sin \dfrac{\delta_{min} + \phi}{2}}{\sin \dfrac{\phi}{2}}$$

in altre parole, noto il valore dell'angolo al vertice, misurando con precisione l'angolo di minima deviazione si ottiene il valore dell'indice di rifrazione del prisma.

5.2 Dispersione angolare

I prismi vengono di solito utilizzati nel caso di minima deviazione. Poiché δ dipende da n e n dipende dalla lunghezza d'onda, possiamo calcolare la dispersione angolare della luce:

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\delta} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta n}\frac{\Delta n}{\Delta\delta}$$

Differenziando l'equazione della minima deviazione vista prima:

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\delta+\phi}{2}\right)\Delta\delta = \sin\frac{\phi}{2}\Delta n$$

da cui:

$$\frac{\Delta n}{\Delta\delta} = \frac{\cos\left(\frac{\delta+\phi}{2}\right)}{2\sin\frac{\phi}{2}} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\delta+\phi}{2}\right)}}{2\sin\frac{\phi}{2}} = \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\phi}{2}}}{2\sin\frac{\phi}{2}}$$

che sostituita nell'espressione della dispersione angolare produce:

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\delta} = \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\phi}{2}}}{2\sin\frac{\phi}{2}}\frac{\Delta\lambda}{\Delta n} = f(\phi)\frac{\Delta\lambda}{\Delta n}$$

Poiché dato un prisma ϕ e n sono costanti, anche la funzione $f(\phi)$ è una costante, e quindi la dispersione angolare in un prisma è inversamente proporzionale al gradiente dell'indice di rifrazione:

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\Delta\delta} = \text{cost}\frac{\Delta\lambda}{\Delta n}}$$

Studiamo adesso la funzione $f(\phi)$. Il termine sotto radice quadrata al numeratore deve essere positivo:

$$1-n^2\sin^2\frac{\phi}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\frac{\phi}{2} < \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{\phi}{2} < \frac{1}{n}$$

assumendo che $0 < \phi < \pi$. Da cui segue che:

$$\phi < 2\arcsin\frac{1}{n} \quad \vee \quad \phi > \pi - 2\arcsin\frac{1}{n}$$

La Fig. 5.3 mostra l'andamento della funzione $f(\phi)$ per un prisma con indice di rifrazione $n = 1.5$. Come si nota vi sono due valori di ϕ per i quali la funzione va a zero, in questo caso intorno a 90° e due valori per cui ϕ cresce asintoticamente.

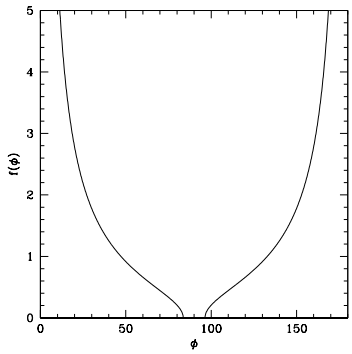


Figura 5.3: La funzione $f(\phi)$ per un prisma con indice $n = 1.5$. L'angolo al vertice del prisma influenza la dispersione angolare.

5.3 Spettrografo a prisma

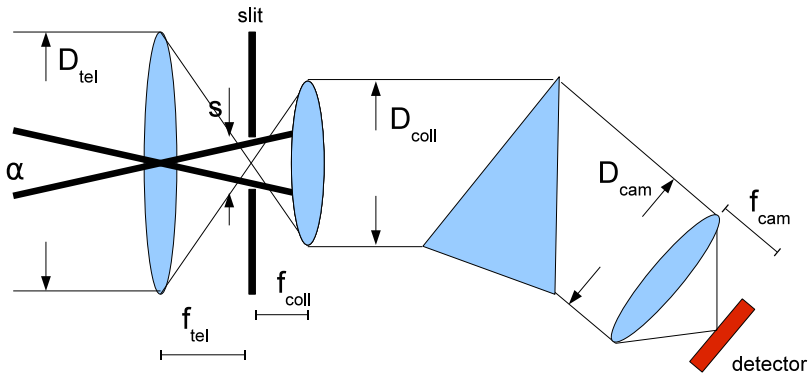


Figura 5.4: Schema ottico di uno spettrografo con prisma. Il fascio in uscita e diretto verso la camera è relativo ad una certa lunghezza d'onda.

Consideriamo adesso un prisma all'interno di uno spettrografo. La direzione del fascio collimato corrisponde alla condizione di minima deviazione (Fig. 5.4). Se D_{coll} è il diametro del fascio collimato e D_{cam} quello del fascio rifratto che va verso la lente di camera, mentre i e ϑ sono rispettivamente l'angolo incidente e l'angolo di deviazione (quello che prima avevamo indicato con δ), i cammini ottici dei raggi superiore e inferiore sono legati da:

$$2L\cos i = nx$$

dove L è la dimensione della proiezione del fascio collimato sulla faccia del prisma, mentre x è il cammino ottico del raggio inferiore all'interno del prisma (Fig. 5.5).
La dispersione angolare vale:

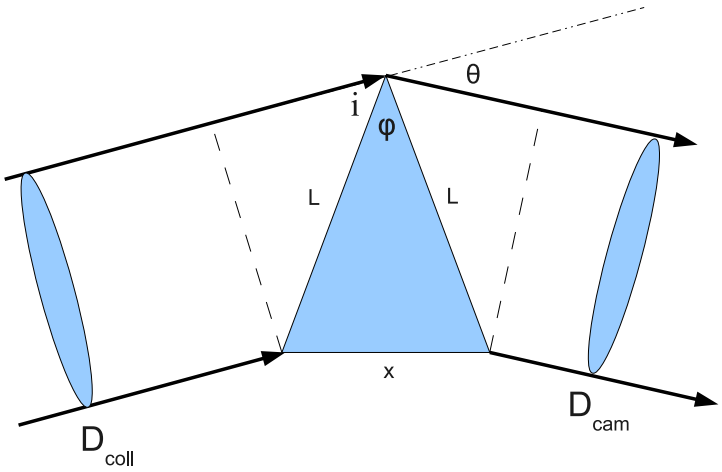


Figura 5.5: Schema di un fascio collimato che attraversa un prisma con angolo di apertura ϕ.

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta n}\frac{\Delta n}{\Delta\vartheta}$$

ma

$$\vartheta = \pi - (\phi + 2i)$$

da cui:

$$\frac{\Delta\vartheta}{\Delta n} = -2\frac{\Delta i}{\Delta n}$$

D'altra parte, differenziando la precedente uguaglianza dei cammini ottici, si ottiene:

$$-2L\sin i\Delta i = x\Delta n$$

$$-2\frac{\Delta i}{\Delta n} = \frac{x}{L\sin i} = \frac{x}{D_{coll}}$$

Infine, la **dispersione angolare** vale:

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\Delta\vartheta} = \frac{D_{coll}}{x}\frac{\Delta\lambda}{\Delta n}}$$

Come prima, la dispersione nel prisma è inversamente proporzionale al gradiente dell'indice di rifrazione. La relazione empirica più comunemente usata per descrivere la dipendenza di n dalla lunghezza d'onda è nota come **equazione di Cauchy**:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

dove A è una costante adimensionale che assume valori compresi fra 1.5 e 1.8, mentre B è una costante che assume valori compresi fra 0.003 μm^2 e 0.02 μm^2. Calcolando il gradiente di $n(\lambda)$ si ottiene:

$$\frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = -2\frac{B}{\lambda^3}$$

Il gradiente è quindi maggiore alle lunghezze d'onda minori, cioè nel blu. Ma questo implica che il valore della dispersione angolare è più basso nel blu che nel rosso e quindi uno spettro ottenuto con un prisma è più esteso nel blu e meno nel rosso.

5.4 Risoluzione

Dalla relazione della dispersione angolare possiamo passare a calcolare il **potere risolutivo** di uno spettrografo che utilizza un prisma come elemento dispersore.

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta\vartheta}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta\vartheta}\frac{x}{D_{coll}}\frac{\Delta n}{\Delta\lambda}$$

Possiamo mettere in relazione l'apertura angolare α della slit con la dimensione angolare dell'elemento di risoluzione $\Delta\vartheta$. Infatti, le dimensioni lineari della slit e della sua immagine sul piano focale della camera sono rispettivamente $s = \alpha f_{tel}$ e $s' = \Delta\vartheta f_{cam}$. Sapendo che la relazione fra queste due quantità è $s' = s\frac{F_{cam}}{F_{coll}}$ e nell'ipotesi in cui $F_{coll} = F_{tel}$, si ha:

$$\Delta\vartheta f_{cam} = \alpha f_{tel}\frac{f_{cam}}{D_{cam}}\frac{D_{tel}}{f_{tel}}$$

da cui:

$$\Delta\vartheta D_{cam} = \alpha D_{tel}$$

Poiché $D_{coll} = D_{cam}$ la risoluzione spettrale vale:

$$R = x\frac{\Delta n}{\Delta\lambda}\frac{\lambda}{\alpha D_{tel}} \Rightarrow \boxed{R = R^{**}\frac{\lambda}{\alpha D_{tel}}}$$

dove R^{**}, definito in analogia con il grating, vale:

$$\boxed{R^{**} = x\frac{\Delta n}{\Delta\lambda}}$$

Facciamo il seguente esempio: assumiamo di avere un prisma di un materiale tale che $B = 0.005$ μm^2, e con base $x = 3$ cm.
La lunghezza d'onda sia quella della luce visibile a 5000 Å. Il gradiente dell'indice di rifrazione, in modulo, vale 0.08 μm^{-1} e il potere risolutivo teorico R** vale 2400. Ora, se il prisma è inserito in uno spettrografo con slit aperta a 2″ e

agganciato a un telescopio di diametro 1 m, si ottiene che il potere risolutivo reale R vale circa 120. In altre parole una riga spettrale a 5000 Å sarebbe larga $\Delta\lambda \simeq 42$ Å. Lo spettrografo a prisma è quindi caratterizzato da una dispersione tipicamente molto bassa.

6 Grism e VPH

6.1 Grism

Il grism è una combinazione di un prisma con un grating a trasmissione, che in genere è incollato sopra (Fig. 6.1).

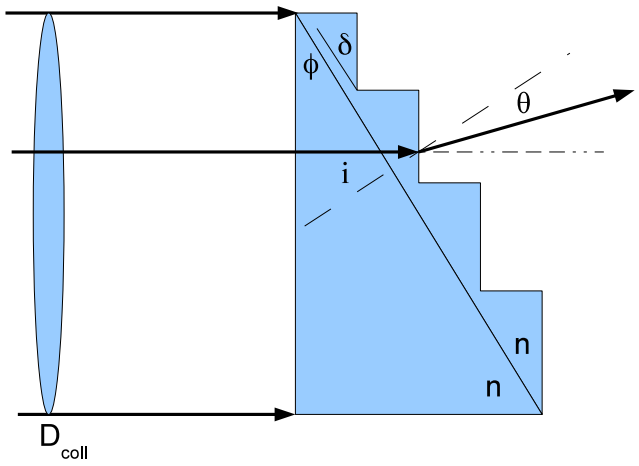


Figura 6.1: Un fascio collimato incide su un grism, combinazione di un prisma con angolo di apertura ϕ e di un grating blazed a trasmissione. In questo caso hanno entrambi indice di rifrazione n.

L'equazione del grating si applica anche al grism inserendo l'indice di rifrazione e assumendo che esso sia identico per il vetro del prisma e per la resina di cui è fatto il grating (n):

$$n \sin i + n' \sin \vartheta = \rho m \lambda$$

con $n' = 1$.

Il caso più utile è quello in cui la normale ai tratti del grism è parallela all'asse ottico, $\delta = \phi = i$, perché così la massima trasmissione di luce si ha nella direzione in cui la luce non viene deviata, cioè per $i = -\vartheta$. Questa configurazione permette

a collimatore e camera di trovarsi in asse (Fig. 6.2) e la direzione dell'asse ottico corrisponde ad una certa lunghezza d'onda λ_u:

$$\boxed{(n-1)\sin\phi = \rho m \lambda_u}$$

Questa è di fatto una condizione di blaze perché la differenza di fase fra raggi emergenti dal centro e dal bordo di ogni tratto è zero. Quindi possiamo dire che $\lambda_u = \lambda_b$.

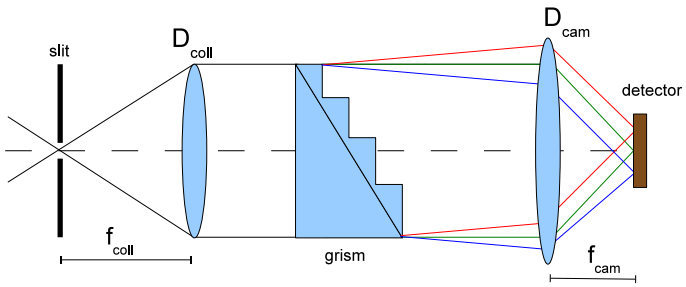


Figura 6.2: Schema ottico di uno spettrografo con grism.

Se ad esempio assumiamo di avere un grism con le seguenti caratteristiche: $n = 1.5$, $\phi = 30°$, ρ =400/mm e infine $m = 1$, la lunghezza d'onda di blaze del grism sarà:

$$\lambda_b = \frac{(1.5-1)\times \sin 30}{400 \cdot 10^{-7} \times 1} = 6250 \text{ Å}$$

Il potere risolutivo del grism alla lunghezza d'onda di blaze avrà un'espressione simile a quella ottenuta per il grating, ma con un diverso valore per $W = \dfrac{D_{coll}}{\cos\phi}$:

$$R = \rho m W \frac{\lambda_b}{\alpha D_{tel}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{(n-1)\tan\phi D_{coll}}{\alpha D_{tel}}}$$

Se prendiamo il grism con le caratteristiche dell'esempio precedente, e assumiamo che il fascio collimato abbia un diametro di 5 cm, la slit abbia un'apertura di $2''$ e infine che il telescopio abbia un diametro di 2 m, si ottiene:

$$R = \frac{(1.5-1)\times \tan 30 \times 5}{\dfrac{2}{206265} \times 2 \cdot 10^2} \simeq 745$$

Questo valore di R implica che una riga spettrale alla lunghezza d'onda di blaze ha una larghezza $\Delta\lambda \simeq 8$ Å.

È chiaro che in questa configurazione i diametri del fascio collimato e di quello diretto verso la camera sono identici, per cui l'anamorfismo vale 1. Ciò consente di usare camere più piccole di quelle che impiegano spettrografi che montano

grating a riflessione. Ma non solo, il vantaggio di avere un sistema ottico allineato in cui l'elemento dispersore può a richiesta essere sostituito con qualcos'altro o anche con niente senza che il sistema smetta di funzionare, ha permesso di costruire strumenti ibridi in grado di funzionare sia come spettrografo e quindi di produrre spettri di una o più sorgenti inquadrate dal telescopio, che come *imager* e quindi di acquisire immagini del campo di vista del telescopio, con o senza l'utilizzo di filtri fotometrici. Infatti, se consideriamo la Fig.6.2 e immaginiamo di togliere la slit e il grism, quello che appare sul detector è l'immagine dell'area di cielo osservata dal telescopio.

Su questo principio sono stati costruiti e sono attualmente in funzione strumenti come **AFOSC**, Asiago Faint Object Spectrograph and Camera, montato al 1.80 m di Cima Ekar, **EFOSC2**, ESO Faint Object Spectrograph and Camera, montato a NTT in Cile (Fig. 6.3), oppure **FORS2**, FOcal Reducer and low dispersion Spectrograph, montato al VLT sempre in Cile. Essi sono dotati di un set di filtri fotometrici, un set di grism caratterizzati da diversa densità di tratti e angolo di blaze e quindi da diversa dispersione, risoluzione ed efficienza, e infine un set di slit con larghezza diversa. La necessità di avere a disposizione un set di grism aventi proprietà diverse è legata al fatto che a differenza del grating, il grism non si inclina perché il sistema deve rimanere allineato, quindi può essere sufficiente un singolo grism a bassa dispersione per coprire tutto l'intervallo visibile, ma servono più grism quando si vuole coprire lo stesso intervallo con una più alta dispersione. Slit, grism e filtri sono montati su tre diverse ruote motorizzate, ciascuna con almeno un alloggiamento vuoto: quando si vuole ottenere un dato fotometrico, bisogna inserire un filtro tra collimatore e camera e non avere né grism né slit, viceversa quando si vuole ottenere un dato spettroscopico bisogna inserire slit e grism e non avere alcun filtro.

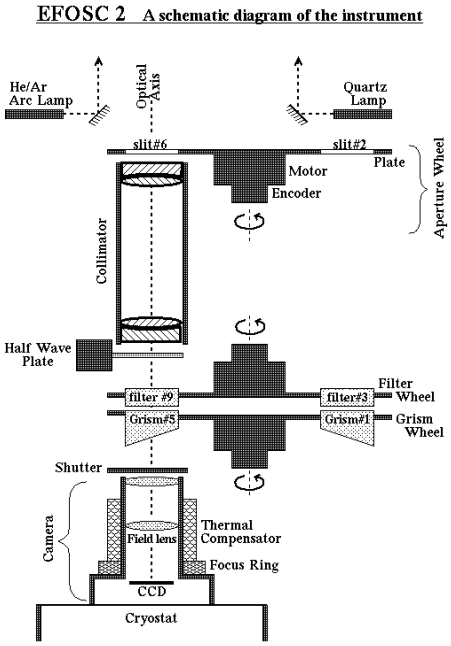


Figura 6.3: Schema ottico di EFOSC2.

Considerazione aggiuntiva: la combinazione collimatore–camera, con lunghezze focali diverse, rispettivamente f_{coll} e f_{cam}, causa un cambiamento del valore della scala sul detector rispetto a quella che si ha sul piano focale del telescopio. Sappiamo infatti che il fattore di ingrandimento è dato dal rapporto f_{cam}/f_{coll}. In generale $f_{cam} < f_{coll}$ per cui l'immagine di un oggetto prodotta dal telescopio viene rimpicciolita e il valore della scala spaziale viene aumentato.
Consideriamo ad esempio un telescopio di diametro $D_{tel} = 2$ m e lunghezza focale $f_{tel} = 10$ m. La scala spaziale ss sul suo piano focale sarà:

$$ss = \frac{206265}{10000} \simeq 20.6''/\text{mm}$$

Con questa scala la dimensione della Luna piena, che ha un diametro di circa $30'$, è di circa 87 mm. Se adesso costruiamo un sistema collimatore–camera in cui $f_{coll} = 20$ cm e $f_{cam} = 5$ cm, il fattore di ingrandimento sarà 0.25 e la dimensione della Luna sarà di quasi 22 mm. La scala spaziale sul piano focale della camera, dove si trova il detector, sarà circa $82.5''$/mm.
Gli strumenti che riducono la focale del telescopio si chiamano **riduttori di focale** oppure **focal reducer**.

6.2 Reticolo VPH

Grating e grism sono elementi dispersori ottenuti lavorando opportunamente una superficie. Esiste però anche la possibilità di disperdere la luce variando l'indice di rifrazione all'interno del volume del materiale che costituisce il grating, producendo così differenze di fase fra raggi che passano attraverso parti adiacenti del materiale. Questi dispersori sono chiamati **Volume Phase Holographic grating** o reticoli **VPH** e sono costituiti di una gelatina, il cui indice di rifrazione è modificato in modo permanente. Lo strato di gelatina viene poi chiuso a sandwich da due strati di vetro ad alta qualità che lo proteggono. L'indice di rifrazione è modulato in funzione della distanza all'interno del materiale di cui sono composti.
Anche per i VPH vale l'equazione del grating a trasmissione, ma con alcune differenze:

1) gli angoli i e ϑ sono misurati nell'aria;

2) i tratti sono sostituiti dalle frange, zone in cui l'indice di rifrazione n_g si mantiene costante;

3) la densità di tratti è sostituita dalla frequenza di intersezione delle frange con la superficie del grating $\rho = \rho_g \sin\gamma$, dove γ è l'angolo fra la normale alle frange e la normale al grating.

Se le frange sono perpendicolari alla superficie ($\gamma = 90°$), avremo la densità vera $\rho = \rho_g$. In Fig. 6.4 sono riportati quattro diversi esempi di VPH. In alto a sinistra, le frange sono ortogonali al grating mentre in alto a destra sono inclinate. In entrambi i casi il grating trasmette la luce incidente. Si noti come nei due casi in basso la diversa orientazione delle frange fa sì che il grating diventi a riflessione.

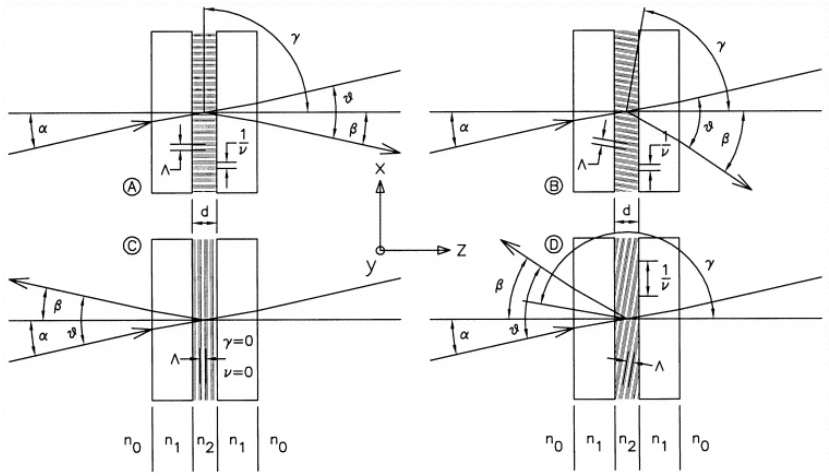


Figura 6.4: Esempi di VPH con frange ad angoli variabili.

La diffrazione della luce da parte di un VPH avviene tramite il meccanismo della **diffrazione di Bragg** (Fig. 6.5), un effetto analogo a quello dei raggi X diffratti dalle strutture cristalline.

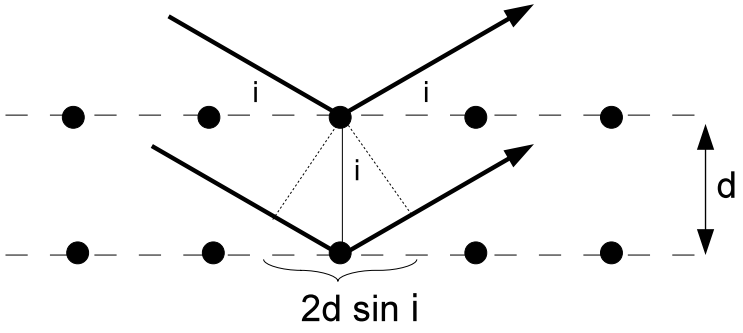


Figura 6.5: Diffrazione di Bragg.

Si ha interferenza costruttiva e quindi un massimo (condizione di Bragg) quando:

$$2d \sin i = m\lambda$$

Applicata al caso del VPH, questa equazione diventa: $2 \sin i = \rho m \lambda$.
Utilizzando adesso la legge di Snell: $n_g \sin i_g = n \sin i$, dove $n = 1$ per l'aria e i_g è l'angolo di incidenza dentro il mezzo del grating e rispetto al piano delle frange, si ottiene che l'inviluppo di energia della luce diffratta è controllato dalla frequenza di modulazione delle frange e dalla loro orientazione all'interno del mezzo del grating e produce un picco di efficienza alla lunghezza d'onda che soddisfa l'equazione di Bragg:

$$\boxed{\rho m \lambda = 2 n_g \sin i_g}$$

La luce incidente che non soddisfa la condizione di Bragg è diffratta con meno efficienza, mentre quella che si allontana molto passa attraverso il grating sostanzialmente non diffratta.
Il vantaggio dei grating VPH quello di avere un'efficienza molto alta vicino al picco di Bragg (80-90%), che dipende però anche dallo spessore del grating e dal contrasto delle frange. L'efficienza di picco dei grating VPH può essere spostata in lunghezza d'onda inclinando il grating rispetto alla luce incidente, cambiando quindi la lunghezza d'onda che soddisfa la condizione di Bragg. Al contrario, i grating classici, lavorati in superficie, hanno profili blazed fissi e l'efficienza di diffrazione resta relativamente invariata anche cambiando l'angolo di incidenza della luce. Per questa ragione diventa necessario avere diversi grating con diversi angoli di blaze. Quindi nel caso dei VPH non solo si può variare la funzione di blaze, ma anche cambiare la dispersione del grating. Inoltre è possibile creare VPH multipli, per esempio unendo due o più grating ognuno in grado di agire su regioni diverse dello spettro. In particolare ogni grating può essere fatto in modo da soddisfare la condizione di Bragg ad una certa lunghezza d'onda, senza influenzarsi a vicenda. Anzi, facendo in modo che le frange dell'uno siano leggermente ruotate rispetto alle frange dell'altro si può ottenere un effetto di cross-dispersion che separi fisicamente le due regioni dello spettro.

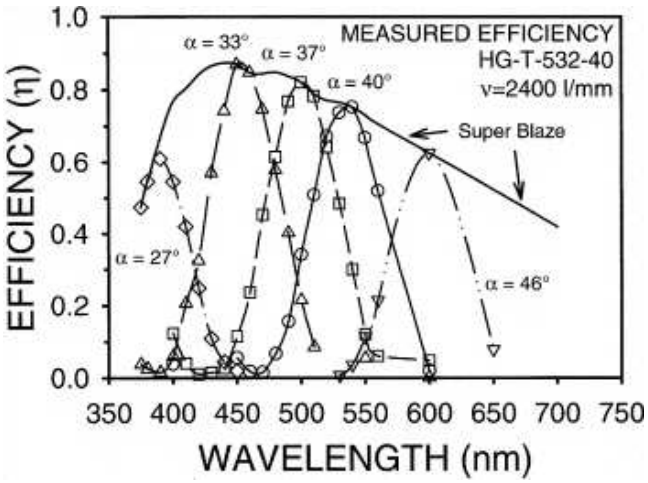


Figura 6.6: Efficienza quantica di un grating VPH con 2400 tratti/mm. Al variare dell'angolo di incidenza α, varia l'intervallo di trasmissione della luce e varia anche l'efficienza.

Svantaggi dei VPH sono:

- il picco di blaze è relativamente stretto;
- per cambiare la condizione di blaze non solo bisogna cambiare l'inclinazione del grating, ma anche l'angolo fra collimatore e camera, perché gli angoli di incidenza e di diffrazione devono essere uguali ed è variando l'angolo di incidenza che si modifica la condizione di Bragg. La soluzione può

essere cambiare il grating con un altro che abbia diversa inclinazione delle frange.

Per evitare questi problemi geometrici è possibile combinare il grating VPH con due prismi di uguale indice di rifrazione, ottenendo un **grism VPH**. Il prisma dal lato del collimatore invia la luce verso il grating al corretto angolo di Bragg, mentre l'altro prisma agisce al contrario e rende il fascio uscente parallelo a quello incidente e in asse (Fig. 6.7).

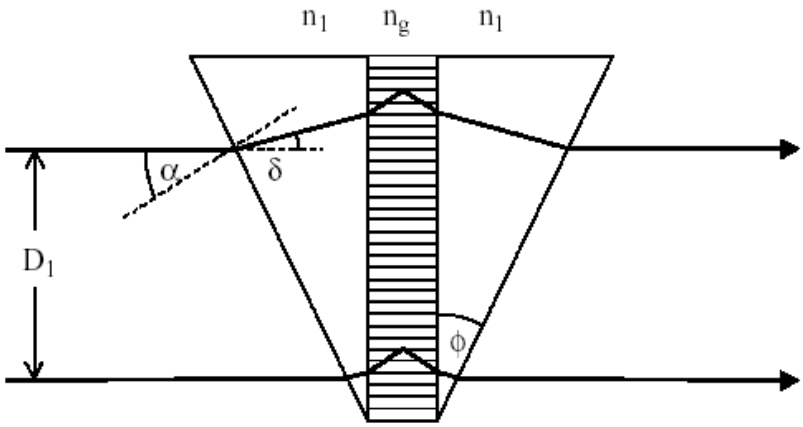


Figura 6.7: Schema ottico di un grism VPH.

7
Tecniche spettroscopiche

Nel Capitolo 1 si è parlato del potere risolutivo teorico del telescopio, legato alla figura di diffrazione, e del potere risolutivo reale che, nella gran parte dei casi, è determinato dal seeing. Il seeing, che riguarda esclusivamente le osservazioni da Terra, si valuta misurando la Full Width at Half Maximum (FWHM), cioè la larghezza a metà altezza, della distribuzione di luce di una o più sorgenti puntiformi sul piano focale del telescopio. Questa distribuzione di luce si chiama tecnicamente **Point Spread Function** (**PSF**) ed è causata dall'effetto combinato delle aberrazioni ottiche e del seeing. In prima approssimazione, la PSF delle stelle riportata in grafico ha la forma di una gaussiana, ma in generale non è così e conoscerne le caratteristiche è di fondamentale importanza sia per le osservazioni fotometriche che per quelle spettroscopiche.
La funzione di Gauss è definita da un centro di simmetria (x_0) in corrispondenza del quale si ha la massima ampiezza I_0, e da un parametro σ che ne determina la larghezza:

$$f(x) = I_0 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

L'integrale di questa funzione vale:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi} I_0 \sigma$$

Se al posto di σ utilizziamo la FWHM, abbiamo: FWHM $= \sqrt{8 \ln 2}\ \sigma = 2.35482\ \sigma$, e l'integrale diventa: $I = \sqrt{\frac{\pi}{4 \ln 2}}\ I_0$ FWHM $= 1.064467\ I_0$ FWHM.

7.1 Longslit

Lo spettrografo classico utilizza una fenditura lunga, più in generale chiamata **slit**, come finestra d'entrata della luce e per questa ragione si parla di spettroscopia **a fenditura lunga** o **longslit**.
La slit è un'apertura rettangolare di larghezza variabile, con dimensioni dell'ordine del secondo d'arco, e lunghezza fissa, con dimensioni di alcuni minuti d'arco. La scelta della larghezza della slit è lasciata all'osservatore e dipende dal tipo di ricerca che si sta effettuando. Spesso si basa sul seeing misurato al momento dell'osservazione: ad esempio, se il seeing vale $3''$, tenere la slit aperta

a 1″ significa perdere almeno il 60-70% del flusso, mentre aprendola a 3″ si perde circa il 30%. In Fig. 7.1 è riportata la frazione di luce che passa attraverso una slit di una certa larghezza in funzione del seeing. Si faccia attenzione che in questo caso il calcolo è puramente teorico perché presuppone che la PSF sia perfettamente gaussiana. Si noti comunque come la slit dovrebbe essere aperta a valori che sono almeno il triplo del seeing per raccogliere tutto il flusso. Ma non si deve mai dimenticare che aprendo la slit diminuisce il potere risolutivo, cioè le righe spettrali di allargano!

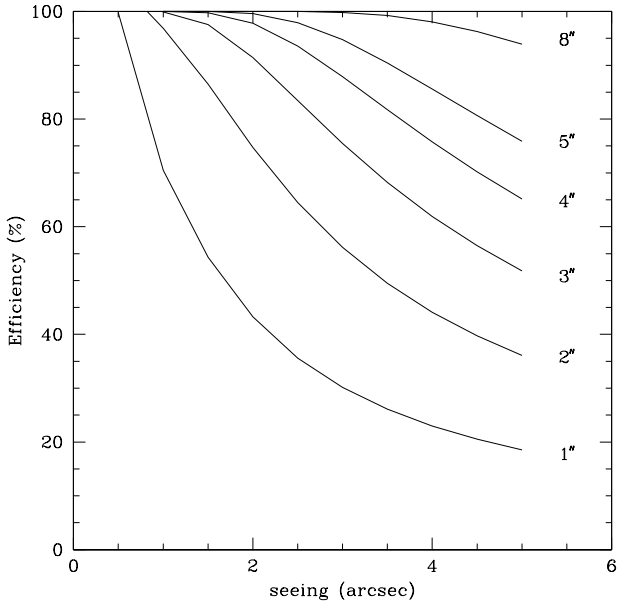


Figura 7.1: Nel caso di PSF perfettamente gaussiana, questo grafico mostra la frazione di luce di una sorgente puntiforme che passa attraverso una slit di larghezza variabile, in funzione del seeing misurato in secondi d'arco.

Nello spettrografo la slit è orientata ortogonalmente alla direzione della dispersione della luce. Se così non fosse, gli spettri di più sorgenti eventualmente inquadrate dalla slit andrebbero a sovrapporsi. Quindi la funzione della slit è quella di permettere all'osservatore di selezionare la sorgente da osservare e anche di aumentare il potere risolutivo dello strumento. La slit è orientabile in cielo, nel senso che tutto lo spettrografo può ruotare attorno all'asse ottico del telescopio: questo permette di osservare due sorgenti di piccole dimensioni angolari alla volta (o anche tre se c'è un allineamento fortunato) oppure di osservare un oggetto esteso a vari angoli di posizione.
In Fig. 7.2 è mostrato un esempio di spettro longslit ottenuto con lo spettrografo Boller & Chivens montato al fuoco Cassegrain del telescopio Galileo di Asiago di 1.20 m. A sinistra si può vedere l'immagine di una galassia, immagine estratta dalla Digitized Sky Survey (DSS), su cui è stata disegnata la slit per mostrare quale porzione dell'oggetto è stata osservata. A destra c'è lo spettro, la dispersione è sull'asse orizzontale, con le lunghezze d'onda che crescono da sinistra a destra, mentre sull'asse verticale c'è la distribuzione di luce della galassia lungo

la slit. Da ogni zona della galassia la cui luce entra nello spettrografo attraverso la slit si ottiene uno spettro. La striscia orizzontale più luminosa è lo spettro del centro della galassia, in corrispondenza del quale c'è il picco di brillanza superficiale. Allontandandosi dal centro, lungo la direzione spaziale, ossia lungo la slit, la brillanza diminuisce progressivamente e lo spettro si indebolisce fino a scomparire. Le linee verticali brillanti, con un' estensione limitata alla galassia, sono righe spettrali in emissione della galassia stessa, prodotte da regioni di gas ionizzato (nebulose, regioni di formazione stellare, ecc.). Mentre, le linee estese da un lato all'altro dell'immagine sono righe spettrali in emissione del cielo. Il cielo è una sorgente di luce che si aggiunge a quella della sorgente osservata, sottoforma di emissione diffusa e righe spettrali sia da transizioni atomiche che, soprattutto, molecolari. Ad esse si aggiungono le righe spettrali date dall'illuminazione artificiale, più o meno intense a seconda del livello di inquinamento luminoso.

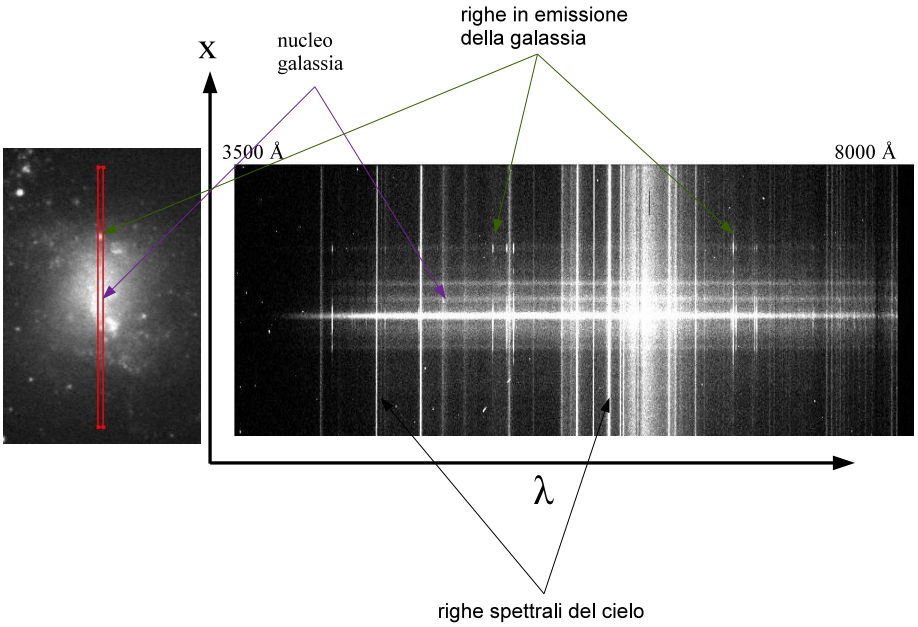


Figura 7.2: Spettro longslit di una galassia. A sinistra l'immagine dell'oggetto osservato con la slit disegnata sopra e a destra lo spettro ottenuto con il B&C del 1.20 m ad Asiago.Sono indicate alcune righe di emissione di una regione all'interno della galassia (in verde), lo spettro del nucleo della galassia (in viola), le righe di emissione del cielo (in nero).

7.2 Slitless

Cosa accade se si rimuove la slit? Accade che si ottiene uno spettro per ciascuna delle sorgenti presenti sul piano focale del telescopio. Da un lato questo è un grande vantaggio, in quanto permette di avere l'informazione spettroscopica di

un numero elevato di oggetti in un colpo solo, dall'altro senza la slit si perde risoluzione spettrale e si ottiene un'immagine nella quale oggetti vicini daranno origine a spettri sovrapposti. Per limitare questo secondo problema, in genere si utilizzano grism a bassa dispersione che producono spettri corti, cioè con piccola estensione sul piano focale dello strumento.

In Fig. 7.3 è mostrato uno spettro slitless della supernova SN1987A ottenuto con la camera ACS dell'Hubble Space Telescope. In questa immagine il colore celeste è l'ordine zero e al tempo stesso l'immagine dell'area di cielo osservata, mentre in arancione sono rappresentati gli spettri. L'anello di gas ionizzato della supernova si ripete con intensità diverse alle lunghezze d'onda corrispondenti alle transizioni atomiche che producono le righe spettrali. Qui le righe spettrali in emissione, che si osserverebbero se fosse presente la slit, sono sostituite da immagini quasi monocromatiche della supernova.

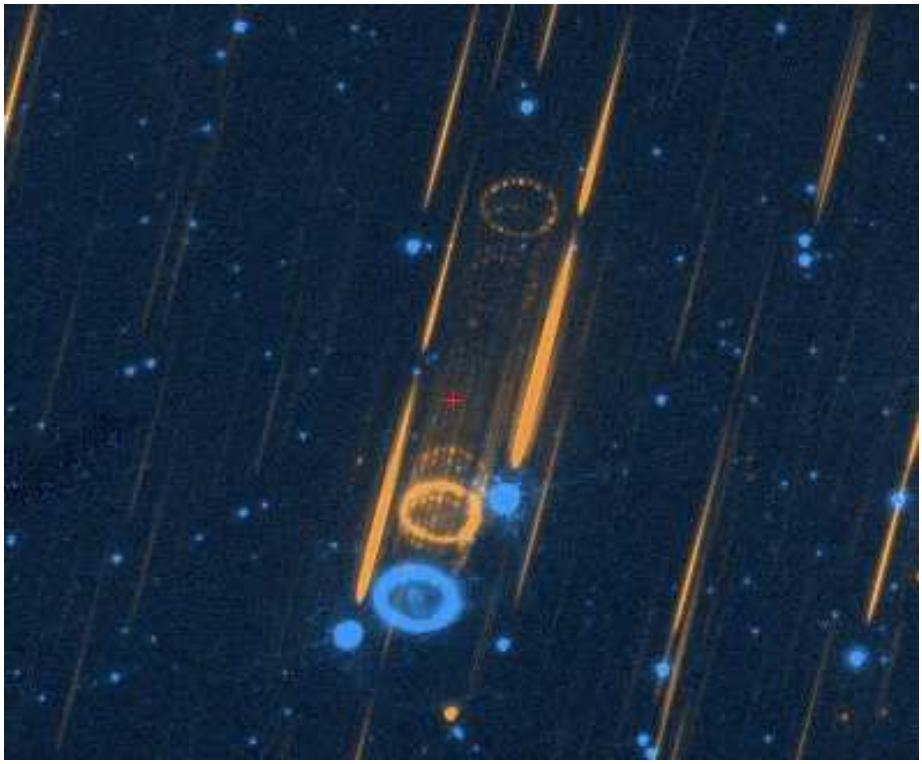


Figura 7.3: Spettro slitless della supernova SN1987A.

La spettroscopia slitless è stata molto utilizzata in passato in particolare con i telescopi Schmidt dotati di **prisma–obiettivo**. Si tratta di un prisma (o talvolta un grating) a bassa dispersione, collocato di fronte all'obiettivo del telescopio, in grado di produrre spettri di tutti gli oggetti presenti nel campo di vista. Poiché il campo nei telescopi Schmidt è molto grande (1°–5°), si potevano ottenere gli spettri di migliaia di oggetti. Spettri ottenuti con il prisma–obiettivo sono in genere usati per classificare stelle, per identificare sorgenti a righe d'emissione, quasar, stelle blu, etc.

Due survey famose sono state senz'altro la **Hamburg Quasar Survey** effettuata con l'Hamburg Schmidt dell'Osservatorio di Calar Alto (Spagna) negli anni '80 e la **Hamburg/ESO Survey** effettuata ad ESO–La Silla (Cile) con lo Schmidt da 1 m negli anni '90. La prima survey ha osservato l'intero emisfero nord, ad esclusione della Via Lattea, con una dispersione di 1390 Å/mm e una risoluzione di 45 Å, la seconda survey ha coperto l'emisfero sud con una dipersione di 450 Å/mm e una risoluzione di 15 Å.
La Fig. 7.4 mostra a sinistra l'immagine di un'area di cielo, a destra la stessa area ma osservata per mezzo di un prisma obiettivo. Le due immagini sono prese dalla KPNO International Spectroscopic Survey (KISS), una survey più recente effettuata con il Burrell Schmidt dell'osservatorio di Kitt Peak in Arizona e dedicata alla ricerca di sorgenti extragalattiche a righe d'emissione (AGN e galassie star–forming). I trattini orizzontali visibili nella figura a destra sono stati aggiunti per indicare la presenza di almeno una riga in emissione in alcuni spettri.

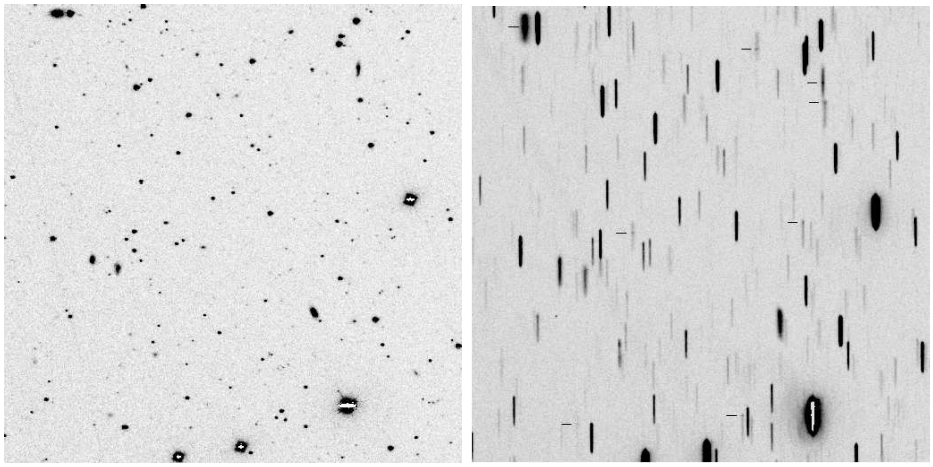


Figura 7.4: Un esempio di spettro ottenuto con prisma–obiettivo (a destra). Per confronto (a sinistra) è riportata l'immagine della stessa area di cielo, utile per associare ogni sorgente al suo spettro.

7.3 Multiobject

Una soluzione intermedia fra la spettroscopia longslit, che consente di osservare più oggetti solo se questi sono allineati lungo la slit, e la spettroscopia slitless che produce uno spettro per ogni sorgente nel campo di vista del telescopio, ma a bassa risoluzione, è senza dubbio la spettroscopia **multiobject**, chiamata anche **MOS**: si tratta di applicare la spettroscopia classica a molti oggetti, solo che stavolta la slit per ogni oggetto è molto corta (qualche decina di secondi d'arco). In pratica, si osserva un'area di cielo con il telescopio acquisendo un'immagine (fase di pre–imaging), sulla base della quale si costruisce una maschera su cui vengono disegnate e tagliate le **minislit** in modo tale che ripuntando il telescopio ogni slit cada esattamente in corrispondenza degli oggetti che si intendono osservare. Di solito ogni maschera ha due fori circolari (**pinhole**) in corrispon-

denza di due stelle brillanti presenti nel campo di vista, che vengono usati per riposizionare il telescopio con precisione.

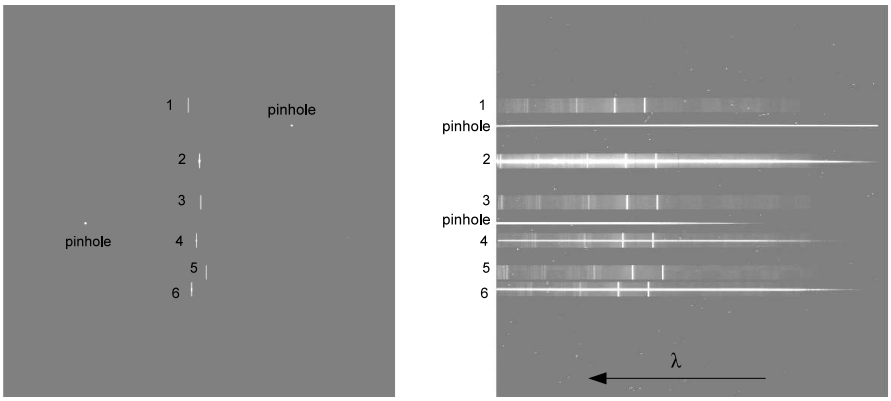


Figura 7.5: Esempio di spettro multiobject. A sinistra la maschera su cui sono posizionate le minislit e i pinhole. A destra il risultato che in questo caso consiste in 6 spettri acquisiti contemporaneamente.

La Fig. 7.5 a sinistra mostra un esempio di maschera su cui sono state tagliate 6 minislit e posizionati 2 pinhole. Solo la luce che passa attraverso le minislit e il pinhole entra nello spettrografo che la disperde. Il risultato, visibile a destra è una serie di striscie, ognuna delle quali è uno spettro prodotto da una delle minislit centrate su un oggetto. In particolare gli spettri 2, 4 e 6 contengono una sorgente. Gli spettri 1, 3 e 5 sembrano vuoti, si notano solo le righe di cielo: questo risultato è voluto, infatti a causa del fatto che le minislit sono di solito lunghe pochi secondi d'arco, la sottrazione del cielo risulta essere molto complicata specie in caso di sorgenti estese. Per questa ragione si osservano regioni di cielo ad una certa distanza dagli oggetti. Oltre alla maschera c'è la possibilità di utilizzare un sistema **multislit**. In questo caso le minislit si trovano su dei supporti scorrevoli, il posizionamento risulta più semplice, ma la distanza fra le slit è fissa e quindi il sistema è meno flessibile (Fig. 7.6).

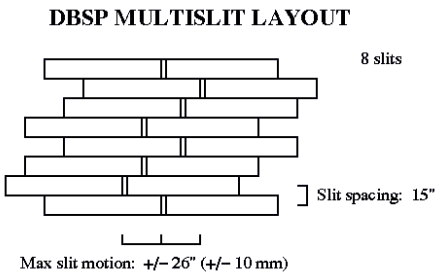


Figura 7.6: Schema di un multislit. Le minislit sono adiacenti e non possono essere distanziate.

Si noti come le minislit siano quasi allineate ortogonalmente alla dispersione: in teoria il vantaggio del multiobject sarebbe quello di poter scegliere qualsia-

si oggetto nel campo di vista inquadrato dal telescopio. In pratica, però, avere minislit distribuite a caso finisce con il produrre spettri con intervalli di lunghezza d'onda tutti molto diversi fra di loro. Infatti, in Fig. 7.5 a destra, le righe spettrali del cielo non sono tutte allineate, pur avendo tutte la stessa lunghezza d'onda, perché la luce raggiunge il grating da direzioni diverse. Guardando bene una stessa riga di cielo nei 6 spettri, si vede che essa si sposta seguendo lo schema delle minislit.

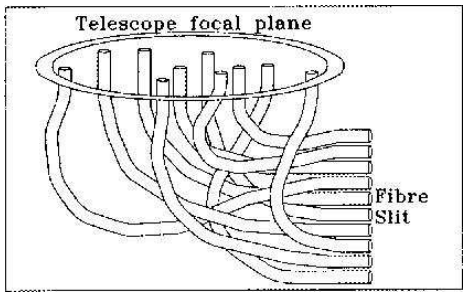


Figura 7.7: Schema di un multifibra. La maschera in questo caso consiste in un certo numero di fori ognuno dei quali è accoppiato con un estremità di una fibra, all'altra estremità le fibre sono riallineate a formare la pseudoslit.

In tal senso, una variante del MOS è la spettroscopia **multifibra** (Fig. 7.7). Le fibre ottiche vengono posizionate sul piano focale del telescopio in modo da coincidere con gli oggetti da osservare. Anche in questo caso è necessario il pre–imaging, cio l'acquisizione di un'immagine dalla quale dedurre le posizioni dei target da osservare. Il vantaggio delle fibre è che se ne possono posizionare molte (centinaia) e con relativa facilità. Lo svantaggio è che manca l'informazione spaziale, già molto ridotta quando si usano minislit: ad esempio la fibra raccoglie la luce di tutta una sorgente estesa, come una galassia, quando essa è lontana, oppure tipicamente della parte centrale di essa, quando è più vicina. Le fibre vengono poi riallineate a formare quella che si chiama **pseudoslit** e gli spettri che si ottengono da ogni sorgente hanno tutti lo stesso intervallo di lunghezza d'onda. La più importante survey spettroscopica degli ultimi anni, la **Sloan Digital Sky Survey** (SDSS) è stata ottenuta con questa tecnica.

7.4 Integral–Field

Una tecnica sviluppata negli anni '90 e divenuta successivamente molto importante e diffusa è sicuramente la spettroscopia **integral–field** o **IFS**. La spettroscopia longslit, come è già stato detto, permette di avere informazioni solo in una direzione spaziale, quella della slit, che è una finestra molto stretta. Per coprire una sorgente estesa con uno spettrografo longslit bisogna spostare la slit parallelamente a se stessa e acquisire uno spettro alla volta: questa tecnica è chiamata **longslit scanning**. Essa richiede molto tempo di osservazione e quindi non è efficiente. Al contrario, la spettroscopia integral–field permette di mappare una sorgente estesa in regioni con dimensioni dell'ordine del secondo d'arco (o meno) da ciascuna delle quali si ottiene uno spettro (Fig. 7.8). Il campo di vista dello spettrografo integral–field in genere è abbastanza piccolo, da pochi secondi d'ar-

co a una decina/ventina di secondi d'arco. Pochissimi strumenti hanno campi più grandi. Questo perché bisogna mediare fra il bisogno di risoluzione spaziale, quindi mappare con regioni sempre più piccole, e il conseguente aumento del numero di spettri che si ottengono con una singola osservazione. Un campo di vista di $1' \times 1'$ con un campionamento spaziale di $1'' \times 1''$, implica un'acquisizione di 3600 spettri alla volta! Sotto questo aspetto, la slit è ancora più vantaggiosa dell'integral–field, potendo raggiungere lunghezze di svariati minuti d'arco.

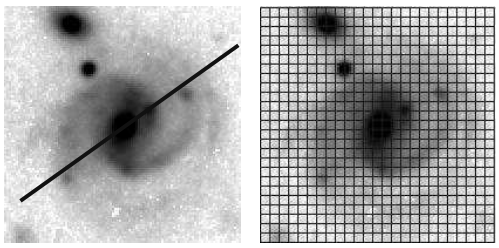


Figura 7.8: Una galassia a spirale è osservata con spettroscopia longslit (a sinistra) e con spettroscopia integral-field (a destra).

Ci sono tre diversi modi di realizzare la spettroscopia integral–field (Fig. 7.9):

1) Sul piano focale del telescopio è collocata una matrice di microlenti. Ogni microlente osserva una porzione di cielo e invia la luce verso il collimatore e poi verso il reticolo, che a sua volta produce uno spettro. Per evitare la sovrapposizione degli spettri sul detector, la matrice di microlenti è ruotata rispetto alla direzione della dispersione.

2) Sul piano focale del telescopio è collocata una matrice di microlenti. Dietro ogni microlente c'è una fibra ottica che trasporta la luce verso il reticolo. Le fibre sono riallineate a formare la cosidetta pseudoslit. Gli spettri sono tutti paralleli e allineati sul rivelatore.

3) Sul piano focale del telescopio sono collocati degli specchietti metallici che sezionano l'immagine. Le varie sezioni sono riallineate a formare la pseudoslit che diventa la finestra di entrata dello spettrografo.

In tutti e tre i casi l'apparato strumentale che viene posizionato sul piano focale del telescopio e che invia la luce al collimatore è chiamato **unità integral–field** o **IFU**. I dati prodotti da una IFU sono spesso indicati come **dati cubici**, perché essi contengono l'informazione spettrale (λ) per ogni posizione (x,y o α,δ) sull'immagine della sorgente osservata. In pratica, dal dato integral–field si può ricostruire il cubo x,y,λ dato dall'insieme delle immagini monocromatiche della sorgente.
In Fig. 7.11 è mostrato uno spettro integral–field di una galassia ottenuto con lo spettrografo MPFS montato al fuoco primario del telescopio BTA di 6 m in Russia. L'IFU del MPFS consiste di una matrice di 256 microlenti, organizzate in un array di 16×16. Ogni lente inquadra un'area di cielo di $1'' \times 1''$. Il dato assomiglia molto a uno spettro longslit, ma in realtà è un insieme di 256 spettri. La lunghezza d'onda cresce da sinistra a destra. Si nota il continuo della galassia osservata, le righe in emissione, a forma di S per effetto della rotazione, e le

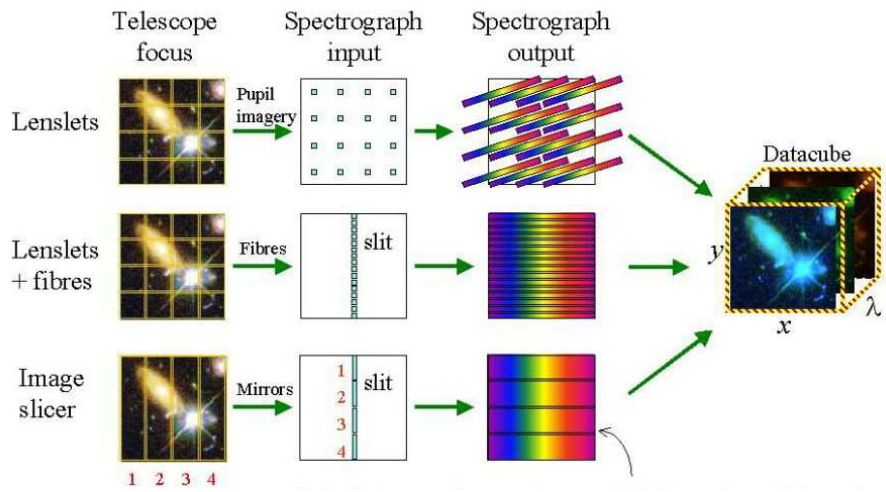


Figura 7.9: I tre diversi modi per ottenere un dato integral–field.

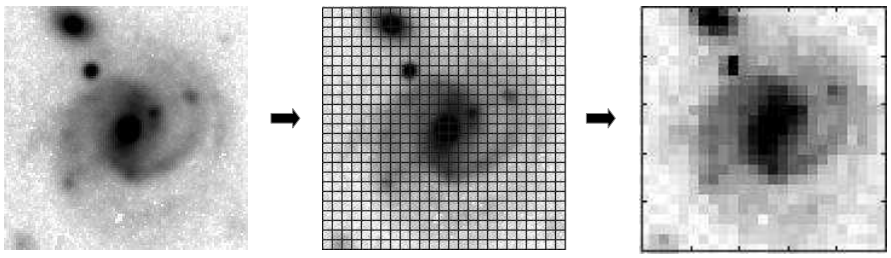


Figura 7.10: Immagine della galassia sul piano focale del telescopio (a sinistra), osservata attraverso la matrice di lenti dell'unità integral field (al centro). Immagine ricostruita misurando il flusso della galassia in ogni spettro (a destra).

righe di cielo. Analizzando ogni spettro e conoscendone la posizione (x,y) nella matrice di 16×16 microlenti, è possibile ricostruire un'immagine dell'oggetto osservato in qualsiasi dato misurato (ad esempio il flusso di una riga spettrale) o parametro calcolato (temperatura, densità, etc.).

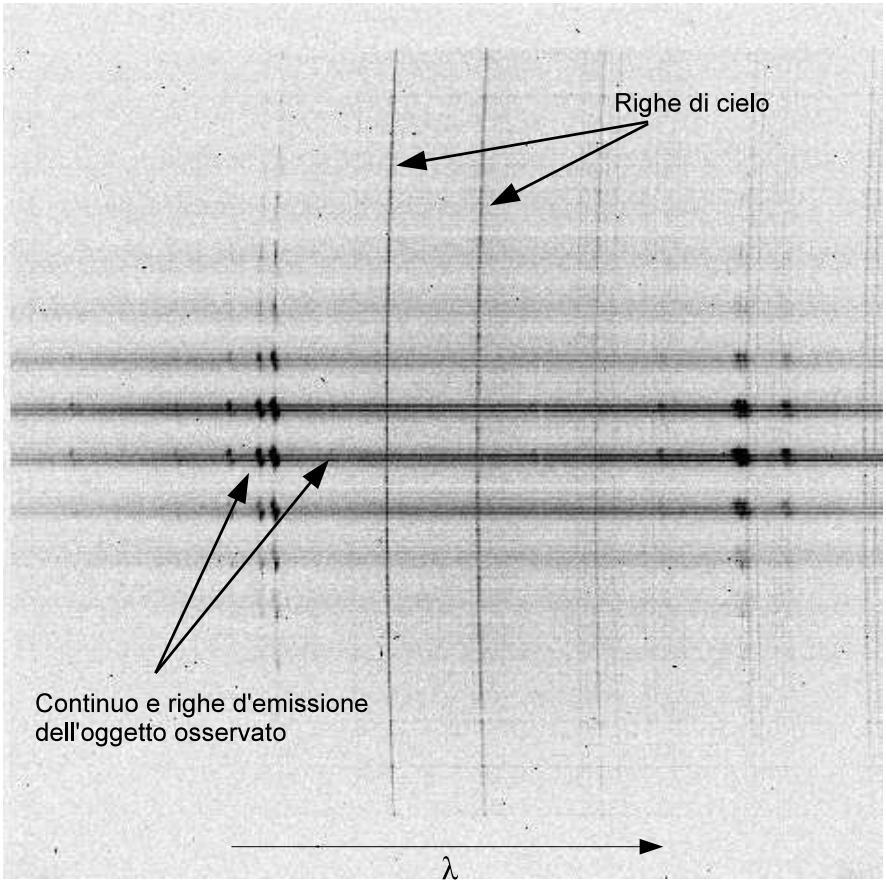


Figura 7.11: Spettro integral-field: la dispersione è in orizzontale, mentre in verticale ci sono i 256 spettri. Le righe di cielo sono presenti in ogni spettro, mentre quelle di emissione della galassia solo in alcune zone. Queste righe mostrano la tipica distorsione a S causata dalla rotazione della galassia.

8

Filtri fotometrici

La potenza totale emessa da una sorgente luminosa è chiamata **luminosità bolometrica**. Poiché l'energia emessa varia con la lunghezza d'onda, è usuale misurare il flusso di luce in intervalli di lunghezza d'onda ristretti per mezzo di filtri. Con il termine **filtro** si intende un sistema ottico che trasmette solo una porzione dello spettro elettromagnetico.
Esistono 3 tipi di filtri per fotometria: i filtri a banda larga o **broad-band filters**, i filtri a banda intermedia e infine i filtri interferenziali a banda stretta o **narrow-band filters**.
I filtri sono caratterizzati dalla **curva di trasmissione S(λ)**, anche chiamata curva di risposta, che descrive la percentuale di luce trasmessa dal filtro in funzione della lunghezza d'onda, e dalla **larghezza di banda** o banda passante, che descrive l'intervallo di lunghezze d'onda trasmesso dal filtro, tipicamente misurato a metà del picco di trasmissione (**FWHM** = Full Width at Half Maximum).

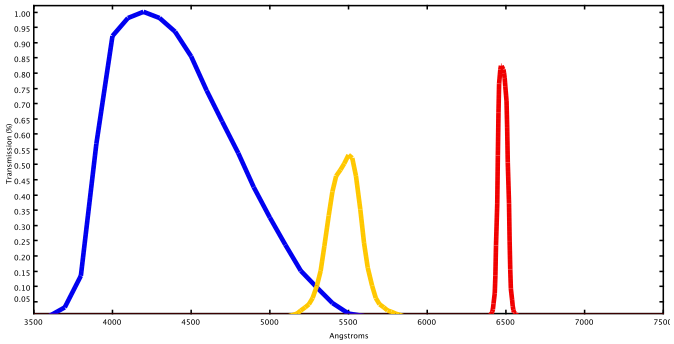


Figura 8.1: Esempi di curve di trasmissione di tre filtri diversi. A sinistra (in blu) il filtro Bessell B, al centro (in giallo) il filtro Strömgren y, a destra (in rosso) il filtro Hα.

In Fig. 8.1 sono riportate le curve di trasmissione del filtro a banda larga B nel sistema fotometrico UBVRI di Bessell (1990), del filtro a banda intermedia y del sistema ubvyHβ di Strömgren (1956) e infine di un filtro interferenziale centrato sulla riga Hα a 6563 Å. Le larghezze di banda valgono circa 900 Å, 240 Å e 75 Å.

In generale, il flusso di energia misurato a terra (f) è il risultato del passaggio della radiazione emessa da una sorgente attraverso l'atmosfera, il telescopio e le ottiche dello strumento utilizzato. A questo si deve aggiungere il filtro e il detector:

$$f = \int_0^\infty f_0(\lambda)T(\lambda)R(\lambda)S(\lambda)d\lambda$$

dove $f_0(\lambda)$ è il flusso che incide sull'atmosfera terrestre, $T(\lambda)$ è la frazione di luce trasmessa dall'atmosfera, $R(\lambda)$ è l'efficienza strumentale (ottiche e detector) e infine $S(\lambda)$ è la funzione di trasmissione del filtro.
La Fig. 8.2 mostra degli esempi di curve di trasmissione atmosferica per un oggetto osservato allo zenith, cioè a massa d'aria uguale a 1. Ogni curva corrisponde ad altitudini diverse. Ovviamente l'atmosfera è più trasparente quando si osserva ad alta quota. Nonostante questo l'assorbimento resta comunque elevato nella parte blu/vicino UV dello spettro. Per lunghezze d'onda inferiori a 3000 Å l'atmosfera risulta del tutto opaca alla radiazione.

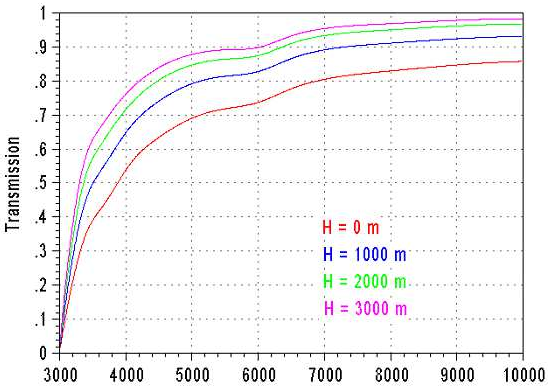


Figura 8.2: Curve di trasmissione atmosferica a diverse altitudini per un oggetto osservato allo zenith. L'atmofera è più trasparente al crescere dell'altitudine.

8.1 Filtri broad–band

Esisitono decine di sistemi fotometrici, ciascuno basato su un set di filtri. I filtri a banda larga oggi chiamati Bessell sono l'insieme del sistema UBV di Johnson e del sistema RI di Cousins. Tali filtri si ottengo accoppiando vetri colorati, ogni vetro ha la sua curva di trasmissione e la sovrapposizione delle curve produce un filtro con una forma a campana. Ad esempio, il filtro in banda V si ottiene accoppiando un vetro giallo, il GG495, con un vetro blu–verde, il BG39 (Fig. 8.3).
La Fig. 8.4 riporta le curve di trasmissione dei filtri UBVRI. Ogni filtro è caratterizzato da una lunghezza d'onda media o efficace (che non corrisponde alla lunghezza d'onda di picco) e da una larghezza di banda. Questi valori sono riportati nella tabella in unità di nm.
Fare fotometria significa misurare il flusso luminoso proveniente da una sorgente. Con due filtri si ottiene l'**indice di colore** della sorgente che come sappiamo

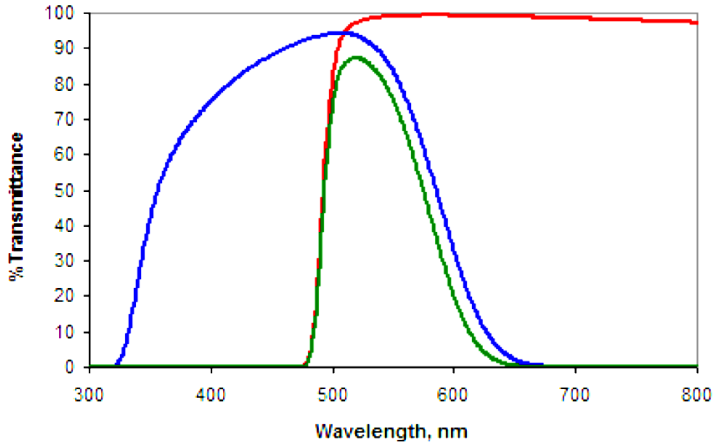
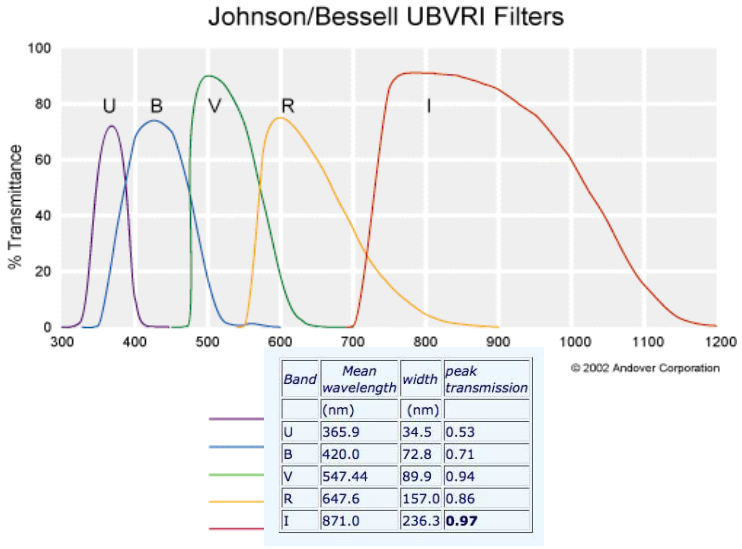


Figura 8.3: Il filtro Bessell V si ottiene unendo un filtro blu–verde con un filtro giallo. In figura si vedono le curve di trasmissione dei due vetri, rispettivamente in rosso e blu, e la combinazione delle due che produce il filtro V, in verde.



Band	Mean wavelength	width	peak transmission
	(nm)	(nm)	
U	365.9	34.5	0.53
B	420.0	72.8	0.71
V	547.44	89.9	0.94
R	647.6	157.0	0.86
I	871.0	236.3	**0.97**

Figura 8.4: Curve di trasmissione dei filtri Bessell UBVRI.

è legato alla temperatura. Dalla definizione di magnitudine, l'indice di colore vale:

$$c_{1,2} = m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{f_1}{f_2} \right) + k$$

dove $m_1 = m(\lambda_1)$ e $m_2 = m(\lambda_2)$, con $\lambda_1 < \lambda_2$, sono le magnitudini nelle due bande, f_1 e f_2 sono i flussi nelle due bande, mentre k è una costante additiva. Sostituendo adesso ai flussi l'espressione del corpo nero in approssimazione di Wien, si ottiene:

$$c_{1,2} = -2.5 \log_{10} \left(\frac{\frac{A}{\lambda_1^5} e^{-\frac{B}{\lambda_1 T}}}{\frac{A}{\lambda_2^5} e^{-\frac{B}{\lambda_2 T}}} \right) + k = \frac{a}{T} + b$$

dove A, B, a, b sono costanti.

Dal punto di vista spettroscopico, misurare il flusso di una sorgente in due bande fotometriche diverse, meglio se distanti in lunghezza d'onda, significa determinare la pendenza del suo spettro e quindi capire se si tratta di una sorgente calda o fredda. Nel caso di una stella calda la quantità di flusso emessa nella regione blu/violetto è maggiore di quella emessa nel rosso, quindi l'indice di colore atteso è negativo. Nel caso invece di una stella fredda la quantità di flusso emessa nella regione blu/violetto è sicuramente minore di quella emessa nel rosso, quindi l'indice di colore atteso è positivo (Fig. 8.5).

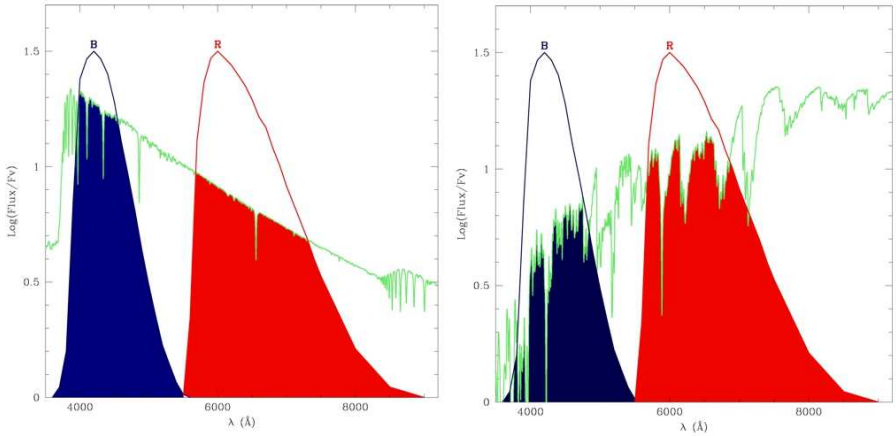


Figura 8.5: Lo spettro di una stella calda (a sinistra) e di una stella fredda (a destra) a cui sono sovrapposte le curve di trasmissione dei filtri B e R. Le aree colorate blu e rosse sono i flussi misurati che passano attraverso ognuno dei due filtri.

Fare fotometria con l'uso di più filtri equivale di fatto a fare spettroscopia a bassissima risoluzione. Infatti, misurando la magnitudine in varie bande si ottengono i valori di flusso relativi alla lunghezza d'onda efficace di ogni banda con i quali è possibile ricostruire la **Spectral Energy Distribution** o **SED** della sorgente osservata. La SED non è propriamente uno spettro, ma comunque consente di avere un'idea della forma dello spettro ed è chiaro che più valori fotometrici si hanno, migliore è la definizione della forma dello spettro.
La SED può essere confrontata con lo spettro di diversi tipi di sorgenti per identificarne la natura. Se il confronto avviene con spettri a vario redshift, è possibile avere una stima della distanza della sorgente. Su questo principio si basa la moderna tecnica dei redshift fotometrici, divenuta molto popolare negli ultimi anni grazie alle numerose survey spettrofotometriche che hanno portato all'identificazione di milioni di sorgenti. Per misurare il redshift di una galassia serve uno spettro, dal quale identificare una o più righe spettrali, in assorbimento o emissione, la cui posizione è da confrontare con il valore di laboratorio

(detto *rest–frame*). Quando le sorgenti sono migliaia è impossibile ottenere lo spettro di ciascuna di esse in breve tempo, quindi si ricorre alla tecnica dei redshift fotometrici.

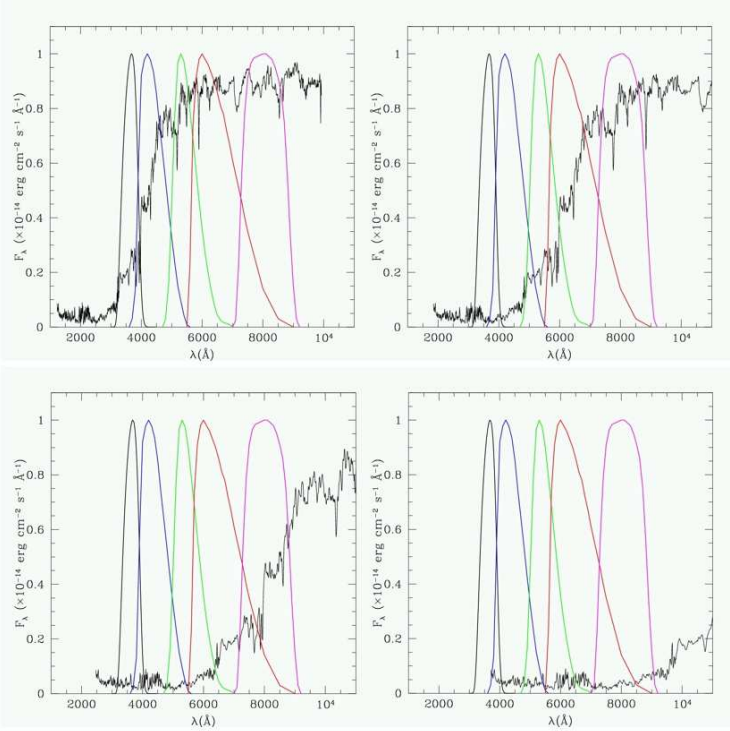


Figura 8.6: Da in alto a sinistra a in basso a destra lo spettro di una galassia ellittica a z=0, 0.5, 1 e 2. Sono riportate le bande fotometriche UBVRI. Il flusso della galassia non è stato scalato per tenere conto della distanza.

Consideriamo una galassia ellittica a z=0 osservata nelle 5 bande fotometriche UBVRI (Fig. 8.6, in alto a sinistra). La minor quantità di segnale si ha nella banda U. Se la galassia si trova a redshift più alto, z=0.5, diventa praticamente invisibile in U e molto debole in B (Fig. 8.6, in alto a destra). A z=1 la galassia risulta invisibile in U e B, molto debole in V (Fig. 8.6, in basso a sinistra). Infine, a z=2 la galassia risulta quasi invisibile in tutte le bande e servono osservazioni fotometriche nel vicino infrarosso per poterla osservare (Fig. 8.6, in basso a destra). È chiaro che questo effetto si ottiene per la particolare forma dello spettro della galassia, composta in gran parte di stelle vecchie e perciò con intensità decrescente alle lunghezze d'onda più corte. Lo stesso non vale se consideriamo una galassia Sc o Sd con forte formazione stellare, e quindi molte stelle giovani e calde che emettono nel blu, vicino ultravioletto e ultravioletto, oppure galassie attive come Seyfert 1 e quasar.

8.2 Filtri narrow–band

Per osservare con bande fotometriche molto strette si utilizzano i filtri interferenziali. Questi filtri sono basati sul principio dell'interferenza fra onde che percorrono cammini ottici diversi.

Immaginiamo di avere due lamine sottili, semi-trasparenti (Fig. 8.7). Il materiale all'interno delle due lamine abbia indice di rifrazione n, mentre quello all'esterno abbia indice n_0. Quando un raggio luminoso S incide sulla superficie della prima lamina nel punto R_0 con un angolo ϕ rispetto alla normale alla superficie, parte di esso viene riflesso (R), parte trasmesso all'interno con un angolo ϕ_1 secondo la legge di Snell e incide sulla seconda superficie nel punto T_1. In quel punto, parte del raggio viene riflessa internamente e raggiunge la prima superficie nel punto R_1, parte viene trasmessa attraverso la seconda lamina ed esce con un angolo pari all'angolo di incidenza ϕ. Dal punto R1 di nuovo il raggio viene riflesso verso la seconda lamina, arriva in T_2 e viene sia riflesso verso R_2 che trasmesso. Si genera così un fascio di onde sfasate perché percorrono cammini ottici diversi, le quali vanno a interferire.

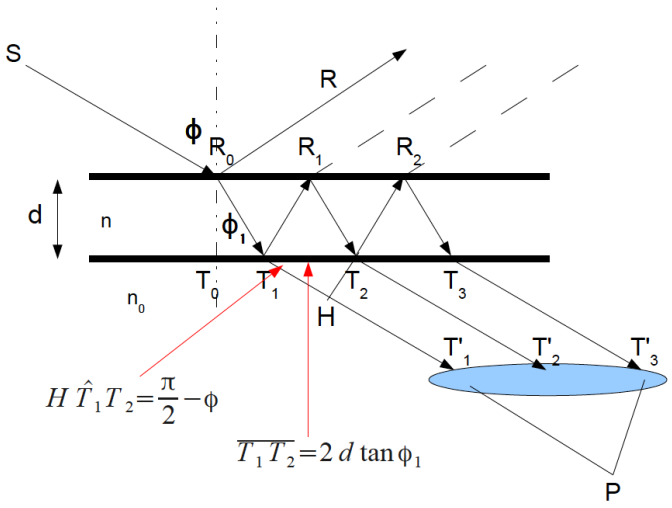


Figura 8.7: Schema di funzionamento di un filtro interferenziale.

Se T e R sono le frazioni di energia trasmesse e riflesse a ogni passaggio di superficie, e se a^2 è l'intensità del raggio incidente, le intensità dei raggi uscenti saranno:

$$I_1 = a^2 \cdot T \cdot T = a^2T^2$$
$$I_2 = a^2 \cdot T \cdot R \cdot R \cdot T = a^2T^2R^2$$
$$I_3 = a^2 \cdot T \cdot R \cdot R \cdot R \cdot R \cdot T = a^2T^2R^4$$
$$\ldots$$

Quindi ogni raggio emergente sarà un'onda di ampiezza:

$$aTe^{i\omega t}$$
$$aTRe^{i(\omega t-\alpha)}$$
$$aTR^2e^{i(\omega t-2\alpha)}$$
$$...$$

dove α è la differenza di fase fra un'onda emergente e la successiva.

L'ampiezza complessa della somma di questi raggi vale:

$$z = aT\left(1 + Re^{-i\alpha} + R^2e^{-i2\alpha} + R^3e^{-i3\alpha} + ...\right)$$

$$z = \frac{aT}{1 - Re^{-i\alpha}}$$

L'intensità totale si ottiene moltiplicando per il complesso coniugato:

$$I = \frac{aT}{1 - Re^{-i\alpha}} \cdot \frac{aT}{1 - Re^{i\alpha}} = \frac{a^2T^2}{1 + R^2 - 2R\cos\alpha}$$

Questa funzione ha dei massimi per $\cos\alpha = 1$ e quindi:

$$\alpha = 2m\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{I_{max} = \frac{a^2T^2}{(1-R)^2}}$$

Sapendo che $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, l'intensità può essere scritta come:

$$I = \frac{a^2T^2}{(1-R)^2}\frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{I_{max}}{1 + F\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Calcoliamo ora la differenza di cammino ottico fra due raggi consecutivi (Fig. 8.7). Sia H la proiezione di T_2 sul primo raggio. La differenza di cammino ottico fra il raggio 2 e il raggio 1 è:

$$\begin{aligned} n\left(\overline{T_1R_1} + \overline{R_1T_2}\right) - \overline{T_1H} &= 2n\overline{R_0T_1} - \overline{T_1T_2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \\ &= \frac{2nd}{\cos\phi_1} - 2\overline{T_0T_1}\sin\phi \\ &= \frac{2nd}{\cos\phi_1} - 2d\tan\phi_1\sin\phi \end{aligned}$$

Tenendo conto che $\sin\phi = n\sin\phi_1$, la differenza di fase vale:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{2nd}{\cos\phi_1} - 2nd\tan\phi_1\sin\phi_1\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{2nd}{\cos\phi_1}\left(1-\sin^2\phi_1\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2nd\cos\phi_1\right)$$

Assumiamo ora che il fascio di raggi incida ortogonalmente alla superficie del filtro, cioè $\phi = \phi_1 = 0$. L'intensità diventa una funzione della sola lunghezza d'onda (Fig. 8.8):

$$I = \frac{I_{max}}{1 + F\sin^2\left(\dfrac{2\pi nd}{\lambda}\right)}$$

La posizione del massimo di trasmissione si ottiene dall'uguaglianza:

$$\frac{4\pi}{\lambda_c}nd = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_c = \frac{2nd}{m}}$$

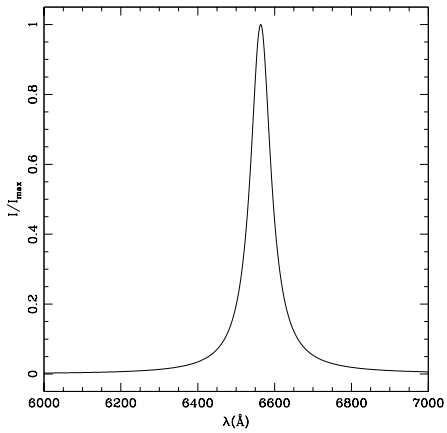


Figura 8.8: Curva di trasmissione di un filtro interferenziale centrato alla lunghezza d'onda della riga Hα=6563 Åe di larghezza circa 60 Å. La curva è ottenuta con i seguenti parametri: m=1, n=1.35, d=243 nm e R=0.97.

Si può dimostrare che la FWHM del filtro vale:

$$FWHM = \frac{2\lambda_c}{m\pi\sqrt{F}}$$

Regolando d ed n si può costruire un filtro con una curva trasmissione centrata alla lunghezza d'onda voluta.

Consideriamo ora lo spettro di una sorgente a righe in emissione, in particolare l'intervallo di lunghezze d'onda che contiene Hα, [N II]6548,6584 e [S II]6716,6731. Utilizziamo un filtro interferenziale Hα, la cui banda passante permette di selezionare Hα+[N II] (Fig. 8.9). Il filtro lascia passare anche il

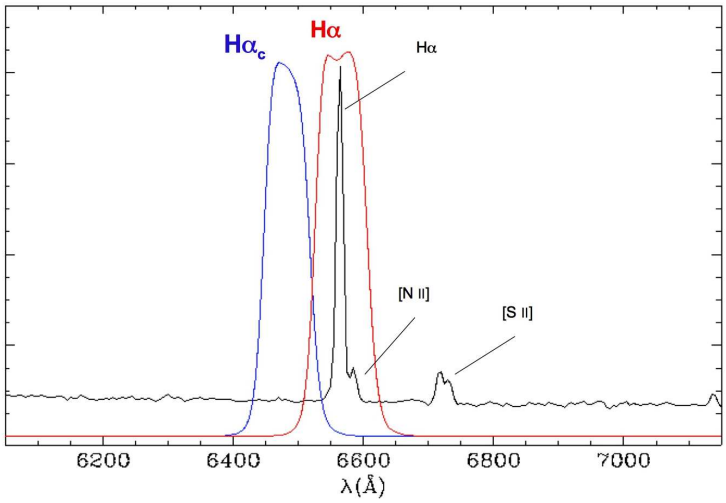


Figura 8.9: Esempio di filtro Hα (in rosso) per selezionare l'intervallo di lunghezze d'onda che contiene la riga (o le righe in questo caso) e filtro Hα_c (in blu) per selezionare l'emissione del continuo sottostante e sottrarlo.

continuo alla base della riga spettrale, continuo che deve essere sottratto per avere l'emissione della sola riga. Questo è possibile utilizzando un filtro Hα–continuo, un filtro interferenziale di larghezza di banda simile, ma centrato ad una lunghezza d'onda diversa, tale da osservare solo il continuo. Si noti che il continuo va sottratto sempre quando si osservano galassie, per identificare le regioni di emissione delle righe spettrali. Di solito non serve sottrarlo in caso di nebulose galattiche.

9 Rivelatori

9.1 Lastre fotografiche

Il primo rivelatore a nostra disposizione è l'occhio, il quale reagisce alla luce secondo la legge psicofisica di **Weber–Fechner**: *un incremento percentuale dell'intensità luminosa* **I** *produce un incremento lineare dello stimolo visivo* **s**.

$$\Delta s = k\frac{\Delta I}{I} \quad \Rightarrow \quad s \propto \log I$$

All'inizio del '800 fu inventata la fotografia e dopo qualche anno fu applicata all'astronomia. Il primo tentativo di fotografia astronomica fu effettuato nel 1845 da Leon Foucault e Armand Fizeau, i quali fotografarono il Sole e le macchie solari con un metodo chiamato **dagherrotipo** (dal nome dell'inventore Louis Jacques Mandé Daguerre) che faceva uso di uno strato di cristalli d'argento steso su un supporto di rame. Nel 1851 Berkowski ottenne la prima foto di un eclissi di Sole (Fig. 9.1). Successivamente si svilupparono le lastre e le pellicole fotografiche, utilizzate in astronomia fino agli anni '80. Esse erano costituite da un supporto di vetro, o da una pellicola flessibile, su cui era steso il materiale fotosensibile chiamato **emulsione fotografica**. L'emulsione veniva ottenuta facendo sciogliere in una soluzione di bromuro di potassio della gelatina e successivamente a caldo del nitrato d'argento. La reazione chimica:

$$AgNO_3 + KBr = AgBr + KNO_3$$

produceva una sospensione di minutissimi cristalli di bromuro d'argento con le dimensioni di pochi micron. Altre possibili soluzioni erano ottenute con cloro oppure con iodio.
Quando una lastra fotografica viene colpita da luce si forma in essa la cosiddetta **immagine latente**, che non è direttamente visibile, ma viene rivelata solo dopo opportuni trattamenti in un bagno di sviluppo. L'immagine latente si forma per fotoconduzione e successiva conduzione ionica. Quando un granulo di alogenuro (bromuro, cloruro, ioduro) d'argento viene colpito da un fotone di opportuna energia si libera un elettrone che entra nella banda di conduzione. Questo elettrone cade rapidamente nella buca di potenziale causata dalle impurità che si formano sulla superficie del granulo e costituite da argento metallico. Il campo elettrostatico prodotto dall'elettrone trattenuto dalle impurità provoca una migrazione di ioni d'argento che si trovano fuori dalla normale posizione nel cristallo fino a che uno di questi ioni viene catturato dall'elettrone

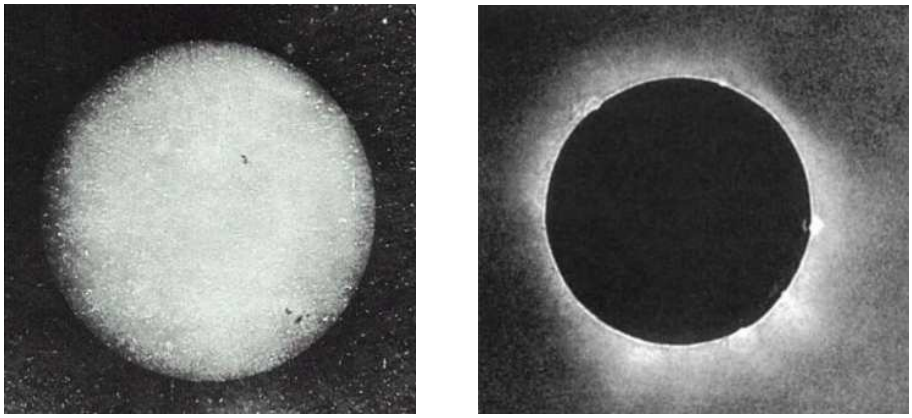


Figura 9.1: A sinistra la foto del Sole ottenuta nel 1845, a destra la foto dell'eclissi di Sole del 1851.

e neutralizzato. All'arrivo di un altro fotone si ripete lo stesso fenomeno. Le impurità hanno pertanto la funzione di concentrare in esse argento metallico che costituisce l'immagine latente.
Quando un granulo di alogenuro d'argento è stato colpito da un numero di fotoni tale da aver formato una sufficiente quantità di argento metallico, si dice che esso è sviluppabile. L'emulsione fotografica viene quindi immersa nel bagno di sviluppo, il quale contiene delle sostanza che rilasciano elettroni e neutralizzano gli ioni d'argento (riduzione) a cominciare dai granuli colpiti da luce e costituenti l'immagine latente che viene quindi rivelata.
Fissaggio e lavaggio sono le ultime due fasi di trattamento della lastra fotografica, che è quindi pronta all'uso.
Per effettuare misure di flusso d'energia su una lastra bisogna conoscere la sua **curva di risposta** o **curva caratteristica** alle varie intensità. Questa curva ha in ascissa la quantità $\log E$, dove E è l'**esposizione**, la quale è il prodotto del flusso incidente I per il tempo t:

$$E = It$$

In ordinata invece c'è la **densità** D che misura l'effetto prodotto dall'esposizione sull'emulsione dopo che questa è stata sviluppata. Se I_0 è il flusso incidente e I il flusso emergente dalla lastra, si può definire la **trasparenza** T=I/I_0 e il suo inverso A=1/T, chiamato **annerimento**. La densità è definita dalla seguente relazione:

$$D = \log A$$

L'opportunità di usare la densità anziché l'annerimento è data dal fatto che essa è proporzionale alla quantità di argento ridotto per unità di area.
In Fig. 9.2 è riportato un esempio di curva caratteristica. Come si nota, solo nella parte centrale di questa curva (b-c), detta **zona corretta**, si ha proporzionalità diretta fra $\log E$ e D. Buone misure si possono fare solo su questo tratto rettilineo, la cui estensione misura la latitudine di posa della lastra fotografica. Il primo tratto della curva (a-b) si dice **zona di sottoesposizione** . È da notare come anche ad un'esposizione zero l'annerimento non sia nullo. Oltrepassata

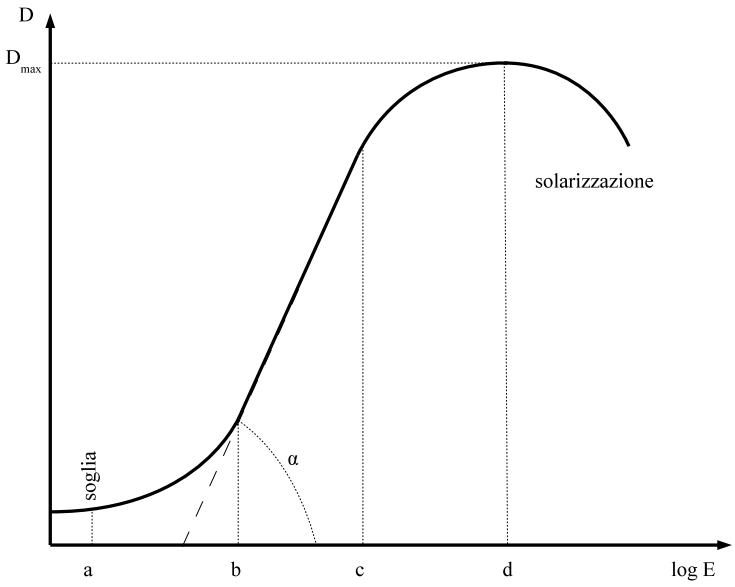


Figura 9.2: Esempio di curva caratteristica: le lettere a, b, c e d separano le diverse zone della curva.

la zona corretta si entra nel tratto di **sovraesposizione** (c-d) in cui non si ha più proporzionalità fra annerimento ed esposizione, ma crescendo quest'ultima, l'annerimento aumenta sempre più lentamente. Per un certo valore di $\log E$ la densità raggiunge il massimo (D_{max}), dopodiché diminuisce. Questa zona è detta di **solarizzazione**. Un altro parametro importante è $\gamma = \tan\alpha$, cioè la tangente dell'angolo che la retta approssimante la zona corretta forma con l'asse delle ascisse. Tanto più grande è γ, tanto maggiore è la differenza di densità per una fissata differenza di esposizioni: se si devono fare misure di intensità su una lastra fotografica, è opportuno che il valora di γ sia elevato.

Secondo la **legge di reciprocità** l'annerimento prodotto dalla radiazione sull'emulsione fotografica dipende dalla quantità di energia che cade su di essa per cm^2. In realtà le deviazioni da questa legge sono tali e tante da dover parlare di **legge di non-reciprocità**. Fu Schwarzschild a scoprire che per registrare sulla lastra un flusso luminoso doppio non basta raddoppiare il tempo di posa, ma in molti casi bisogna triplicarlo. Se indichiamo con E_{ef} l'esposizione effettiva che bisogna dare a una lastra fotografica per ottenere una fissata densità, la legge di Schwarzschild si esprime nel seguente modo:

$$E_{ef} = It^p$$

dove p varia da valori minori di 1 a valori maggiori quando si passa dalle basse alle alte intensità.

A causa della mancanza di reciprocità le curve caratteristiche ottenute per tempi crescenti o per intensità crescenti hanno diverse pendenze. Infatti per una certa densità D si ha:

$$D = k \log E = k \log(It^p) = k(\log I + p \log t)$$

Derivando rispetto a $\log I$ nel caso di curva costruita per intensità crescenti e rispetto a $\log t$ nel caso di tempi crescenti si ha:

$$\frac{dD}{d \log I} = k \qquad \frac{dD}{d \log t} = kp$$

La mancanza di reciprocità alle basse intensità è legata al fatto che, rimanendo l'emulsione esposta per lunghi tempi, durante la posa si verifica la cosiddetta **evaporazione** dell'immagine latente, poiché gli elettroni che sono stati catturati dalle impurità possono per effetto termico uscire da esse e andare a occupare i posti di partenza causando un indebolimento dell'immagine latente. Alle alte intensità entra in gioco invece la mobilità degli ioni di argento nei cristalli. Può succedere che prima ancora che un elettrone caduto nelle impurità attiri a sè uno ione e lo neutralizzi, venga liberato un altro fotoelettrone, il quale non può venire catturato dall' impurità essendo questa ancora carica negativamente. Questo elettrone non può così contribuire alla formazione dell'immagine latente.

Un'emulsione fotografica costituita da solo alogenuro d'argento è caratterizzata da una certa lunghezza d'onda di soglia λ_0 al di sopra della quale essa non è più sensibile alla luce. Mediante l'aggiunta di sostanze organiche coloranti, in grado di creare in un cristallo dei livelli energetici intermedi tra quello in cui si trova normalmente l'elettrone e il livello di conduzione, la sensibilità delle emulsioni fotografiche è stata estesa fino all'infrarosso. A seconda della sensibilità spettrale le emulsioni si dintinguono in: **normali** ossia senza coloranti con sensibilità che cade rapidamente dopo i 5000 Å, **orto-cromatiche** sensibili al verde e al giallo, **pancromatiche** con sensibilità estesa fino al rosso, e infine **infrarosse** sensibili fino a 8000 Å, 10000 Å, 13000 Å.

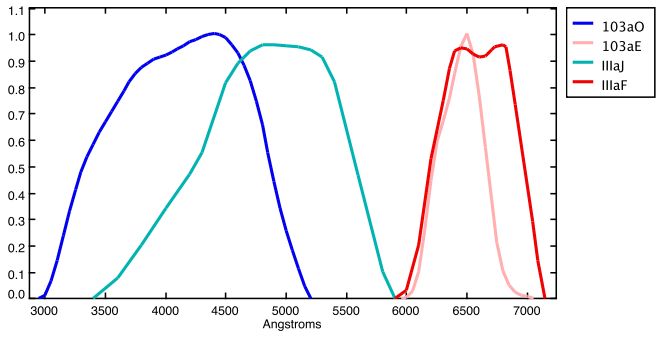


Figura 9.3: Curve di trasmissione della lastra 103aO senza filtro (in blu), 103aE con filtro rosso (in rosa), IIIaJ con filtro GG395 (in azzurro) e infine IIIaF con filtro RG610 (in rosso).

Le più famosa survey ottenuta con lastre fotografiche è senz'altro la **first Palomar Observatory Sky Survey** (POSS I), una scansione di tutto l'emisfero nord effettuata con l'Oschin Schmidt Telescope di 120 cm di Monte Palomar negli anni '50 utilizzando le lastre Kodak 103aO e 103aE. Negli anni '70 un'analoga survey, la **Southern Sky Survey** fu condotta all'emisfero sud con lo UK Schmidt Telescope dell'Anglo Australian Observatory, anch'esso di 120 cm, e su lastre Kodak IIIaJ e IIIaF (Fig. 9.3). Negli anni '80 la survey dell'emisfero nord fu ripetuta con lo stesso tipo di lastre utilizzate nell'emisfero sud e fu chiamata POSS II (Fig. 9.4). Le lastre fotografiche furono successivamente passate allo scanner e fu creata la **Digitized Sky Survey** il cui database di immagini è disponibile in diversi siti web, come: http://stdatu.stsci.edu/cgi-bin/dss_form.

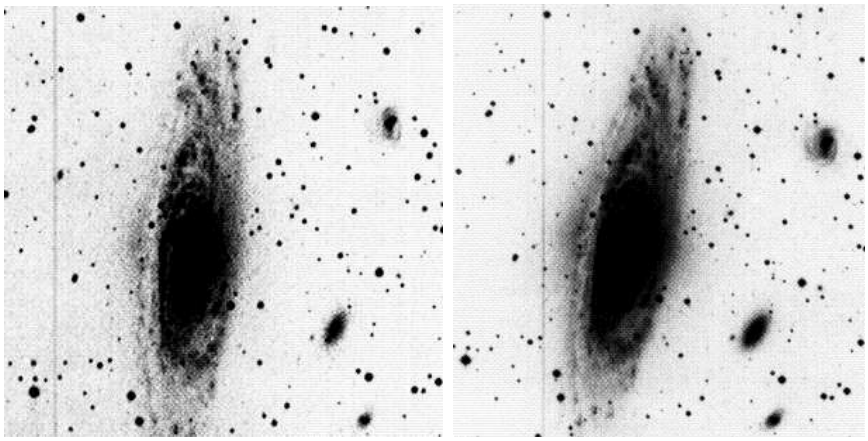


Figura 9.4: La galassia NGC7331 nella POSS I O (a sinistra) e nella POSS II J (a destra). Si nota la migliore qualità dell'immagine dovuta all'emulsione IIIaJ con grana più fine della 103aO.

9.2 Charge Coupled Devices

Negli anni '80 cominciarono ad essere utilizzati i sensori digitali, chiamati CCD, acronimo per Charge Coupled Device. Il CCD fu ideato nel 1969 alla divisione componenti semiconduttori dei Bell Laboratories da Willard Boyle e George Smith, due fisici che stavano cercando di realizzare un dispositivo di memoria di nuova concezione per lo storage dei dati. I due si resero conto rapidamente che il dispositivo era in grado di registrare immagini e infatti l'anno seguente venne realizzato un prototipo funzionante e già nel 1975 veniva realizzata la prima videocamera con CCD con una qualit dell'immagine sufficiente per le riprese televisive. Per questa scoperta Boyle e Smith hanno ricevuto il Premio Nobel per la fisica nel 2009.

Rispetto alla fotografia, il CCD ha tre punti a favore: 1) maggiore sensibilità; 2) linearità; 3) immagini digitali. In Fig. 9.5 è visibile un confronto fra l'efficienza quantica dell'occhio, dell'emulsione fotografica e del CCD. Come si vede l'occhio è sensibile in un intervallo di lunghezza d'onda molto stretto, tra 4500 e 6500 Å, con un picco attorno a 5500 Å, cioè nel colore verde. La lastra fotografica ha

un efficienza massima simile o di poco superiore, ma ha una risposta spettrale molto più estesa nel blu e un po' di più nel rosso, e naturalmente a differenza dell'occhio è in grado di registrare e sommare il segnale luminoso durante tutto l'intervallo di esposizione. Il CCD ha un'efficienza nettamente superiore e una risposta spettrale più estesa: i modelli più professionali e costosi arrivano al 90-95% di efficienza e hanno sensibilità maggiori del 40-50% dal blu al rosso.

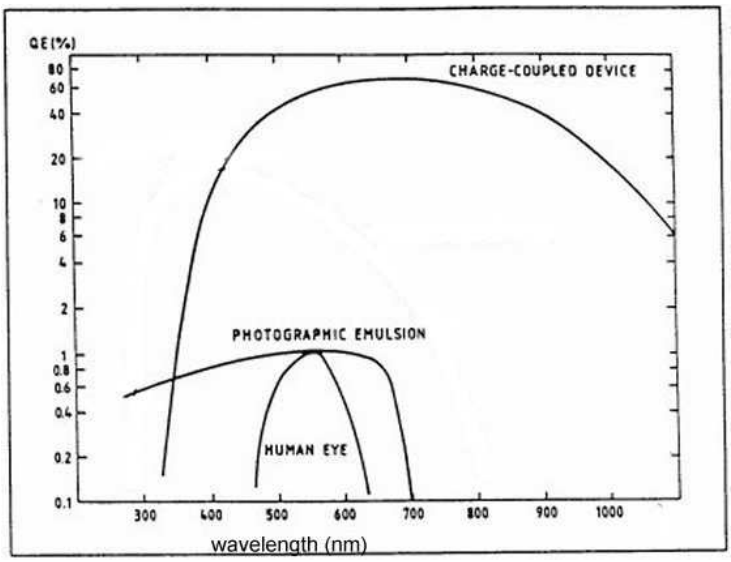


Figura 9.5: Curve di efficienza quantica di occhio, emulsione fotografica e CCD. La scala sull'asse delle ordinate è logaritmica.

Linearità significa proporzionalità diretta fra intensità luminosa registrata e tempo di posa. Abbiamo visto nella sezione precedente che la lastra fotografica è lineare solo nella zona corretta, compresa fra la zona di sottoesposizione la zona di solarizzazione. E inoltre essa soffre della mancanza di reciprocità, che obbligava a lunghe pose per registrare il segnale di deboli sorgenti. Il CCD non soffre di questo problema e si comporta in modo lineare dall'inizio della posa riuscendo a rilevare un segnale debole con un tempo di posa molto inferiore a quello impiegato usando le lastre fotografiche. Ovviamente il CCD non ha capacità infinita di registrare un segnale luminoso, oltre una certa quantità di luce si ha la saturazione dell'immagine. In Fig. 9.6 è mostrato un confronto fra un'immagine di M33 ottenuta con il telescopio di 182 cm ad Asiago nel 1975 (a sinistra) con emulsione 103aO, filtro GG13 e tempo di posa di 40 minuti, e la stessa galassia (a destra) osservata nel 2009 con lo Schmidt 67/92 sempre di Asiago e CCD senza filtro. Il tempo di posa in questo caso è stato di 3 soli minuti.

Il terzo grande vantaggio nell'utilizzare un CCD è senz'altro l'immagine digitale. Essa è composta di **pixel**, acronomico di **picture element**, che sono generalmente quadrati, anche se non mancano i CCD con pixel rettangolari. Il pixel è il più piccolo elemento di risoluzione di un'immagine, ma la qualità di un'immagine non dipende solo dalla dimensione del pixel, dipende anche dalla scala

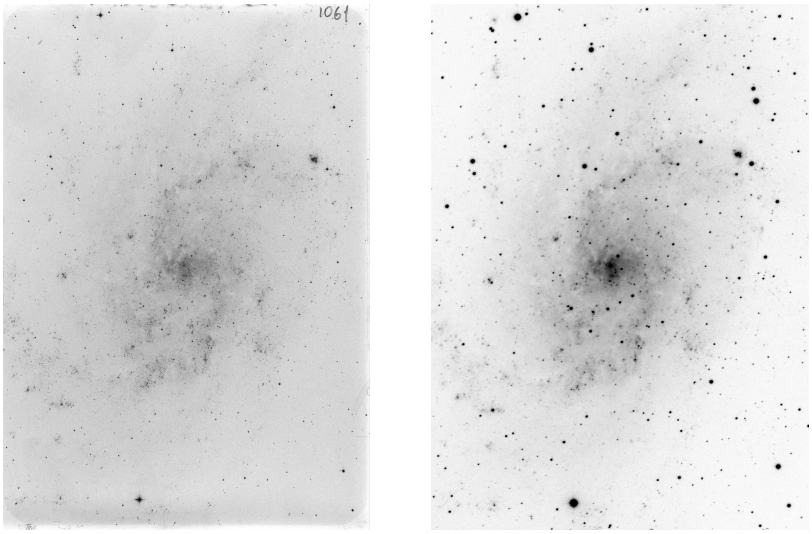


Figura 9.6: La galassia M33 osservata ad Asiago con il 182 cm e lastra fotografica nel 1975 (a sinistra) e con lo Schmidt 67/92 e CCD nel 2009. La qualità dell'immagine digitale è analoga se non superiore a quella ottenuta su lastra fotografica nonostante il minore tempo di posa e il minor diametro del telescopio utilizzato.

spaziale (in arcsec/mm) del telescopio, se il sensore è applicato direttamente al piano focale del telescopio, oppure dello strumento che è montato al fuoco del telescopio, e dipende infine dal seeing per osservazioni da Terra. Ad esempio, prendiamo un telescopio di diametro D = 1 m e lunghezza focale f = 4 m. La scala spaziale angolare sul suo piano focale vale $s_\vartheta = \frac{206265}{4000} \simeq 51.5''/\text{mm}$. Se utilizziamo un CCD i cui pixel hanno una dimensione di 15×15 μm, la scala spaziale lineare sarà $s_x = 0.77''/\text{px}$. In condizioni di cattivo seeing, tipo $3'' - 4''$, l'immagine si dice **sovracampionata** in cui la FWHM delle stelle in questo caso occupa 4–5 px, la sua qualità è bassa ed è determinata dal seeing stesso, mentre in condizioni di seeing buono, $< 1''$, l'immagine può essere addirittura **sottocampionata**, la FWHM è pari a o minore di 1 px, e in questo caso la qualità è limitata dal CCD stesso. La condizione migliore è quella in cui la FWHM delle stelle occupa 2–3 px.
Ogni pixel porta con sé 3 numeri: due sono la posizione (X,Y) nell'immagine e il terzo è l'intensità di luce (in unità di conteggi di fotoni) che esso ha registrato (Fig. 9.7). Quindi un'immagine altro non è che una matrice di valori di intensità luminosa e quindi può essere facilmente elaborata applicando attraverso opportuni software algoritmi matematici più o meno complessi. Ma soprattutto, si può ottenere molto facilmente la misura della quantità di luce in corripondenza di un pixel o di un gruppo di pixel contenuti in un'area. Data un'immagine digitale, le coordinate X vengono chiamate **colonne** e e coordinate Y **righe**.
I CCD sono molto più piccoli delle lastre fotografiche, che avevano dimensioni di 20–30 cm e anche oltre. I pixel hanno dimensioni tipiche intorno ai 10 μm e oggi si riescono a costruire CCD fino a 4000 px (4 K) o anche 8000 px (8 K) di lato, quindi sensori con dimensioni fino a 4–8 cm. Ovviamente essendo più piccoli risulta anche minore l'area di cielo inquadrabile: applicando un CCD 1 K

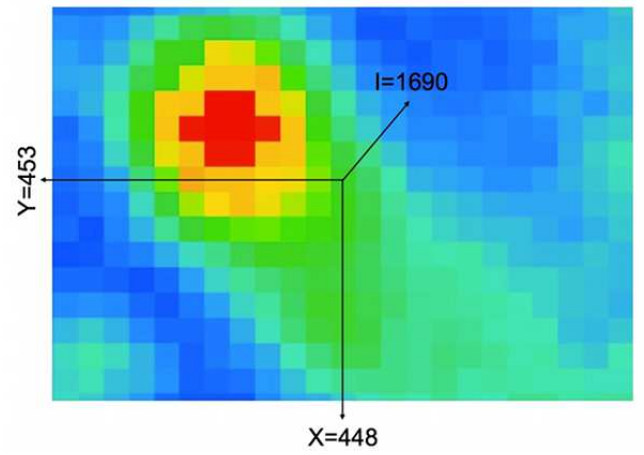


Figura 9.7: Ingrandimento di un'immagine digitale. Ogni pixel è definito dalla sua posizione (X,Y) nell'immagine e da un numero che corrispondente all'intensità di luce.

$\times$ 1 K al telescopio dell'esempio precedente, ogni immagine copre circa $13' \times 13'$, mentre con le lastre fotografiche si poteva coprire più di un grado. Telescopi più grandi e/o con maggiore lunghezza focale consentono immagini con qualità e dettaglio migliore a discapito però dell'area di cielo inquadrata che tipicamente scende a pochi arcmin. Per risolvere questo problema si costruiscono **mosaici di CCD** come quello riportato in Fig. 9.8 che permettono di inquadrare un area di $1^\circ \times 1^\circ$ con una scala spaziale lineare di circa $0.2''$/px.

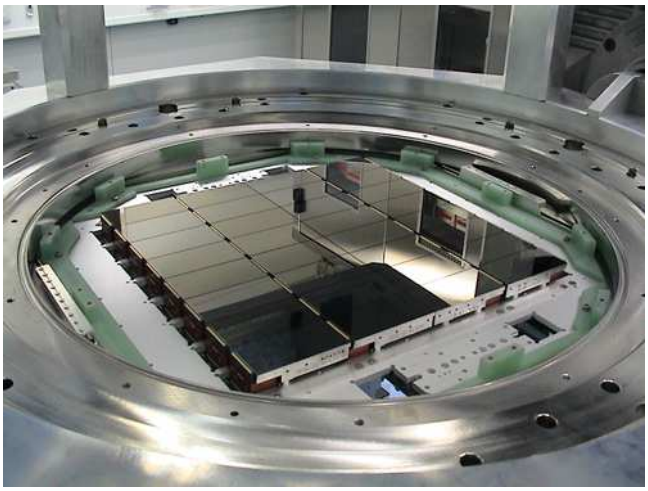


Figura 9.8: La camera Omegacam montata al telescopio VST in Cile. 32 CCD formano un sensore a mosaico da 16000 px di lato.

9.2.1 Principio di funzionamento

Il principio di base dei CCD è l' **effetto fotoelettrico**. Il materiale di cui è costituito un CCD per l'intervallo di lunghezze d'onda del visibile è il **silicio** (numero atomico 14, configurazione elettronica $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^2$). Gli atomi in un cristallo di silicio hanno gli elettroni disposti in bande discrete di energia. A temperatura T = 0 K la banda a più alto livello di energia occupata da un elettrone si chiama **banda di valenza** e la banda immediatamente superiore è la **banda di conduzione**. La maggior parte degli elettroni occupa la banda di valenza, ma essi possono passare alla banda di conduzione tramite riscaldamento oppure tramite assorbimento di fotoni. L'energia richiesta per questa transizione a temperatura ambiente è di **1.12 eV** (Fig. 9.9). Tenendo conto che 1 eV $= 1.6 \times 10^{-19}$ J e che la costante di Planck è $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s, l'energia della transizione corrisponde a un fotone di lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^5}{1.12 \times 1.6 \times 10^{-19}} \simeq 1.1 \times 10^{-9} \text{ km} = 1.1\ \mu\text{m}$$

Quindi, i fotoni necessari ad eccitare gli elettroni del silicio, portandoli nella banda di conduzione, sono quelli con lunghezza d'onda minore di 1.1 μm. A lunghezze d'onda maggiori il silicio diventa insensibile e il CCD risulta trasparente a questa radiazione.
Una volta passati nella banda di conduzione, gli elettroni sono liberi di muoversi, ma lasciano dietro di sé una "buca" nella banda di valenza che agisce come una carica positiva. Perciò per poter fare in modo che elettroni e buche si ricombinano rapidamente (circa 100 μs) è necessario applicare un campo elettrico esterno. Si faccia attenzione al fatto che gli elettroni prodotti per effetto termico (**termoelettroni**) sono indistinguibili da quelli prodotti per effetto fotoelettrico (**fotoelettroni**) e costituiscono quella che è chiamata **corrente di buio** o **dark current**.

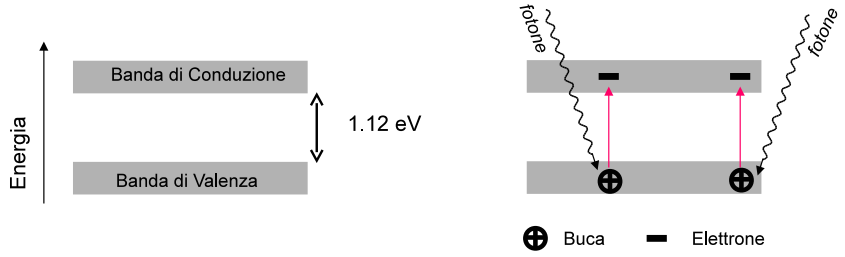


Figura 9.9: A sinistra, l'intervallo di energia fra la banda di valenza e la banda di conduzione; a destra, per effetto fotoelettrico gli elettroni salgono nella banda di conduzione lasciando in quella di valenza delle buche con carica positiva.

Un CCD è di fatto un chip di silicio la cui superficie è una matrice di pixel sensibili alla luce. Ogni pixel agisce come una porzione elettricamente isolata e può raccogliere i fotoni in arrivo e immagazzinare i fotoelettroni.

Una comune ed efficace analogia utilizzata per descrivere il modo in cui un CCD funziona è il seguente: un certo numero di secchi, i pixel, sono distribuiti su un piano, il piano focale del telescopio o dello strumento ad esso collegato, a formare una matrice quadrata. I secchi sono posizionati su nastri trasportatori paralleli e verticali, le colonne del CCD, e raccolgono la pioggia di fotoni (Fig. 9.10, in alto a sinistra). I nastri sono fermi all'inizio, mentre la pioggia riempie lentamente i secchi, cioè durante l'esposizione. Una volta che la pioggia finisce (Fig. 9.10, in alto a destra), cioè quando l'otturatore della camera CCD si chiude, i nastri si mettono in moto e trasferiscono i secchi di pioggia, uno ad uno, verso un nastro orizzontale, il **registro seriale** (Fig. 9.10, in basso a sinistra), il quale poi porta il contenuto di ogni secchio ad un cilindro misuratore, l'**amplificatore** elettronico (Fig. 9.10, in basso a destra).

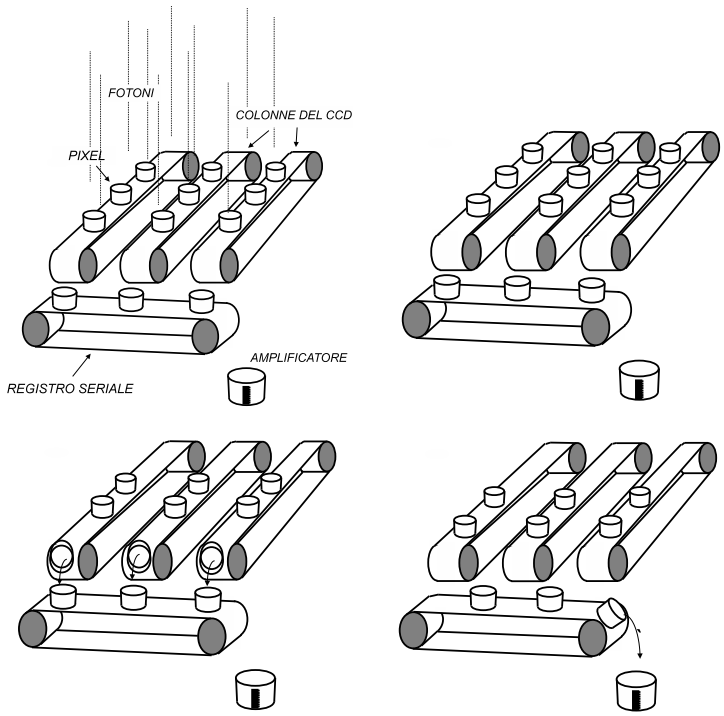


Figura 9.10: Rappresentazione ideale del funzionamento di un CCD. In alto a sinistra, fase di esposizione del CCD alla luce; in alto a destra, l'otturatore è chiuso e l'esposizione è finita, inizia la fase di trasferimento delle cariche lungo le colonne; in basso a sinistra le cariche vengono trasferite al registro seriale; in basso a destra dal registro le cariche vengono portate all'amplificatore.

Nella realtà ogni pixel ha una struttura con elettrodi di dimensioni ovviamente inferiori al pixel stesso. Questi elettrodi sono chiamati **gate** e, tramite l'applicazione di opportuni voltaggi, forniscono ad ogni pixel la capacità di raccogliere gli elettroni liberati e di trattenerli in una buca di potenziale fino alla fine dell'esposizione. Ogni pixel ha tipicamente 3 gate e ad ogni gate viene applicato un diverso voltaggio. Al termine dell'esposizione gli elettroni si trovano nella buca di potenziale più profonda (Fig. 9.11).

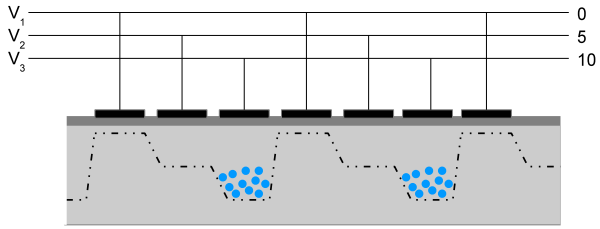


Figura 9.11: Rappresentazione schematica dei pixel: i voltaggi applicati ai tre elettrodi di ciascun pixel consentono di trattenere i fotoelettroni nella buca di potenziale più profonda.

Poi ai tre elettrodi vengono modificati i voltaggi in modo tale che le cariche si spostino da una buca all'altra e da un pixel all'altro lungo le colonne del CCD, fino a raggiungere il registro seriale. Questo processo è chiamato **trasferimento di carica** o **charge transfer** (Fig. 9.12).

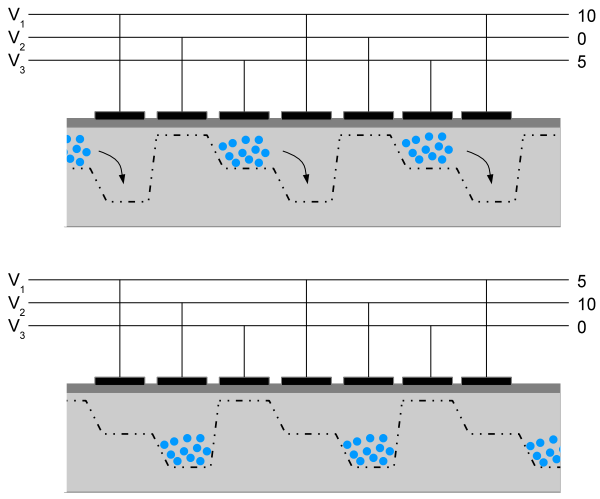


Figura 9.12: Al termine dell'esposizione inizia la fase di trasferimento di carica: cambiando opportunamente i voltaggi degli elettrodi, le cariche sono spostate da una buca di potenziale ad una adiacente, da un pixel all'altro lungo le colonne del CCD.

Il trasferimento di carica non è privo di perdite. Infatti ogni trasferimento ha associata un'efficienza. Il valore dell'efficienza nel trasferimento di carica (CTE) è la percentuale di carica trasferita rispetto a quella che viene raccolta. Nei CCD moderni questa percentuale è del 99.9999 %.
Ogni colonna del CCD è connessa in parallelo con le altre e quindi ogni spostamento di carica attraverso i pixel avviene simultaneamente in tutte le colonne.

Alla fine gli elettroni raggiungono il registro seriale, che è una riga di pixel nascosti e non esposti alla luce, la quale serve come transizione fra le righe attive e l'output dello strumento. Gli elettroni presenti nel registro vengono ora spostati di pixel in pixel in orizzontale verso l'elettronica solo dopo che la carica di ogni pixel del registro è stata letta, una nuova riga di elettroni viene portata dalle colonne del CCD verso il registro stesso. L'elettronica legge la carica in uscita come un voltaggio, amplifica il segnale e poi lo converte in un numero intero per mezzo del **convertitore analogico/digitale (A/D)**. Questo numero intero viene chiamato tecnicamente **digital number (DN)** oppure **analog-to-digital unit (ADU)**. Più semplicemente si parla in termini di **conteggi di fotoni**.
La quantità di voltaggio necessaria a produrre 1 ADU è chiamata **gain**. L'unità di misura del gain è e^-/ADU. Valori tipici di gain nei CCD moderni sono compresi fra 1 e 10. Se ad esempio il gain è pari a 5 e^-/ADU, il processo di digitalizzazione divide la carica di ogni pixel per 5 e considera solo multipli di 5 perché il digital number deve essere un numero intero. Per cui se dalla divisione rimane una quantità di elettroni minore di 5, questa carica va persa. Questo processo, chiamato **lettura del CCD o readout**, viene ripetuto finché tutto il CCD è stato letto, cioè finché tutta la carica raccolta è stata misurata e convertita in conteggi. La **velocità di lettura** dipenderà da quanto veloce è il trasferimento di carica e la conversione A/D. CCD moderni e di grandi dimensioni usano più registri di lettura e amplificatori per aumentare la velocità. La lettura del CCD è caratterizzata dalla presenza di rumore, il cosiddetto **readout noise**, che è l'incertezza associata al valore di conteggi di ogni pixel. Il readout noise, spesso indicato con la sigla **RON**, consiste di due effetti che si combinano in modo casuale:

1. la conversione analogico-digitale non è perfettamente ripetibile, per cui anche nel caso ipotetico in cui si stesse leggendo per due volte lo stesso pixel che contiene ogni volta la stessa carica, il valore di ADU sarebbe comunque leggermente differente;

2. l'elettronica della camera introduce elettroni spuri nell'intero processo con fluttuazioni casuali indesiderate nell'immagine che si ottiene in output.

Il RON è una quantità additiva e questo significa che se ad esempio un CCD ha RON = 30 e^-, al termine della lettura, ogni pixel dell'immagine conterrà in media 30 elettroni in più. È chiaro che CCD con evelati valori di RON (per esempio maggiori di 80-100 e^-) non sono affatto adatti, specialmente in caso di lunghe esposizioni ottenute come combinazioni di brevi pose ripetute, ciascuna delle quali implica ovviamente una lettura. I CCD moderni hanno valori di RON molto bassi, in genere inferiori a 10 e^- per pixel.

Come detto precedentemente, i CCD sono in grado di produrre elettroni anche per effetto termico, sono i cosiddetti **termoelettroni** che vanno a costituire la corrente di buio (**dark current**). Quando nel silicio l'agitazione termica è alta, si possono liberare elettroni nella banda di conduzione che poi vengono raccolti nella buca di potenziale di un pixel. Quando il sensore viene letto, questi termoelettroni diventano parte del segnale e sono indistinguibili dai fotoelettroni.

La "dark" dipende quindi dalla temperatura a cui si trova il sensore e si misura in unità di e^- px^{-1} s^{-1}. Il modo usato per ridurla consiste nel raffreddare il CCD fino a temperature molto basse, tipicamente tra -60° e -80°. Già a una temperatura di 0°, il valore della dark è decine di volte inferiore a quello misurato a temperatura ambiente, ma questo non è comunque sufficiente. Supponiamo che a T = 0°, la dark valga 1 e^- px^{-1} s^{-1}. In un tempo di esposizione di 10 minuti, ogni pixel produrrebbe 600 elettroni spuri, che, assumendo un gain di 1 e^-/ADU, corrisponderebbero a ben 600 conteggi, da sommare a quelli della sorgente che si sta osservando. Scendendo però a T = -40°, si possono avere valori di dark intorno a 0.005 e^- px^{-1} s^{-1}, e i conteggi di fotoni spuri scenderebbero a soltanto 3 a parità di tempo di posa. A temperature più basse si possono avere valori di dark anche 10 volte inferiori.

9.2.2 CCD front/back-side illuminated

Ogni CCD è caratterizzato da una curva di **efficienza quantica (QE)**, che descrive la sua capacità di catturare i fotoni incidenti su di esso. La QE è definita dal rapporto fra i fotoni registrati e quelli ricevuti e varia con la lunghezza d'onda. In particolare essa è sensibile allo spesso dello strato di silicio che assorbe la radiazione. Esiste una quantità chiamata **lunghezza di assorbimento** che dipende dalla lunghezza d'onda e che è definita come la distanza per la quale il 63% dei fotoni incidenti saranno assorbiti (Fig. 9.13).

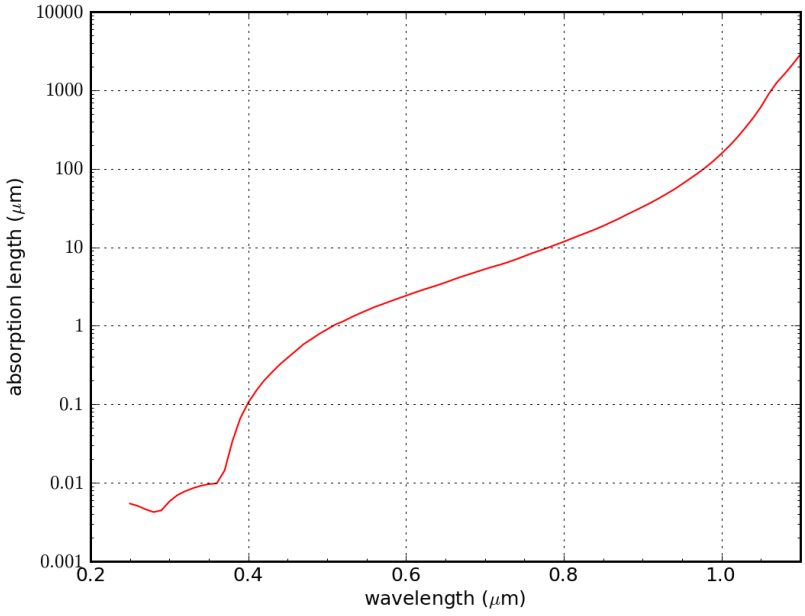


Figura 9.13: Andamento della lunghezza di assorbimento del silicio (in μm) in funzione della lunghezza d'onda (in μm). L'asse delle ordinate è in scala logaritmica.

Sulla base di questa caratteristica i CCD sono distinti principalmente in **thick front-side illuminated** e **thin back-side illuminated**.
I CCD thick front-side illuminated sono spessi circa 300 μm e quindi sono efficienti fino al vicino infrarosso. Sono più facili da costruire e quindi più economici, e per questo molto utilizzati in campo amatoriale. Ma sono illuminati da "davanti", cioè dal lato su cui sono posizionati i gate. I fotoni in arrivo vengono in parte riflessi e in parte assorbiti dai gate e dagli strati di materiale che essi incontrano prima di raggiungere lo strato di silicio in cui dovrebbero essere assorbiti (Fig. 9.14). Questi due effetti combinati causano complessivamente una ridotta QE, che raggiunge a fatica il 40-50 % e il secondo in particolare causa una bassa risposta nel blu, perché la lunghezza di assorbimento a queste lunghezze d'onda è molto piccola, comparibile alla dimensione dei gate.

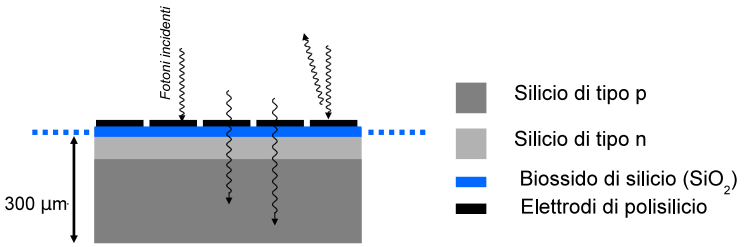


Figura 9.14: Struttura di un CCD thick front-side illuminated. I fotoni raggiungono la strato di silicio dopo essere passati attraverso gli elettrodi. Una parte rilevante di essi è riflessa indietro.

Quando un raggio di luce attraversa due superfici con indice di rifrazione diverso, la superficie di separazione dei due mezzi causa la riflessione di parte della luce. La percentuale di luce riflessa dipende dai due indici di rifrazione e dall'inclinazione del raggio incidente, ed è descritta dalle equazioni di Fresnel.
Secondo tali equazioni, applicate al caso in cui la luce incide ortogonalmente alla superficie di separazione dei due mezzi, la riflettanza R vale:

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

Se il primo mezzo è il vuoto, $n_1 = 1$. Considerando che il silicio ha indice di rifrazione 3.6, la percentuale di luce riflessa è del 32%, cioè un terzo dei fotoni in arrivo è perso per riflessione. Il problema può essere risolto applicando uno strato di materiale fra i due mezzi, che funzioni da antiriflesso. In questo caso, la riflettanza vale:

$$R = \left(\frac{n_2 \times n_1 - n_{AR}^2}{n_2 \times n_1 + n_{AR}^2}\right)^2$$

Per avere R = 0, il materiale interposto dovrà avere indice di rifrazione $n_{AR} = 1.9$. Il biossido di afnio (HfO_2) ha proprio questo indice di rifrazione e viene regolarmente usato nei CCD astronomici.

Nel caso di CCD illuminati frontalmente, a causa della presenza dei gate, non è possibile applicare alcun antiriflesso.

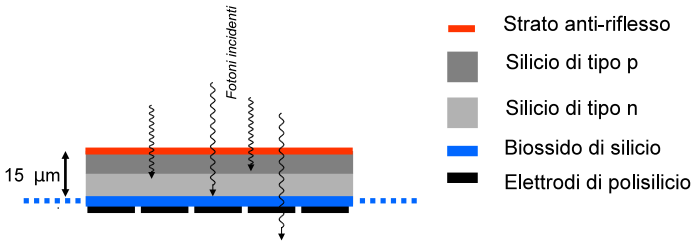


Figura 9.15: Struttura di un CCD thin back-side illuminated. Lo strato di silicio, molto più sottile rispetto al caso precedente, è esposto direttamente alla luce. Uno strato di antiriflesso permette di aumentare l'efficienza quantica del sensore.

I CCD thin back-side illuminated, come dice il nome, sono sottili, con spessori di circa 15 μm, e sono illuminati dal lato posteriore. Una volta costruiti vengono assottigliati con tecniche particolari e poi vengono montati su un substrato rigido, a faccia in giù, con il silicio rivolto verso la luce (Fig. 9.15). Questo ribaltamento del sensore serve a fare in modo che i fotoni in arrivo vengano catturati molto più facilmente non dovendo più passare attraverso i gate. Con l'aggiunta dello strato di antiriflesso si osserva un forte aumento complessivo della QE, che raggiunge facilmente il 90-95% (Figg. 9.16, 9.17).

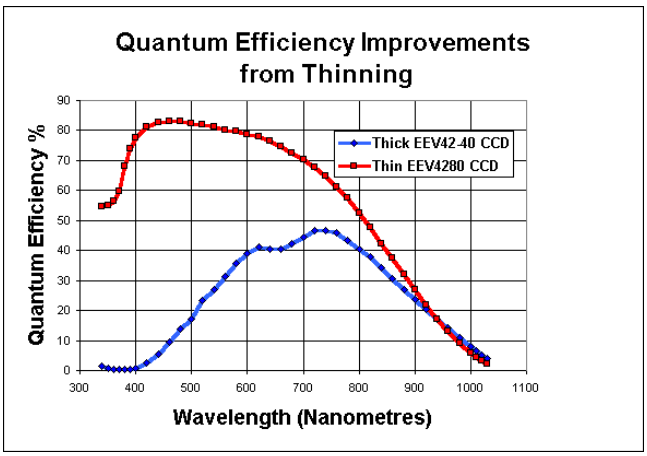


Figura 9.16: Confronto fra l'efficienza quantica di un CCD thin (in rosso) e uno thick (in blu). Si nota la molto maggiore efficienza del primo rispetto al secondo, soprattutto al di sotto di 600 nm.

L'assottigliamento permette di aumentare l'efficienza nel blu perché altrimenti a causa della lunghezza di assorbimento, i fotoni di minore lunghezza d'onda

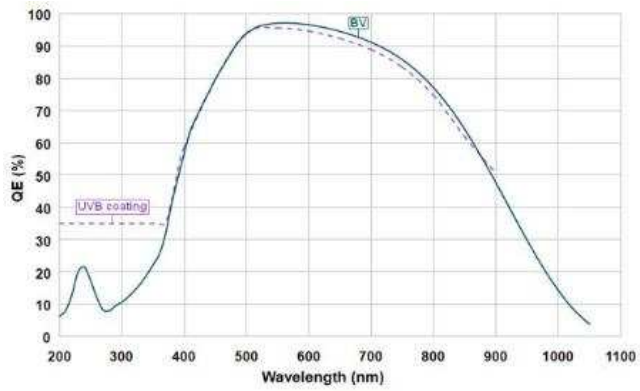


Figura 9.17: Curva di efficienza quantica del CCD Andor iDus utilizzato con lo spettrografo Boller & Chivens del telescopio Galileo dell'Osservatorio di Asiago.

che vengono catturati dai primi strati di silicio, produrrebbero elettroni troppo distanti dagli elettrodi, i quali sentirebbero il campo elettrico troppo debole per rimanere confinati nelle buche di potenziale. L'assottigliamento però ha l'effetto di far perdere QE nel rosso, perché quei fotoni avrebbero bisogno di uno spessore maggiore per essere assorbiti. Al crescere della lunghezza d'onda, una frazione crescente di fotoni non viene catturata dal sensore e subisce dei fenomeni di riflessione multipla all'interno del sensore stesso che causa la formazione di frange d'interferenza. È il cosiddetto fenomeno del **fringing**, di cui sono affetti i CCD sottili, al contrario di quelli spessi (Fig. 9.18). Infine i CCD sottili sono difficili da realizzare, e quindi molto costosi, e hanno spesso superfici che mostrano disuniformità.

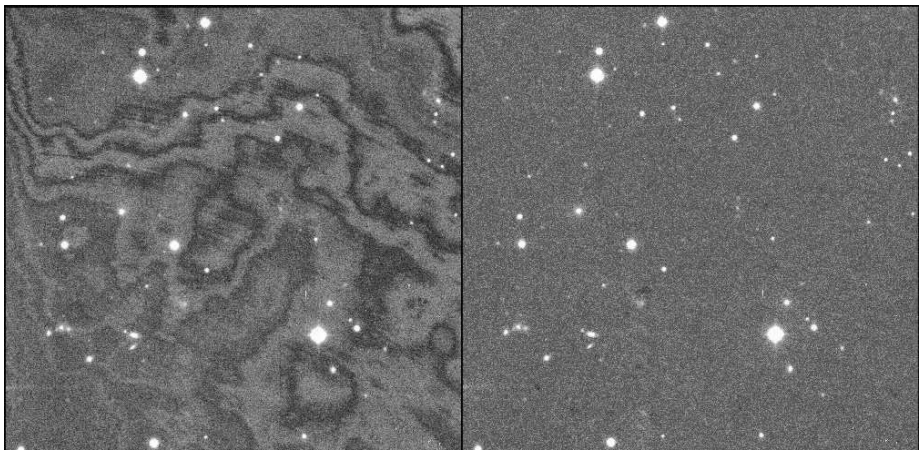


Figura 9.18: Esempio di fringing. L'immagine a sinistra è stata ottenuta con un filtro I, quella a destra è il risultato della sottrazione delle frange di interferenza tipicamente osservate nei CCD sottili.

Per risolvere il problema nel rosso/vicino-infrarosso sono stati realizzati dei CCD con spessore doppio rispetto ai normali CCD sottili. Questi CCD si chiamano

deep depleted e sono anch'essi back-side illuminated come i precedenti. Con uno spessore maggiore essi riescono a catturare più facilmente i fotoni a grande lunghezza d'onda, aumentando così la QE nel rosso e riducendo al tempo stesso l'effetto del fringing. Vengono spesso rivestiti con uno strato di antiriflesso ottimizzato per il vicino-infrarosso.
Questi CCD sono fatti di silicio ad **alta resistività**. La resistività elettrica è la capacità di un materiale di opporre resistenza al passaggio di cariche elettriche. Si misura in $\Omega \cdot \mathrm{m}$. I CCD deep depleted sono fatti di silicio con resistività tra 5000 e 10000 $\Omega \cdot \mathrm{cm}$ contro i 20-200 $\Omega \cdot \mathrm{cm}$ dei normali CCD. Grazie a questa caratteristica si possono applicare dei voltaggi più alti che consentono di ottenere buche di potenziale più profonde e inoltre aumenta molto la capacità di ogni pixel di contenere fotoelettroni. Questi CCD richiedono molta cura nella costruzione ed elevata purezza del silicio e sono perciò molto costosi.

10 Fotometria

La fotometria è la tecnica che permette di misurare il flusso e la magnitudine di sorgenti che possono essere sia puntiformi, o meglio non risolte, che estese. Infatti, letteralmente, il termine significa misura di fotoni. Studiando l'emissione delle sorgenti con la tecnica della fotometrica possiamo valutare la quantità di luce emessa, il suo colore ed eventuali fluttuazioni o variazioni in funzione del tempo.
Per utilizzare la tecnica della fotometria, abbiamo bisogno di un sistema composto da: un telescopio, che permette di raccogliere la luce proveniente dalla sorgente che vogliamo studiare, dei filtri fotometrici, che selezionano particolari intervalli dello spettro elettromagnetico in cui osservare, e un rivelatore (Charge-Coupled Device, CCD) che registra i dati che stiamo osservando, in modo da poter elaborare, in un secondo momento, le immagini ottenute.

10.1 Seeing e potere risolutivo

Trattando la diffrazione dovuta a un'apertura circolare, abbiamo visto che il potere risolutivo teorico di un telescopio, espresso in radianti, è dato dal disco di Airy, cioè dalla figura di diffrazione prodotta da onde piane che attraversano un'apertura circolare:

$$\theta = 1.22\frac{\lambda}{\mathrm{D}} \tag{10.1}$$

Dove λ è la lunghezza d'onda a cui si osserva, e D è il diametro del telescopio. Il disco di Airy è una figura composta da un disco centrale brillante, di diametro pari a θ, circondato da anelli più deboli. Il potere risolutivo dà una misura della capacità del telescopio di separare sorgenti vicine. In generale, è possibile separare due sorgenti vicine e considerarle distinte quando la distanza angolare tra esse è maggiore di θ.
Nel caso reale, osservando da terra, bisogna tenere in considerazione gli effetti della turbolenza atmosferica (il cosiddetto seeing) che influiscono sulla qualità delle immagini e anche sul potere risolutivo reale del telescopio. **Il seeing dà una misura del degrado delle immagini di oggetti celesti, dovuto alla turbolenza atmosferica.**
Una misura del seeing è data dal valore in secondi d'arco del diametro dei dischi stellari nelle immagini. Un cattivo seeing (>3–4 secondi d'arco) produrrà dischi stellari con diametro maggiore, rendendo più difficile separare sorgenti vicine e distinguere i dettagli e le strutture negli oggetti estesi. Un esempio è mostrato

in Fig.10.1 in cui a sinistra, vediamo l'immagine di una galassia in condizioni di cattivo seeing, con i dischi stellari più larghi e i dettagli dei bracci di spirale meno definiti, a destra invece abbiamo un'immagine ottenuta in condizioni di seeing migliore, con i dettagli nitidi e i dischi stellari più stretti.

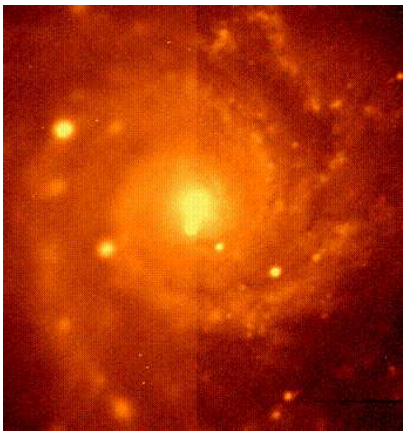


Figura 10.1: Mosaico di due immagini della stessa galassia, osservata in diverse condizioni di seeing. Nella parte di sinistra il seeing peggiore, i dischi stellari sono più larghi e i dettagli meno definiti, il contrario si osserva nella parte di destra, ottenuta con seeing migliore, in cui i dettagli sono più nitidi e precisi.

In conclusione, possiamo dire che l'immagine sul piano focale di una sorgente puntiforme, come una stella, non è puntiforme, per l'effetto combinato del seeing e delle ottiche del telescopio (vedi Fig. 10.2, a sinistra). La distribuzione di luce di una sorgente puntiforme sul piano focale risulta invece un disco che, osservato in tre dimensioni ha un aspetto a campana (vedi Fig. 10.2, al centro). Questa distribuzione si chiama Point Spread Function (PSF). La larghezza a metà altezza o Full Width at Half Maximum (FWHM) della PSF vista in due dimensioni (vedi Fig. 10.2, a destra), determina il valore del seeing: più il profilo è stretto, più il seeing è buono. Quindi la PSF è la funzione che riproduce sul piano focale la distribuzione di luce di una sorgente puntiforme, dovuta all'effetto combinato della diffrazione, delle aberrazioni ottiche e della turbolenza atmosferica che allarga il profilo.

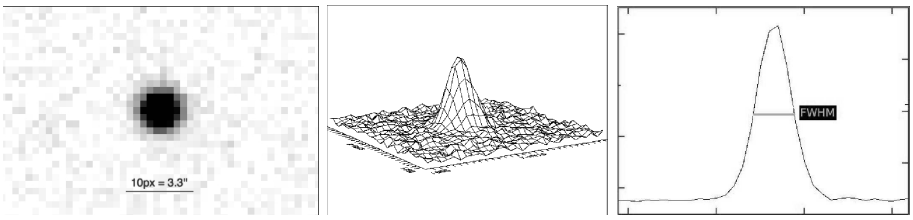


Figura 10.2: Un esempio di come appare una stella sul CCD, a causa di un seeing da 10 secondi d'arco (sinistra). La rappresentazione tridimensionale della distribuzione di luce della stella (centro) e la rappresentazione bidimensionale con indicata la FWHM (destra).

10.2 Riduzione di dati fotometrici

Con il termine **riduzione delle immagini**, si intende quell'insieme di passaggi che permettono di trasformare l'immagine **grezza** ottenuta direttamente al telescopio, in un'immagine **scientifica**, calibrata in unità fisiche su cui poter fare delle misure. Questo procedimento è necessario perché il passaggio attraverso la strumentazione influenza il segnale che proviene dalle sorgenti.
La riduzione permette quindi di ottenere, a partire dai conteggi registrati dal CCD, il reale valore di flusso osservato.

Prima di procedere, ricordiamo che ogni pixel di un'immagine registrata da un CCD è caratterizzato da 3 numeri: il suo valore in X e in Y, che ne identificano la posizione nell'immagine, e il suo valore in conteggi, che chiamiamo intensità. Il valore dell'intensità in conteggi dei pixel di ogni immagine contiene informazioni che provengono dall'oggetto studiato e/o dal cielo, dal read-out noise e dalla corrente di buio, e infine da possibili raggi cosmici. Ogni pixel risponde in modo simile, ma non uguale alla luce incidente e questa disuniformità va corretta. Quindi, quando effettuiamo delle osservazioni fotometriche, dobbiamo raccogliere oltre alle immagini dei target scientifici e delle stelle standard per la calibrazione fotometrica, anche le immagini di calibrazione, quali bias o dark e flat-field.

I passi fondamentali della riduzione sono i seguenti:

1. sottrazione del bias;
2. sottrazione del dark;
3. correzione per flat-field;
4. correzione per raggi cosmici;
5. calibrazione fotometrica.

Gli oggetti vengono quindi corretti per il bias, per la corrente di buio (dove presente), e per le disuniformità tra ogni pixel. Infine si procede con la determinazione delle costanti per la calibrazione fotometrica. I primi due passaggi, correggono effetti legati direttamente al CCD, l'ultimo permette di ottenere l'immagine calibrata in unità fisiche.

10.2.1 Sottrazione del bias

L'immagine di **bias** o **zero–level image** (Fig. 10.3, a sinistra) permette di stimare il livello zero e il rumore di un CCD. I valori in conteggi che si ottengono per un'esposizione di 0 secondi, con l'otturatore chiuso, equivalente quindi a 0 foto–elettroni raccolti, dopo la lettura e la conversione A/D mostrano una distribuzione centrata attorno allo zero. Quindi il valore medio è pari a zero, ma nell'immagine saranno presenti pixel con valori leggermente maggiori e leggermente minori di zero. Per evitare di lavorare con numeri negativi, l'elettronica del CCD è settata in modo da aggiungere un valore positivo ai conteggi per ogni immagine che viene letta. Questo valore è il livello zero medio ed è detto **bias**. Tipici valori sono 200–400 ADU/px.

Facendo un istogramma di un'immagine di bias (Fig. 10.3, a destra), si ottiene una distribuzione gaussiana in cui la posizione del picco rappresenta il valore medio dell'intensità dei pixel. La larghezza della distribuzione è legata al rumore di lettura del CCD e al gain secondo la seguente formula:

$$\sigma_{\mathrm{ADU}} = \frac{\mathrm{readout}}{\mathrm{gain}}$$

Poiché il bias viene aggiunto ad ogni esposizione, sarà presente anche quando si osservano gli oggetti scientifici, quindi è necessario conoscerne il valore per sottrarlo alle immagini.

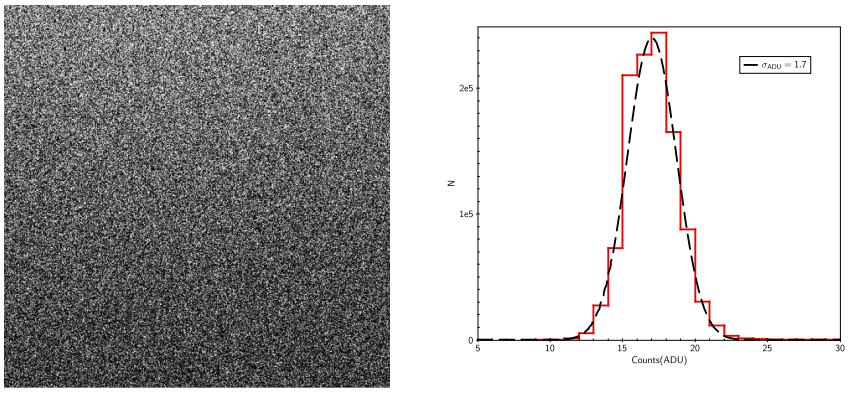


Figura 10.3: Esempio di un'immagine di bias (sinistra) e istogramma delle intensità dei suoi pixel (destra). Il bias si presenta uniforme, privo di gradienti.

Per valutare il valore del bias e il suo errore, si possono usare due metodi: l'**immagine di bias** o la sezione di overscan. Nel primo caso, si prende una decina di immagini di bias e se ne calcola la media o mediana. In questo modo si elimina l'effetto dei raggi cosmici interni al CCD, dovuti alla presenza di materiali debolmente radioattivi usati nella costruzione dei CCD, delle variazioni del read–out noise, e delle fluttuazioni casuali, che possono essere presenti nei singoli frame di bias. Variazioni del livello medio del CCD si possono avere in tempi–scala di mesi o anni, non nell'arco di una stessa notte. Le immagini di bias vanno prese durante ogni notte di osservazione, perché potrebbero variare in funzione della temperatura e di altri fattori. Se il bias non presenta gradienti, è possibile calcolare il valore medio dei conteggi di tutta l'immagine e correggere le immagini scientifiche sottraendo a queste il valore medio. Se invece sono presenti gradienti, è necessario sottrarre alle immagini scientifiche l'immagine del bias medio, pixel per pixel. Di solito questi pattern 2D, se presenti, hanno bassi livelli di conteggi e sono stabili nel tempo.

$$\mathrm{oggetto} - < \mathrm{bias} >$$

La **sezione di overscan** sono colonne e/o righe aggiunte dal CCD in ogni immagine. Non sono reali colonne o righe del CCD ma pseudo–pixel aggiuntivi creati mandando alcuni cicli di lettura vuoti, prima che il detector venga effettivamente letto. È una regione vuota, attaccata all'immagine e si può considerare come una sezione di solo bias presente in ogni immagine. Nel caso si abbia a

disposizione questa sezione, se ne calcola il valore medio dei conteggi e si sottrae questo valore medio ad ogni pixel delle immagini scientifiche.

10.2.2 Sottrazione del dark

Sappiamo che i CCD funzionano sfruttando l'effetto fotoelettrico, ma bisogna ricordare che anche il calore può liberare elettroni, detti **elettroni termici** o **corrente di buio** o ancora **rumore termico**. Questi elettroni termici sono liberati sia nel caso in cui il CCD sia esposto, che nel caso di immagini prese con otturatore chiuso, perché dipendono dalla temperatura del CCD. Maggiore è la temperatura, maggiore sarà la corrente di buio che cresce anche all'aumentare del tempo di posa. I CCD professionali sono di solito raffreddati a temperature sufficientemente basse ($\sim -80°$ C), in modo da minimizzare o eliminare la corrente di buio, per cui in questo caso la correzione per dark non è necessaria. Viceversa, qua3ndo i CCD sono poco raffreddati, come avviene per quelli amatoriali, questo segnale aggiuntivo va sottratto e per farlo si utilizzano le **immagini di dark**. Sono immagini prese con l'otturatore chiuso per un tempo di posa pari al tempo di posa delle immagini scientifiche e alla stessa temperatura delle immagini scientifiche. L'immagine di dark contiene anche il livello di bias, quindi nel caso sia necessaria questa correzione, basta avere i frame del dark per correggere gli oggetti sia per bias che per dark.

$$(\text{oggetto} - < \text{bias} >) - (< \text{dark} > - < \text{bias} >) = \text{oggetto} - < \text{dark} >$$

10.2.3 Correzione per flat-field

Se il sensore CCD fosse perfetto, la sua risposta ad una sorgente di luce omogenea sarebbe la stessa in tutte le sue parti. Nella realtà, ovviamente, sono presenti delle differenze di sensibilità dei pixel nelle varie regioni del CCD. Come possiamo vedere nell'esempio (Fig. 10.4), ci sono regioni più o meno brillanti, a seconda della posizione sul CCD. Nell'esempio, le zone rosso–arancione sono le regioni più luminose e gli angoli verdi–blu sono meno brillanti. Poiché vogliamo avere immagini scientifiche in cui i conteggi che otteniamo in ogni zona, siano proporzionali alla luce ricevuta e non dipendano dalla diversa sensibilità dei pixel, dobbiamo correggere per queste disuniformità.
La correzione per **flat–field** tiene conto di queste differenti risposte dei pixel all'arrivo della luce e si effettua per mezzo di opportune immagini. L'immagine di flat viene ottenuta illuminando il CCD in modo uniforme. Questo può essere fatto in diversi modi: con una lampada interna allo strumento (**internal flat**), illuminando in modo uniforme la cupola chiusa e puntando il telescopio verso la cupola (**dome flat**), prendendo immagini di diverse aree di cielo di notte, utilizzando quindi il cielo come "schermo" illuminato in modo uniforme (**sky flat**), prendendo delle immagini al crepuscolo, quando il cielo è molto più brillante delle sorgenti astronomiche (**twilight flat**). Negli ultimi due casi, le immagini vanno prese su aree diverse di cielo, in modo che, una volta combinate, le eventuali stelle presenti scompaiono nell'immagine finale. Questi due ultimi casi sono possibili in fotometria ma non in spettroscopia, dove come vedremo si utilizzano solo i flat interni o di cupola.

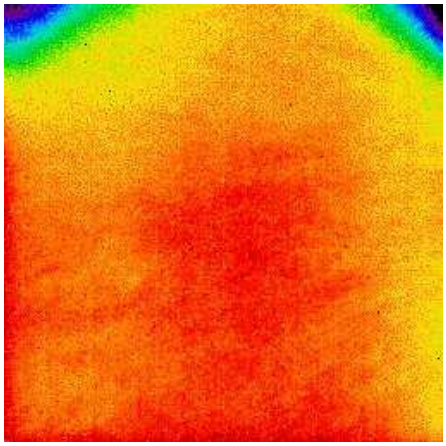


Figura 10.4: Esempio di un'immagine di flat–field. Il flat presenta regioni più brillanti, quelle rosso–arancio nel centro, e regioni meno luminose, come ad esempio gli angoli verdi–blu.

L'immagine scientifica va divisa per il flat, ma questo deve essere prima **normalizzato**, perché quello che ci interessa sono le disuniformità percentuali del CCD, cioè le fluttuazioni intorno al valore 1. Inoltre, se l'immagine scientifica venisse divisa per il flat non normalizzato, che tipicamente ha un elevato valore in conteggi ($\sim 30000 - 40000$), si ridurrebbero drasticamente i conteggi dell'immagine scientifica e si perderebbe la corrispondenza lineare tra i conteggi misurati e la quantità di luce emessa dalla sorgente e incidente sul CCD. Per normalizzare il flat, esso viene diviso per il suo valore medio.
Anche le immagini di flat vanno prese ogni notte, perché le condizioni potrebbero cambiare. Infatti, i flat vanno presi con lo stesso filtro dell'immagine scientifica e i filtri, possono venire puliti e possono venire mossi, comportando spostamenti di grani di polvere o altre impurità. Se i flat e le immagini non sono prese la stessa notte, la polvere o le impurità si possono trovare in un punto nel flat e in un altro punto dell'immagine, rendendo difficile o impossibile la correzione.
Ogni notte vanno prese circa una decina di immagini di flat che vengono poi combinate per ottenerne la mediana o la media, in modo da ridurre il rumore, eliminare i pixel spuri presenti nei frame individuali, ed eliminare possibili oggetti astronomici nel caso di sky e twilight flat. Ogni immagine va normalizzata secondo la propria media, prima di combinarla, tranne nel caso di internal flat e dome flat ottenuti con lo stesso di tempo posa. Il flat combinato si chiama anche **master-flat**.

$$\frac{\text{oggetto} - \ < \text{bias} >}{< (flat - \ < bias >)_{norm} >}$$

10.2.4 Correzione per raggi cosmici

I raggi cosmici sono particelle ad alta energia presenti nell'universo ed emesse in seguito a fenomeni molto energetici come esplosioni di supernovae e novae, o quasar, ma possono provenire anche da processi che avvengono nel Sole o nelle altre stelle. La maggior parte di queste particelle, viene bloccata dall'atmosfera,

per cui le immagini da terra ne sono meno affette rispetto alle immagini spaziali (Fig. 10.5).

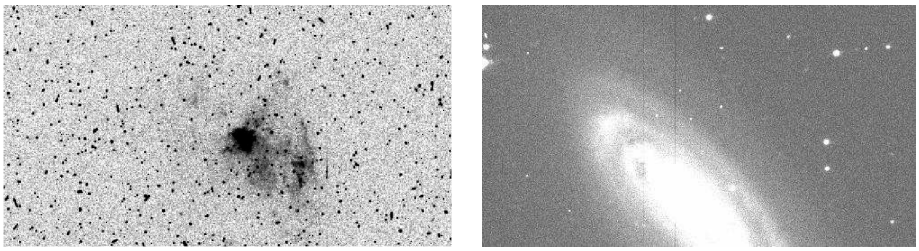


Figura 10.5: Sinistra: immagine presa con il telescopio spaziale (con i colori invertiti) in cui sono molto evidenti tutti i raggi cosmici presenti (le "macchie" nere). Destra: immagine presa da terra in cui sono ancora presenti dei raggi cosmici (in questo caso le "macchie" bianche), ma molti meno, rispetto all'immagine spaziale.

Quello che vediamo in un'immagine che presenta raggi cosmici, sono singoli pixel o insiemi di pixel brillanti, che si presentano in posizioni diverse in ogni posa che prendiamo dello stesso campo, perché sono eventi casuali. Inoltre, hanno forme che non richiamano, in genere, il disco stellare o altre strutture.
Esistono due possibili metodi per correggere i raggi cosmici. Il primo consiste nel costruire una maschera (vedi Fig. 10.6) che riproduca la posizione dei raggi cosmici dell'immagine, assegnando un valore diverso da zero solo ai pixel in cui sono presenti i raggi cosmici. La maschera viene poi usata per la correzione, sostituendo ai pixel relativi ai raggi cosmici, un valore medio o mediano del fondo cielo. Questo metodo è abbastanza automatico, ma per creare la maschera bisogna riconoscere i pixel brillanti dovuti ai raggi cosmici. Questo è possibile grazie al fatto che il profilo tridimensionale o bidimensionale della distribuzione di luce dei cosmici non è una PSF. Il secondo metodo, più efficace, consiste nell'ottenere per ogni oggetto da studiare più immagini che poi vengono combinate in modo da eliminare i pixel brillanti dovuti ai cosmici. Infatti, sfruttando il fatto che sono eventi casuali, lo stesso pixel in due istanti diversi non sarà affetto in entrambi i casi da un raggio cosmico. I raggi cosmici vengono eliminati perché combinando le immagini si possono escludere i pixel il cui valore si discosta per più di 3σ dal valore della media, sostituendo i pixel che scartano con il valore medio.
Dopo queste correzioni, si ha un'immagine ridotta e pronta per l'analisi scientifica, ma le misure di flusso sono ancora in conteggi di fotoni. Per avere valori fisici, l'ultimo passaggio da effettuare è la calibrazione fotometrica.

10.2.5 Calibrazione fotometrica

Per calibrazione fotometrica si intende il procedimento che permette di ottenere la magnitudine o il flusso in unità fisiche nella banda fotometrica utilizzata, a partire dalla magnitudine o flusso osservato, detto anche strumentale.
Consideriamo ad esempio il sistema fotometrico Johnson–Cousins, le magnitudini apparenti calibrate B e V sono legate alle magnitudini strumentali b e v dalle seguenti relazioni:

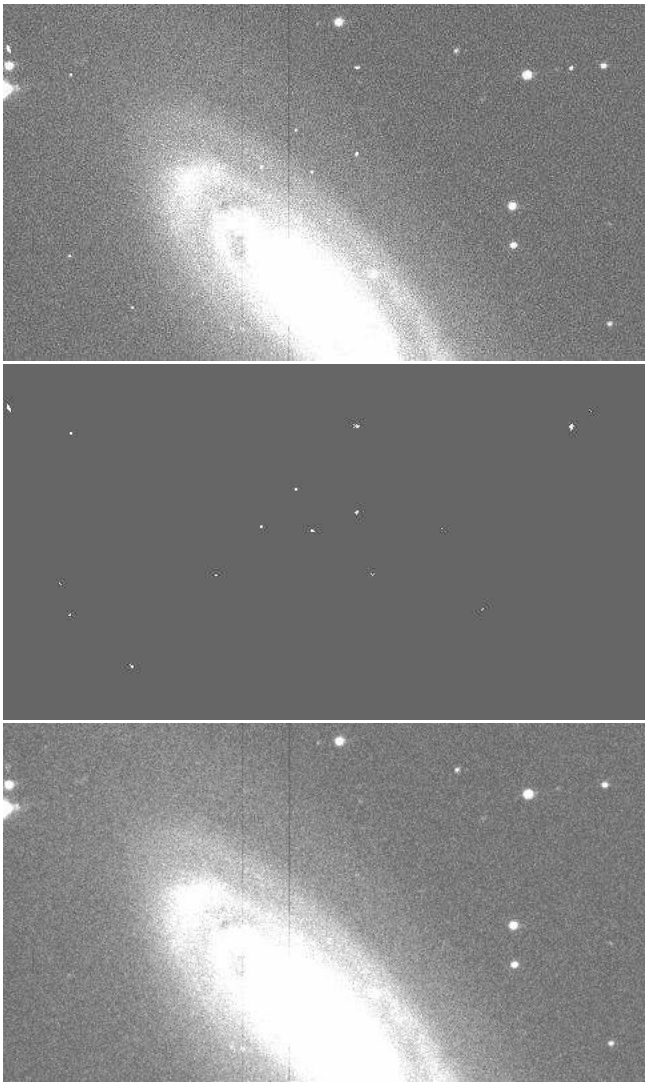


Figura 10.6: Esempio di immagine con i raggi cosmici (in alto), di una maschera che identifica la posizione dei raggi cosmici (al centro) e infine dell'immagine corretta, priva di raggi cosmici (in basso).

$$B = B_0 + b - k_B X_B + c_B(B - V)$$

$$V = V_0 + v - k_V X_V + c_V(B - V)$$

dove B_0 (o V_0) è il **punto zero fotometrico**, cioè il coefficiente moltiplicativo che permette di passare da unità di conteggi al secondo in unità fisiche (erg cm^{-2} s^{-1}), k_B (o k_V) è il **coefficiente di estinzione atmosferica** che dipende dal luogo di osservazione ed indica quanto forte è l'effetto di assorbimento della luce da parte dell'atmosfera, X_B (o X_V) è la massa d'aria dell'oggetto durante la

sua osservazione e indica la quantità di atmosfera attraversata dalla luce prima di essere raccolta dal telescopio. La massa d'aria è definita come:

$$X = \frac{1}{\cos(z)}$$

dove z è la distanza zenitale.
Più l'oggetto è basso sull'orizzonte, più è elevata la massa d'aria e più la luce subisce effetti di estinzione e rifrazione atmosferica. Tipicamente si cerca di non osservare a massa d'aria maggiore di 2, che corrisponde a non osservare sotto i 20–30 gradi sull'orizzonte.
c_B (o c_V) è il **termine di colore** e la quantità $c_V(B-V)$ è detta correzione di colore. Questa correzione è tipicamente molto piccola e tiene conto del fatto che un sistema fotometrico, ad esempio Johnson–Cousins, quello che definisce le magnitudini standard $UBVRI$, è stato ottenuto con filtri che non saranno identici ai filtri, sempre Johnson–Cousins, presenti nei vari osservatori. Le piccole differenze nei filtri generano una diversa risposta degli stessi, questo effetto viene corretto dal termine di colore.

Per ottenere i coefficienti di calibrazione, V_0, k_V e c_V, ci serviamo di stelle le cui magnitudini sono note e catalogate. Queste stelle sono dette **stelle standard fotometriche** e le aree di cielo che le contengono sono dette **campi standard**. I campi standard vanno osservati durante la notte a diverse masse d'aria e possono essere selezionati dal **catalogo di Landolt**, che è quello più usato:

http://www.cfht.hawaii.edu/ObsInfo/Standards/Landolt/

In questo sito sono indicati, per ogni campo stellare, le magnitudini V e i colori calibrati delle varie stelle presenti nel campo. È possibile anche visualizzare l'immagine del campo in modo da identificare le stelle utili alla calibrazione.

Per i metodi di misura della magnitudine delle stelle si rimanda alla sezione 12.3.

La prima quantità da determinare è il coefficiente di estinzione atmosferica (k) per ogni filtro. Per far questo servono per ogni stella almeno 3 determinazioni della magnitudine, una per ciascuna massa d'aria a cui il campo standard è stato osservato. Dopodiché si costruisce la **retta di Bouger**, ottenuta mettendo in grafico in ascissa i valori delle masse d'aria (X) e in ordinata la differenza tra la magnitudine da catalogo e la magnitudine strumentale osservata:

$$V - v = -k_V \times X_V + [V_0 + c_V(B-V)]$$

dove il termine noto è l'espressione $[V_0 + c_V(B-V)]$, mentre la pendenza è k, il valore del coefficiente di estinzione per ogni stella. Avremo quindi tante rette quante sono le stelle standard che abbiamo analizzato nel campo e calcoleremo la media dei valori di k per avere il coefficiente di estinzione nel filtro considerato. Ora, dobbiamo ricavare il punto zero e il termine di colore. Chiamiamo Q il termine noto della precedente relazione:

$$Q = c_V\,(B-V) + V_0$$

poniamo in grafico il valore di Q in ordinata e il valore di $B-V$ in ascissa, mettendo assieme tutte le stelle, e interpoliamo i punti con una retta. Il termine noto sarà il punto zero fotometrico e la pendenza sarà il coefficiente di colore.

11 Spettroscopia

La spettroscopia è la tecnica che permette di studiare le proprietà fisiche, cinematiche e dinamiche degli oggetti astronomici, attraverso lo studio degli spettri di tali oggetti. Per fare spettroscopia, abbiamo bisogno di un sistema composto da un telescopio, che raccoglie la luce degli oggetti che vogliamo studiare, uno spettrografo che scompone la luce nelle diverse lunghezze d'onda e di un rivelatore (un CCD) che registra lo spettro.

In questa sezione ci occuperemo degli spettri longslit, già descritti in precedenza.

In Fig. 11.1 a destra è riportato lo spettro di una galassia ottenuto con lo spettrografo EFOSC al telescopio di 2.2m di ESO/La Silla (Cile). Nell'immagine si vede indicato lo spettro della galassia, una riga di cielo, la direzione della dispersione (asse Y) e la direzione spaziale (asse X) ossia lungo la fenditura (asse X). La riga di cielo occupa tutta la larghezza del frame perché il cielo illumina tutta la fenditura. La colonna chiara presente nell'immagine, invece, è una colonna rovinata del CCD. Lo spettro dell'oggetto è più corto dell'immagine perchè è a bassa dispersione e scompare nella regione del vicino ultravioletto dove l'atmosfera ne assorbe la luce a quelle lunghezze d'onda e il CCD non è sensibile.

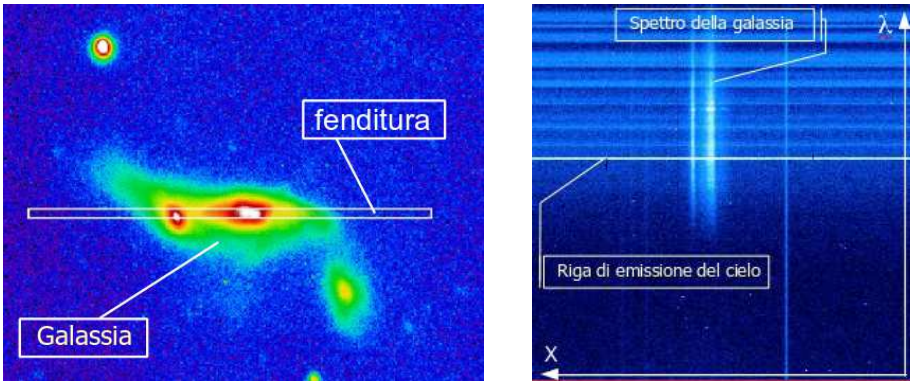


Figura 11.1: A sinistra: immagine di una galassia con disegnata la posizione della fenditura. A destra: lo spettro longslit della galassia a bassa dispersione.

11.1 Riduzione di dati spettroscopici

La sequenza per la riduzione dei dati spettroscopici è la seguente:

1. sottrazione del bias;
2. correzione per flat–field;
3. rimozione dei raggi cosmici;
4. calibrazione in lunghezza d'onda;
5. calibrazione in flusso;
6. sottrazione del cielo.

Per ridurre i dati, dobbiamo quindi osservare, oltre ai target scientifici, anche una serie di altre immagini, che globalmente chiamiamo **calibrazioni**: bias, flat, lampade e stelle standard spettrofotometriche.

11.1.1 Sottrazione del bias

L'immagine di bias è equivalente nel caso fotometrico e in quello spettroscopico. Ricordiamo che è un'immagine che si ottiene con l'otturatore chiuso e con tempo di posa pari a 0 secondi. Questa immagine permette di identificare il livello elettronico del CCD e va sottratta all'immagine scientifica in quanto i conteggi relativi al bias, presenti anche nell'immagine scientifica, sono conteggi in più e dovuti a un effetto dello strumento.
Tipicamente, ne vengono presi un certo numero a inizio o fine notte e poi vengono mediati per ottenere un'unica immagine che va sottratta. La sottrazione per immagine è necessaria se il bias presenta dei gradienti, altrimenti è possibile determinare il valore medio dei conteggi e sottrarre direttamente questo numero. Inoltre, sempre nel caso in cui il bias non presenti gradienti, è possibile usare la sezione di overscan (quando presente) per il calcolo del valore medio dei conteggi del bias.

11.1.2 Correzione per flat–field

Il flat nel caso spettroscopico è ottenuto prendendo lo spettro di una lampada che emette una luce continua e uniforme (Fig. 11.2 in alto). In genere si utilizza una lampada alogena. Lo spettro risultante sarà una combinazione dello spettro continuo della lampada e della curva di risposta del CCD, a cui si aggiungono gli effetti della non uniforme risposta dei pixel. Per correggere questi difetti strumentali, dobbiamo prima **normalizzare** il flat, come nel caso della fotometria, ma con un metodo differente. In questo caso, normalizzare vuol dire eliminare dal flat lo spettro della lampada. Se la dispersione è lungo le colonne, si calcola l'intensità media delle colonne, ottenendo un unico profilo (Fig. 11.2 al centro). Questo profilo è tipicamente più intenso nel rosso (le lunghezze d'onda crescono con le X in questo caso) che nel blu, perché da un lato il CCD è meno sensibile nel blu e dall'altro è la lampada stessa che emette di più nel rosso. Si interpola il profilo medio e si divide ogni colonna del flat per questo fit, ottenendo un

immagine normalizzata (Fig. 11.2 in basso) in cui le fluttuazioni sono legate appunto alla disuniforme risposta dei pixel alla luce incidente.

Gli spettri degli oggetti da correggere saranno poi divisi per il flat normalizzato.

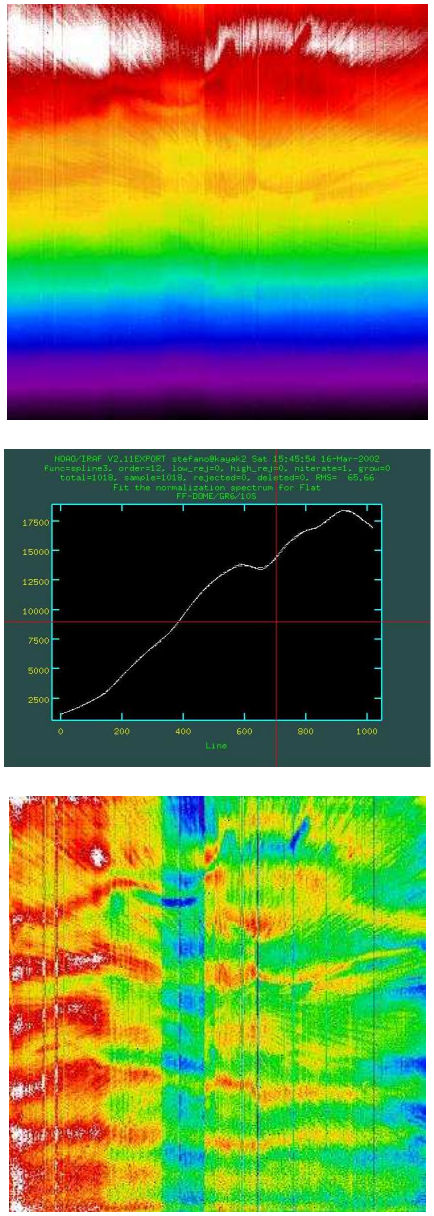


Figura 11.2: In alto: immagine di flat–field in falsi colori, la dispersione è lungo le colonne e le lunghezze d'onda crescono dal basso verso l'alto. Al centro: intensità media del flat lungo le colonne, le lunghezze d'onda crescono da sinistra a destra. In basso: il flat dopo la procedura di normalizzazione.

11.1.3 Correzione per raggi cosmici

I raggi cosmici sono radiazioni ad alta energia che colpiscono in modo casuale il CCD, generando, in un'immagine, gruppi di pixel con conteggi molto elevati. Come già visto per la fotometria, un metodo di correzione per questo effetto è quello di analizzare lo spettro e identificare i pixel che presentano conteggi estremamente elevati rispetto ai pixel circostanti. Si crea poi una maschera che presenta valori diversi da zero solo in quei pixel in cui sono stati identificati i raggi cosmici e con questa maschera si correggono le immagini scientifiche.
Nel caso degli spettri, i raggi cosmici possono essere confrontabili come dimensioni con le righe spettrali. Se un raggio cosmico cade vicino o sopra una riga, l'identificazione e la successiva correzione saranno molto difficili.
Un esempio di spettro con raggi cosmici, di maschera e di spettro ripulito si può vedere in Fig. 11.3.



Figura 11.3: A sinistra: particolare di uno spettro con i raggi cosmici. Al centro: maschera con la posizione dei raggi cosmici identificati. A destra: lo spettro corretto.

Oltre alla maschera, per correggere per raggi cosmici si può usare una combinazione di pose multiple. In pratica, il tempo di posa scelto per il dato oggetto viene suddiviso in varie pose con tempo di posa inferiore, che andranno poi sommate in modo da ottenere un'immagine in cui il segnale è equivalente a un'unica posa con tempo di esposizione totale.
È più conveniente osservare usando questo secondo metodo per vari motivi. In primo luogo, con una posa lunga aumenta la probabilità che transitino nuvole o veli, inoltre, dove l'inquinamento luminoso è forte, il cielo diventa troppo brillante e risulta poi difficile sottrarlo. Infine, questo metodo è più efficace nella sottrazione dei raggi cosmici, che come si è detto sono eventi casuali.

11.1.4 Calibrazione in lunghezza d'onda

Il passaggio successivo è la calibrazione in lunghezza d'onda. Come già visto per la fotometria, le immagini digitali hanno i pixel caratterizzati da tre numeri: valore di X, valore di Y e valore in conteggi. Nel caso degli spettri, in uno dei due assi c'è la **direzione spaziale** lungo la fenditura e nell'altro la **dispersione**.
La calibrazione in lunghezza d'onda permette di trasformare il valore in pixel lungo l'asse della dispersione in lunghezze d'onda misurate in unità fisiche (Å). Quello che dobbiamo trovare, quindi, è la cosiddetta **soluzione in dispersione** (Å px^{-1}), cioè la funzione che permette di ottenere la conversione da pixel a Å. Si tratta di confrontare qualcosa di noto con qualcosa di osservato e poi ottenere la funzione di trasformazione. Per fare questo, si prendono degli spettri di

lampade a righe di emissione, le cui lunghezze d'onda sono note (mercurio, neon, argon, elio, rame, cadmio, ferro, ...). In Fig. 11.4 è mostrato lo spettro di una lampada di He–Ar, la dispersione è lungo le colonne dell'immagine e la lunghezza d'onda cresce dal basso verso l'alto.



Figura 11.4: Spettro di una lampada di He–Ar. Nell'immagine è indicata la riga di He I a 5876Å.

Si parte generalmente dal centro dell'immagine: da una colonna se la dispersione è lungo le colonne, da una riga se è lungo le righe.
Si identificano un certo numero di righe disposte in diverse parti dello spettro, dal blu al rosso, associando a ogni posizione in pixel il corrispondente valore in AA. Poi si calcola la soluzione in dispersione per questa singola colonna (o riga) dell'immagine (Fig. 11.5 in alto) e si determinano i valori di λ iniziale (in Å) e di $\delta\lambda$ (in Å/px).
La necessità di utilizzare il maggior numero di righe spettrali possibili è legata al fatto che **la dispersione non è costante** alle varie lunghezze d'onda. La calibrazione in lunghezza d'onda corregge questa proprietà dello spettro trasformandolo in modo che ogni pixel corrisponda ad un intervallo di lunghezza d'onda costante. Questa fase è anche chiamata **linearizzazione dello spettro**.
La soluzione appena determinata deve essere riapplicata a tutte le colonne (o a tutte le righe) dell'immagine. Questo perché le righe spettrali generalmente non sono allineate con le colonne (o le righe) del CCD e spesso, per effetti legati alle ottiche, mostrano una curvatura. È necessario quindi eseguire un fit bidimensionale che fornisce la soluzione in dispersione su tutta l'immagine e inoltre corregge le distorsioni delle righe raddrizzandole (Fig. 11.5 in basso).

11.1.5 Calibrazione fotometrica

Dopo aver calibrato in lunghezza d'onda si passa a calibrare in flusso, cioè a trasformare i conteggi di fotoni in unità fisiche. Per fare questo dobbiamo prendere lo spettro di almeno una **stella standard spettrofotometrica** i

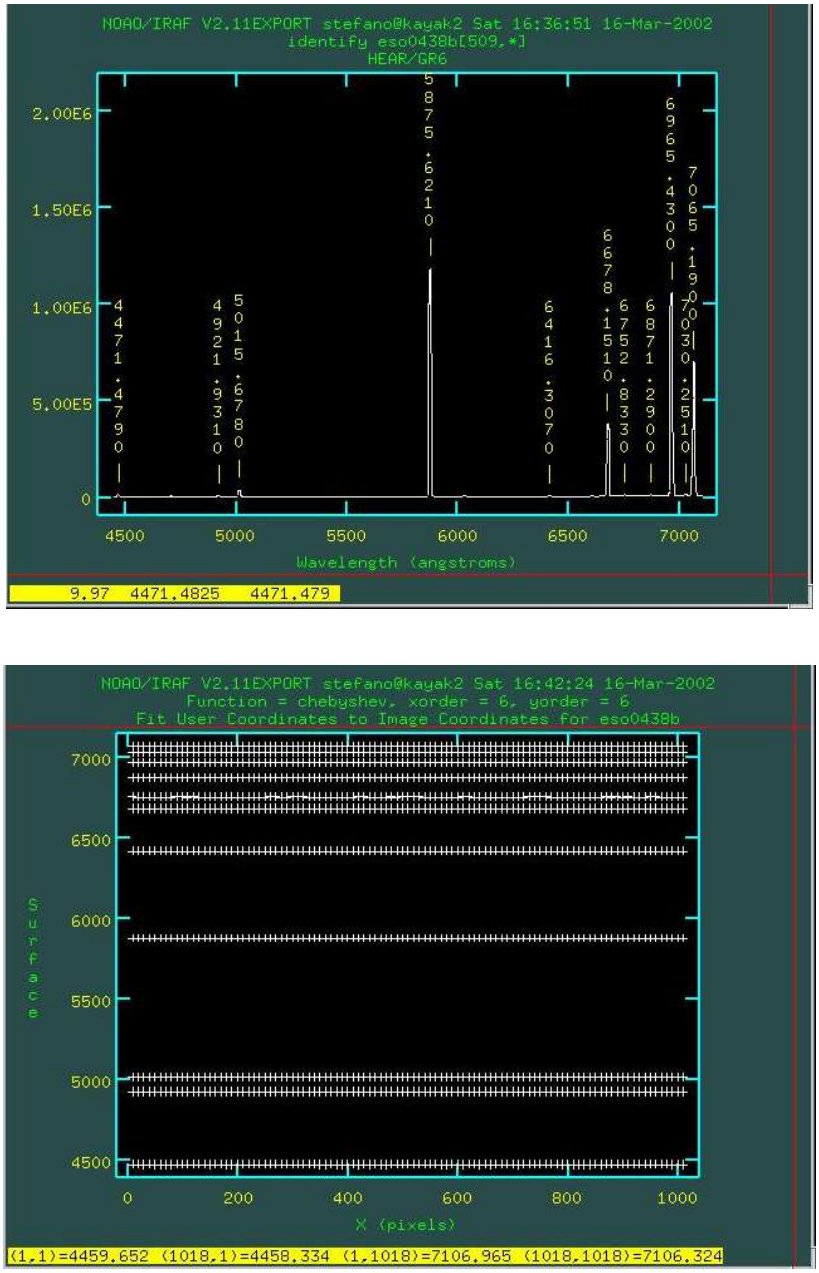


Figura 11.5: In alto: lo spettro della lampada di He–Ar con identificate le righe spettrali. In basso: il fit bidimensionale che determina la soluzione in dispersione per tutta l'immagine.

cui sono noti i valori di flusso in funzione della lunghezza d'onda. Vengono usate di norma stelle calde perché gli spettri di queste sono prive delle righe in assorbimento dovute ai metalli. Lo spettro sarà quindi piccato verso le lunghezze d'onda più corte, cioè nel blu.
Per prima cosa lo spettro della stella (Fig. 11.6 in alto) viene sommato in direzione spaziale, dopo aver sottratto il contributo del cielo, in modo da ottenere uno spettro monodimensionale che contenga tutto il flusso. Nonostante la stella sia in genere calda, lo spettro non appare piccato nel blu o verso l'ultravioletto, questo a causa della curva di efficienza quantica del sistema telescopio+strumento+CCD.
Il flusso strumentale viene poi misurato negli intervalli di lunghezza d'onda in cui è noto il flusso calibrato (Fig. 11.6 al centro). I conteggi osservati vengono confrontati con i valori calibrati in modo da ottenere la **curva di calibrazione in flusso** o **curva di sensibilità** (Fig. 11.6 in basso), in cui in ordinata c'è il coefficiente moltiplicativo in unità di erg cm^{-2} s^{-1} $Å^{-1}$ $counts^{-1}$, espresso in magnitudini. Questo coefficiente varia con la lunghezza d'onda ed è più elevato nel blu che nel rosso, perché l'efficienza è più bassa nel blu che nel rosso.
Applicando la calibrazione fotometrica ai target scientifici, possiamo vedere come lo spettro venga modificato. In Fig. 11.7, a sinistra, abbiamo l'immagine dello spettro di una galassia prima della calibrazione in flusso, mentre a destra abbiamo la stessa immagine, dopo la calibrazione in flusso. Nel blu (parte bassa dello spettro non calibrato), vediamo che il continuo si indebolisce e si assottiglia, mentre dopo la calibrazione (immagine a destra) lo spettro nella zona blu mostra un continuo più intenso. Ovviamente viene amplificato anche il rumore, e anche di molto, perchè il coefficiente moltiplicativo nella regione spettrale blu è molto maggiore che nel rosso.

11.1.6 Sottrazione del cielo

L'ultimo passaggio da eseguire è la sottrazione dello spettro del cielo. Lo spettro del cielo notturno è un misto di righe dovute all'illuminazione nelle zone abitate, e di righe o luce dovuta all'atmosfera. Le righe più prominenti sono causate dalle luci al sodio (Na λ) ad alta pressione e alle lampade ai vapori di mercurio (Hg 4358 e 5460). Le righe a 5577 Å, 6300 Å e 6364 Å sono righe di emissione di ossigeno atmosferico che creano la luminescenza naturale del cielo. Abbiamo inoltre le bande di OH e assorbimenti tanto più profondi, quanto maggiore è l'umidità.
Per sottrarre lo spettro del cielo, si esegue il fit dello spettro in direzione perpendicolare alla dispersione, cioè lungo la fenditura.
È necessario verificare in varie zone dello spettro che la funzione che si sta usando per il fit vada bene. Una volta trovata la funzione che va bene, questa viene sottratta allo spettro rimuovendo il contributo del cielo, in termini sia di luce continua che di righe spettrali.
Non sempre si riesce a sottrare bene il cielo, soprattutto per quanto riguarda le righe più brillanti, come è possibile vedere in Fig. 11.8, dove a destra nello spettro senza cielo si notano dei residui, zone in cui non si è riusciti a riprodurre bene le righe: sia con valori negativi, dove si è sovrasottratto il cielo (zone scure), sia con valori positivi, dove non si è sottratto abbastanza (zone chiare).

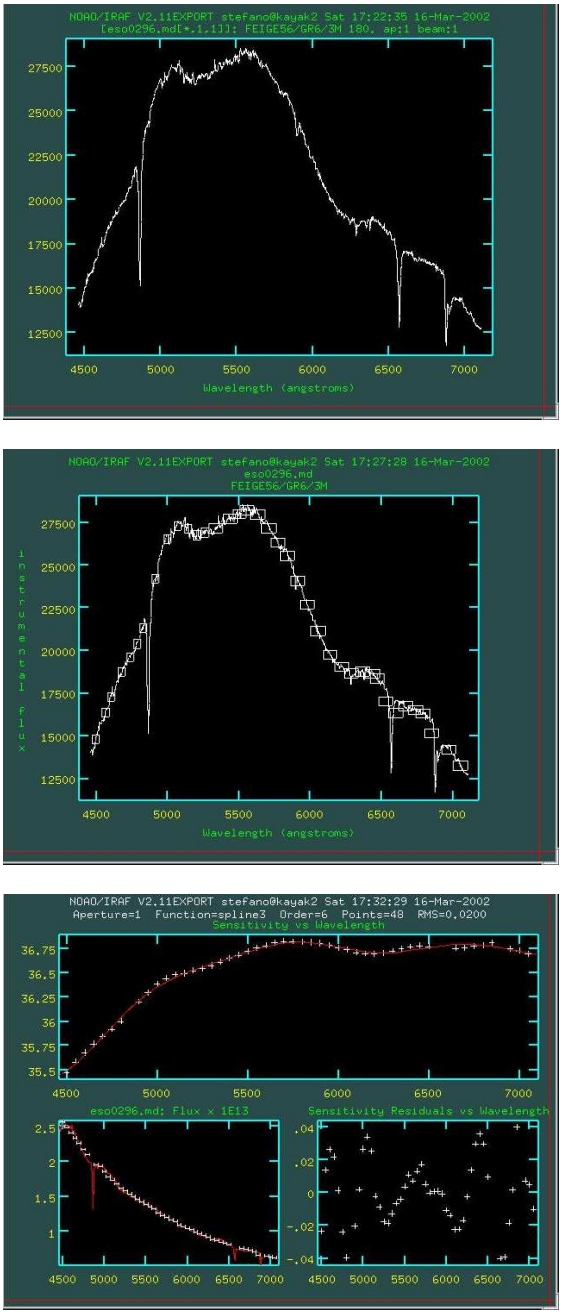


Figura 11.6: Procedura di calibrazione in flusso. In alto: lo spettro della stella standard. Al centro: la misura del flusso strumentale in conteggi di fotoni negli intervalli di lunghezza d'onda in cui è noto il flusso calibrato. In basso: la curva di sensibilità (grafico in alto), lo spettro della stella calibrato (grafico in basso a sinistra), i residui (grafico in basso a destra).

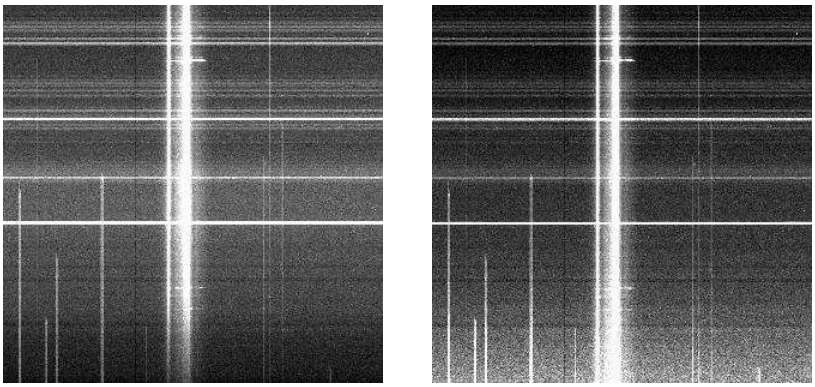


Figura 11.7: Confronto fra lo spettro prima (sinistra) e dopo (destra) la calibrazione in flusso.

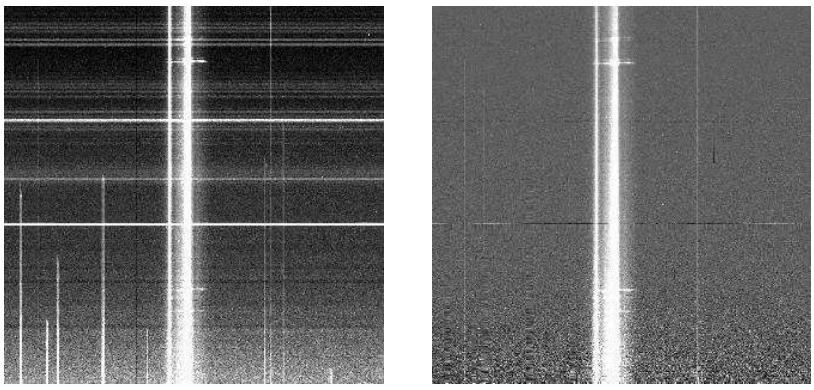


Figura 11.8: Esempio di sottrazione del cielo. Immagine prima della sottrazione (sinistra) e dopo la sottrazione (destra).

12 Esperienze

In questo capitolo verranno descritti i dettagli delle esperienze pratiche associate al corso. Verranno analizzati dati estratti dall'archivio pubblico della **Sloan Digital Sky Survey** (**SDSS**, http://www.sdss.org), la più importante survey degli ultimi anni.
La SDSS è stata realizzata con un telescopio Ritchey-Chrétien altazimutale di 2.5 m di diametro, della Fondazione Sloan, situato nell'osservatorio di Apache Point (2788 m di altitudine) nel New Mexico (USA). Dal 2000 ad oggi, è stata osservata un' area di cielo di oltre 14 mila gradi quadrati in fotometria, grazie ad una camera composta da 30 CCD da 2048×2048 pixel disposti a formare un mosaico di 6×5 in grado di inquadrare oltre 1° di campo, e in spettroscopia grazie a uno spettrografo multi-object a fibre ottiche (ciascuna da 3″) e due reticoli, uno per il blu (3800–6000 Å) e uno per il rosso (5800–9200 Å). Il sistema fotometrico utilizzato dalla SDSS è chiamato *ugriz* e consiste di 5 filtri, le cui curve di trasmissione si sovrappongono meno di quanto accade nel caso del sistema UBVRI (Fig. 12.1).
L'archivio dei dati SDSS è pubblico e mette a disposizione dati ridotti e calibrati, ma anche tabelle di misure già effettuate, come magnitudini o intensità di righe spettrali. Rappresenta quindi una potente sorgente di informazioni per la ricerca scientifica, ma anche per applicazioni di carattere didattico.

12.1 Temperatura e colore delle stelle

Lo scopo di questa esperienza è la stima della temperatura di un campione di stelle, selezionate sulla base dell'indice di colore, attraverso il confronto dei loro spettri ottici con curve di corpo nero. Successivamente, le temperature così determinate verranno messe in relazione all'indice di colore, per verificare la relazione di proporzionalità inversa fra queste due quantità (vedere la Sezione 8.1 per la spiegazione).
La formula del corpo nero in funzione di lunghezza d'onda e temperatura è:

$$\mathrm{B}(\lambda, \mathrm{T}) = \frac{3.742 \cdot 10^{-5}}{\lambda^5 \left(\mathrm{e}^{\frac{1.439}{\lambda \mathrm{T}}} - 1 \right)}$$

Per ogni valore del parametro T, la funzione dipende dalla sola variabile λ. In questa formula, λ è espressa in cm e T in gradi Kelvin.
Poiché lo spettro di ogni stella avrà un suo flusso f_λ, legato alla sua luminosità L_λ e alla sua distanza d dalla Terra dalla relazione $L_\lambda = 4\pi d^2 f_\lambda$, è conveniente

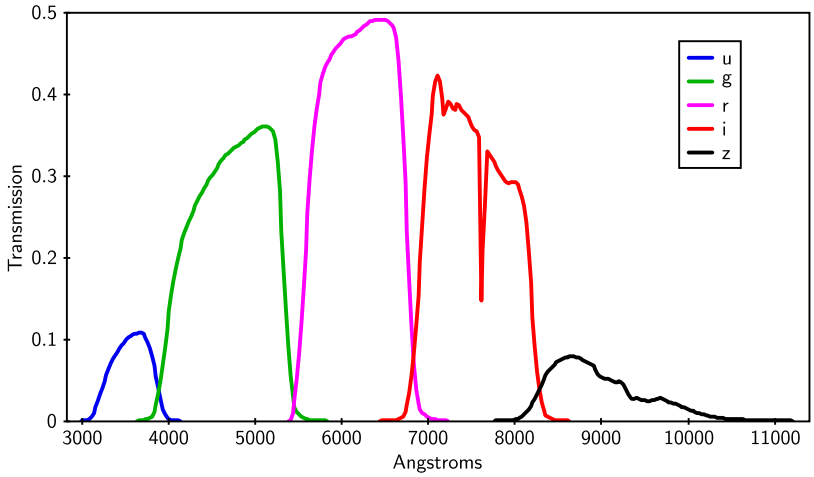


Figura 12.1: Curve di trasmissione del sistema fotometrico *ugriz*. Le lunghezze d'onda efficaci dei filtri sono 3551 Å (u), 4686 Å (g), 6165 Å (r), 7481 Å (i), 8931 Å (z).

normalizzare ogni spettro ad una certa lunghezza d'onda (Fig. 12.2) e confrontarlo con la curva di corpo nero anch'essa normalizzata (Fig. 12.3). Per questa esperienza si è scelto di normalizzare a $\lambda_0 = 5500$ Å, cioè lo spettro ha flusso pari a 1 a 5500 Å. Questa scelta è del tutto arbitraria!

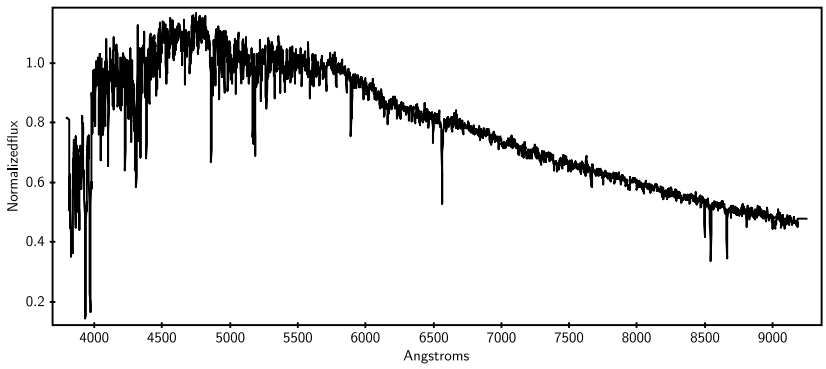


Figura 12.2: Esempio di spettro stellare normalizzato. L'asse Y è in unità adimensionali.

Per ottenere la formula di corpo nero normalizzata $B_n(\lambda, T)$ si procede come segue:

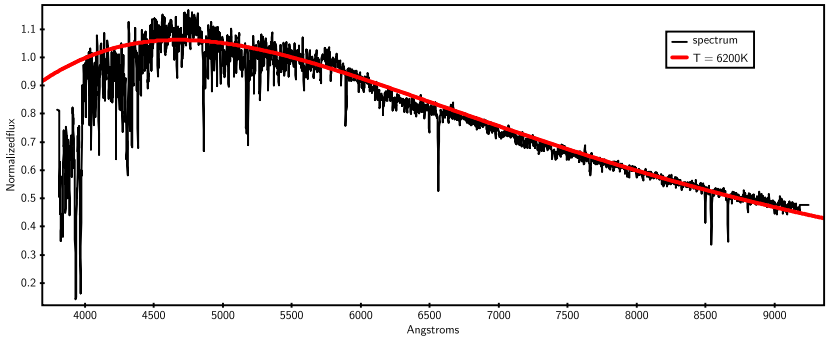


Figura 12.3: Lo spettro di Fig. 12.2 confrontato con una curva di corpo nero a temperatura T = 6200 K.

$$\mathrm{B}(\lambda_0, \mathrm{T}) = \frac{3.742 \cdot 10^{-5}}{\lambda_0^5 \left(\mathrm{e}^{\frac{1.439}{\lambda_0 \mathrm{T}}} - 1 \right)}$$

$$\mathrm{B_n}(\lambda, \mathrm{T}) = \frac{\mathrm{B}(\lambda, \mathrm{T})}{\mathrm{B}(\lambda_0, \mathrm{T})} = \frac{\lambda_0^5 \left(\mathrm{e}^{\frac{1.439}{\lambda_0 \mathrm{T}}} - 1 \right)}{\lambda^5 \left(\mathrm{e}^{\frac{1.439}{\lambda \mathrm{T}}} - 1 \right)}$$

Sostituendo il valore di λ_0 scelto e tenendo opportunamente conto delle unità di misura si ottiene:

$$\mathrm{B_n}(\lambda, \mathrm{T}) = \frac{(5500)^5 \left(\mathrm{e}^{\frac{1.439 \cdot 10^8}{5500 \cdot \mathrm{T}}} - 1 \right)}{\lambda^5 \left(\mathrm{e}^{\frac{1.439 \cdot 10^8}{\lambda \mathrm{T}}} - 1 \right)}$$

dove adesso λ è espressa in Å.

Operazioni di misura:

- Aprire con TOPCAT il file **sample.txt** che contiene il nome di ogni stella nel catalogo SDSS, le coordinate α e δ (al 2000.0) in unità di gradi, 3 codici che identificano l'oggetto (mjd, plate, fiberid) e le magnitudini u, g, r, i, z.
- Gli spettri delle 48 stelle sono già normalizzati e contenuti nei file **spn-mjd-plate-fiberid.txt**.
- Aprire uno alla volta i file degli spettri delle stelle seguendo il file sample.txt, aprire e formattare il grafico.
- Sovrapporre allo spettro della stella la curva di corpo nero scegliendo una temperatura di partenza (ad esempio T=10000.).

  Utilizzare la seguente formula:

```
(pow(5500.,5)*((exp((1.439*pow(10.,8))/(5500.*T))-1)))/
(pow(x,5)* ((exp((1.439*pow(10.,8))/(x*T)))-1))
```

- Modificare la temperatura finché la curva non approssima al meglio lo spettro della stella.

Nella gran parte dei casi sarà impossibile riprodurre perfettamente lo spettro con una curva di corpo nero: in particolare si noterà che la parte blu dello spettro e quella rossa potranno essere riprodotti da due curve con temperature diverse. Questo può essere causato da una deviazione intrinseca dello spettro stellare dalla forma del corpo nero, a causa della presenza di righe e bande in assorbimento, oppure da una non precisa calibrazione in flusso, o anche, in questo caso, dalla mancata correzione del flusso per reddening galattico, quantità legata alla distanza delle stelle che non è facilmente misurabile. Si tenga comunque conto che gran parte della survey SDSS è stata effettuata evitando il piano galattico e in effetti le 48 stelle di questa esperienza si trovano tutte a latitudine galattica $< -20°$ e $> 20°$.
Per avere una stima dell'errore sulla temperatura è consigliabile riprodurre ogni spettro con una curva di corpo nero che riproduca la parte blu dello spettro (T_{max}) e una che riproduca la parte rossa (T_{min}).

- Riprodurre ogni spettro con una curva di corpo nero che si adatti alla parte blu dello spettro (T_{max}) e un'altra alla parte rossa (T_{min}).
- Editare il file sample.txt aggiungendo in ogni riga i valori di T_{min} e T_{max}.
- Riaprire il file con TOPCAT e calcolare il valore medio della temperatura e la sua indeterminazione.

$$< T >= \frac{T_{max} + T_{min}}{2} \qquad \Delta T = \frac{T_{max} - T_{min}}{2}$$

- Calcolare l'inverso della temperatura e il suo errore.

$$\Delta\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\Delta T}{T^2}$$

- Calcolare gli indici di colore $g - r$ e $r - i$.
- Riportare in grafico in X i valori di 1/T con le relative barre d'errore e in Y i valori di $g - r$ oppure $r - i$.
- Utilizzare il metodo dei minimi quadrati per calcolare i coefficienti (e i relativi errori) della relazione:

$$m(\lambda_1) - m(\lambda_2) = \frac{A}{T} + B$$

- Calcolare anche il coefficiente di correlazione.

La Fig. 12.4 mostra il risultato. La retta di regressione lineare ha la seguente equazione:

$$g - r = \frac{8066.22(\pm 199.01)}{T} - 0.81(\pm 0.03)$$

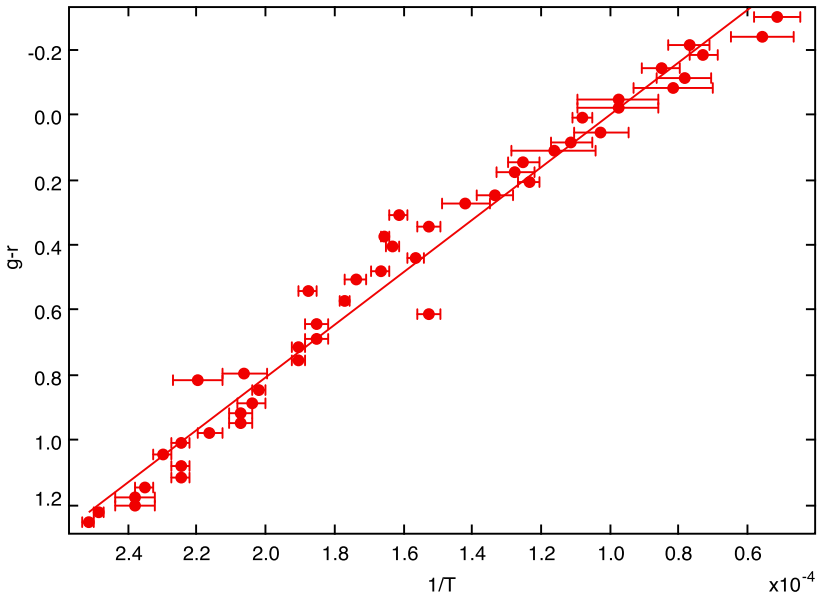


Figura 12.4: Grafico dell'indice di colore $g-r$ contro l'inverso della temperatura. L'andamento lineare ha un coefficiente di correlazione pari a 0.98.

12.2 La classificazione spettrale delle stelle

È noto che la classificazione spettrale delle stelle è stata ottenuta sulla base della presenza e dell'intensità delle righe spettrali in assorbimento provenienti da specie atomiche diverse. La tabella seguente riporta le principali righe del Sole identificate da Fraunhofer nel 1817. Le righe indicate come "cielo" sono in realtà bande in assorbimento dovute alla nostra atmosfera.

Tabella 12.1: Righe di Fraunhofer

A	7593.7	O2 (cielo)
B	6867.2	O2 (cielo)
C	6562.8	Hα
D1	5895.9	Na I
D2	5890.0	Na I
E	5269.6	CaFe
F	4861.3	Hβ
G	4314.2	CH
H	3968.5	Ca II
K	3933.7	Ca II

Nella tabella successiva sono invece riportate le righe della serie di Balmer dell'idrogeno, e le principali righe di elio e di altri metalli presenti negli spettri delle stelle (e delle galassie).

Tabella 12.2: Serie di Balmer dell'HI, righe di He, altri metalli.

3721.9	H14	4026.2	HeI	4150	CN
3734.4	H13	4686	HeII	4227	Ca I
3750.2	H12	4713.1	HeI	4383	Fe I
3770.6	H11	5875.6	HeI	4455	Ca I
3797.9	H10	6678.2	HeI	4531	Fe I
3835.4	H9			4668	Fe I
3889.0	H8			5015	Fe I
3969.6	Hϵ			5175	Mg I
4101.7	Hδ			5335	Fe I
4340.0	Hγ			5406	Fe I
4861.3	Hβ			5709	Fe I
6562.8	Hα			5782	Fe I
				8498	Ca II
				8542	Ca II
				8662	Ca II

Scopo dell'esperienza è quantificare l'intensità delle righe spettrali attraverso la misura della loro **larghezza equivalente** e successivo confronto con la temperatura determinata precedentemente.
La **larghezza equivalente**, o **equivalent width** (**EW**), di una riga spettrale è formalmente la larghezza di un rettangolo che ha altezza data dall'intensità del continuo e area pari al flusso contenuto nella riga. Essa si calcola integrando il profilo della riga e dividendo il valore risultante per l'intensità media del continuo alla base della riga. Essendo in genere il flusso della riga in unità di erg cm^{-2} s^{-1} e l'intensità del continuo in unità di erg cm^{-2} s^{-1} Å^{-1}, l'EW sarà espressa in unità di Å.

Operazioni di misura:

- Utilizzare il programma IRAF.
- Creare una lista dei file .fits (spettri delle stelle da esaminare) con il comando

  ecl> **files** $*$.fits > *nomefile*
- Utilizzare il comando SPLOT nel seguente modo:

  ecl> **splot** @*nomefile* xmin=λ_i xmax=λ_f

  dove λ_i e λ_f sono le lunghezze d'onda di un intervallo a scelta che contiene la riga spettrale da misurare. In questo modo non è necessario zoomare ogni volta che si analizza un nuovo spettro. L'uso della lista permette di misurare uno spettro alla volta passando al successivo con il tasto **q**. Si faccia attenzione che non è possibile tornare allo spettro precedente e che in caso di errore conviene interrompere il comando con **shift+i**. Ogni misura viene automaticamente registrata nel file *splot.log*.
- Utilizzare il tasto **e** cliccando prima a sinistra e poi a destra nella zona in cui il profilo della riga si confonde con il continuo. La scelta arbitraria

sulla posizione del continuo sarà la principale sorgente di errore. Ripetere la misura 5 volte.

- Una volta terminata la sequenza degli spettri, utilizzare il file splot.log per estrarre le informazioni. La larghezza equivalente è indicata come **eqw**.
- Costruire un nuovo file ascii costituito da 8 colonne: le prime 3 sono i valori di mjd, plate e fiberid contenuti nei nomi dei file, le altre 5 sono le misure di EW per ogni spettro.
- Utilizzare TOPCAT per incrociare questo file ascii con il file dei risultati dell'esperienza precedente. Le colonne in comune fra i due file saranno quelle dei valori di mjd, plate e fiberid.
- Nel file risultante, calcolare la media e la deviazione standard delle 5 misure di EW. Conservare solo le colonne contenenti: nome della stella dall'archivio SDSS, mjd, plate, fiberid, T e relativo errore, EW e relativo errore.

Applicare questa procedura ad almeno 3 righe spettrali: Hα, Na I 5892, Ca II 3934.
Infine riportare tutto su un grafico T contro EW: invertire l'asse X e usare una scala logaritmica. Per il grafico utilizzare TOPCAT o altri programmi a scelta. Come esempio di risultato si veda la Fig. 12.5, in cui sono state riportate le misure di EW di Hα e della riga di Ca II 3934. Come si può notare, all'aumentare della temperatura, aumenta l'intensità delle righe di idrogeno mentre diminuisce quella dei metalli.

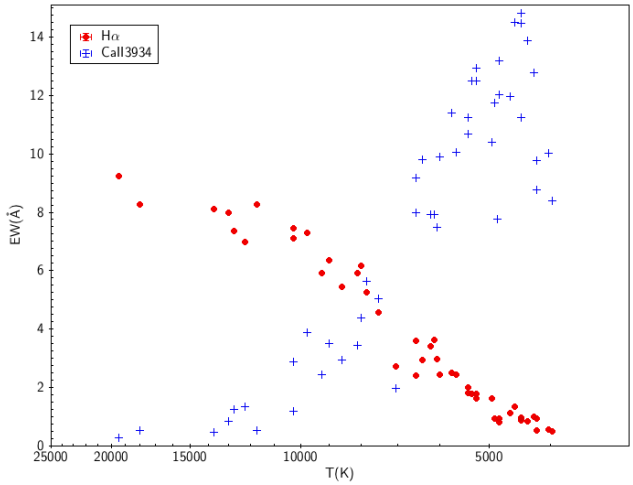


Figura 12.5: Larghezza equivalente delle righe Hα e Ca II 3934 in funzione della temperatura.

Molto interessante è il confronto fra questo grafico e l'andamento previsto delle varie specie ioniche in funzione della temperatura (Fig. 12.6), che dipende dall'equazione di Boltzmann:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right)$$

dove n_1 e n_2 sono la densità numerica di atomi con elettroni al livello 1 e 2, g_1 e g_2 sono i pesi statistici dei livelli 1 e 2, ΔE è il salto di energia fra i due livelli.

E dall'equazione di Saha:

$$\frac{n^{i+1} n_e}{n^i} = 2\frac{Q^{i+1}}{Q^i} \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_i}{kT}\right)$$

dove n^i e n^{i+1} sono la densità numerica di atomi nello stato ionizzato i e $i+1$, Q^i e Q^{i+1} sono le funzioni di partizione, m_e la massa dell'elettrone e infine χ_i il potenziale di ionizzazione dallo stato i allo stato $i+1$.
I potenziali di ionizzazione delle specie ioniche in figura sono i seguenti: **Ca I** 6.11 eV, **Fe I** 7.87 eV, **Ca II** 11.87, **H** 13.6 eV, **Fe II** 16.18 eV, **Si II** 16.34 eV, **Mg II** 15.04 eV, **He I** 24.59 eV, **Si III** 33.49 eV, **Si IV** 45.14 eV, **He II** 54.42 eV .

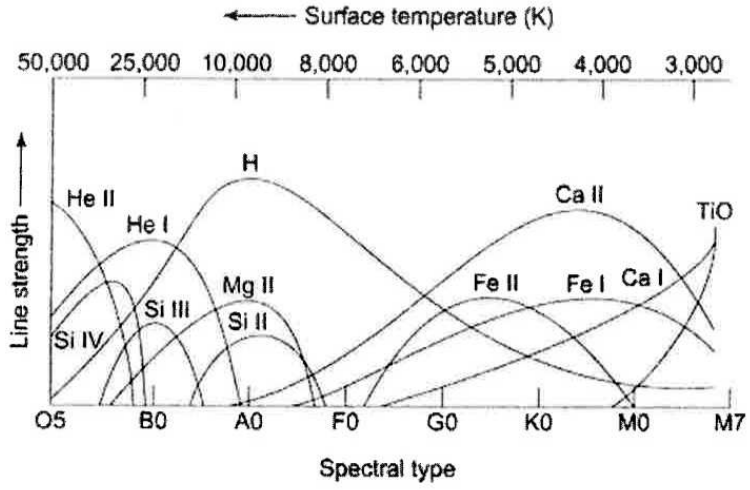


Figura 12.6: Intensità delle righe in funzione della temperatura. All'aumentare della temperatura scompaiono le righe a bassa ionizzazione e aumentano o compaiono quella ad alta ionizzazione.

La tabella seguente riporta i valori indicativi di temperatura e magnitudine assoluta per le varie classi spettrali e le classi di luminosità relative alle stelle di Sequenza Principale (V), giganti (III) e supergiganti (I).

Seq. Princ.	T	M	Giganti	T	M	SuperG	T	M
O5	54000	-4.5						
O6	45000	-4.0						
O7	43300	-3.9						
O8	40600	-3.8						
O9	37800	-3.6						
B0	29200	-3.3				B0	21000	-6.4
B1	23000	-2.3				B1	16000	-6.4
B2	21000	-1.9				B2	14000	-6.4
B3	17600	-1.1				B3	12800	-6.3
B5	15200	-0.4				B5	11500	-6.3
B6	14300	0				B6	11000	-6.3
B7	13500	0.3				B7	10500	-6.3
B8	12300	0.7				B8	10000	-6.2
B9	11400	1.1				B9	9700	-6.2
A0	9600	1.5				A0	9400	-6.2
A1	9330	1.7				A1	9100	-6.2
A2	9040	1.8				A2	8900	-6.2
A3	8750	2.0				A5	8300	-6.1
A4	8480	2.1						
A5	8310	2.2						
A7	7920	2.4						
F0	7350	3.0				F0	7500	-6
F2	7050	3.3				F2	7200	-6
F3	6850	3.5				F5	6800	-5.9
F5	6700	3.7						
F6	6550	4.0						
F7	6400	4.3						
F8	6300	4.4				F8	6150	-5.9
G0	6050	4.7				G0	5800	-5.9
G1	5930	4.9						
G2	5800	5.0				G2	5500	-5.8
G5	5660	5.2	G5	5010	0.7	G5	5100	-5.8
G8	5440	5.6	G8	4870	0.6	G8	5050	-5.7
K0	5240	6.0	K0	4720	0.5	K0	4900	-5.7
K1	5110	6.2	K1	4580	0.4	K1	4700	-5.6
K2	4960	6.4	K2	4460	0.2	K2	4500	-5.6
K3	4800	6.7	K3	4210	0.1	K3	4300	-5.6
K4	4600	7.1	K4	4010	0.0	K4	4100	-5.5
K5	4400	7.4	K5	3780	-0.2	K5	3750	-5.5
K7	4000	8.1						
M0	3750	8.7	M0	3660	-0.4	M0	3660	-5.3
M1	3700	9.4	M1	3600	-0.5	M1	3600	-5.3
M2	3600	10.1	M2	3500	-0.6	M2	3500	-5.3
M3	3500	10.7	M3	3300	-0.7	M3	3300	-5.3
M4	3400	11.2	M4	3100	-0.75	M4	3100	-5.2
M5	3200	12.3	M5	2950	-0.8	M5	2950	-5.2
M6	3100	13.4	M6	2800	-0.9			
M7	2900	13.9						
M8	2700	14.4						

12.3 Fotometria delle stelle

Scopo di questa esperienza è ottenere il **diagramma colore-colore** di un insieme di stelle di campo. Con il termine **stella di campo** ci si riferisce ad una stella qualsiasi in un'area di cielo osservata, della quale non si conosce la distanza e che non appartiene a strutture gravitazionalmente legate come ammassi aperti o ammassi globulari. Sappiamo che le stelle si posizionano nel **diagramma Hertzsprung-Russell (HR)** a seconda della massa, del raggio, della metallicità e dello stato evolutivo. Ma il diagramma HR ha in ascissa la **temperatura** e in ordinata la **luminosità**, che si può misurare solo se si conosce la **distanza**. Al posto della temperatura si può usare l'**indice di colore**, come abbiamo visto nella prima esperienza, mentre al posto della luminosità o della magnitudine assoluta, si può usare la **magnitudine apparente**, soltanto se siamo sicuri che tutte le stelle considerate si trovino alla stessa distanza da noi. Questo tipo di diagramma si chiama **diagramma colore-magnitudine** e funziona solo per gli ammassi. Non è quindi possibile costruire un diagramma colore-magnitudine sensato con stelle di campo.
L'indice di colore è definito come la differenza di magnitudini della stessa stella ottenute in due bande diverse ed è perciò una quantità in prima approssimazione indipendente dalla distanza. Infatti:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{f_1}{f_2} = -2.5 \log \frac{4\pi D^2 f_1}{4\pi D^2 f_2} = -2.5 \log \frac{L_1}{L_2} = M_1 - M_2$$

In realtà questa relazione vale in assenza di assorbimento da parte del mezzo interstellare che si trova lungo la linea di vista della stella. L'estinzione è una funzione della lunghezza d'onda e agisce riducendo in modo più forte la radiazione alle lunghezze d'onda più corte. Per cui l'indice di colore intrinseco è dato da:

$$(m_1 - m_2)_0 = (m_1 - A_1) - (m_2 - A_2) = (m_1 - m_2) - (A_1 - A_2) = (m_1 - m_2) - E_{1,2}$$

dove A_1, A_2 e $E_{1,2}$ sono rispettivamente gli assorbimenti alle lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 e l'eccesso di colore, in unità di magnitudine. Se $\lambda_1 < \lambda_2$, nel visibile $A_1 > A_2$ e quindi $E_{1,2}$ è una quantità positiva. A causa dell'estinzione le stelle appaiono **arrossate**, da cui il termine **reddening** o arrossamento.
Prendendo stelle di campo, non sarà nota a priori la distanza e non saranno sufficienti le coordinate galattiche per capire se esse risentono molto o poco dell'effetto del reddening. Una stella infatti può essere a bassa latitudine galattica ma nei dintorni del Sole oppure a più alta latitudine ma molto più distante.
Per misurare la magnitudine di una stella esistono due tecniche: 1) **fotometria di apertura**; 2) **fotometria di PSF**.

12.3.1 Fotometria di apertura

Con fotometria di apertura si intende una misura di flusso all'interno di un'area di forma in genere circolare, il cui raggio (o diametro) è espresso in secondi d'arco e scelto arbitrariamente. Nel caso più comune di osservazioni da Terra, al flusso della stella si somma il flusso del cielo che illumina tutta l'apertura in modo omogeno. L'immagine su cui si effettua la misura sarà stata ottenuta con

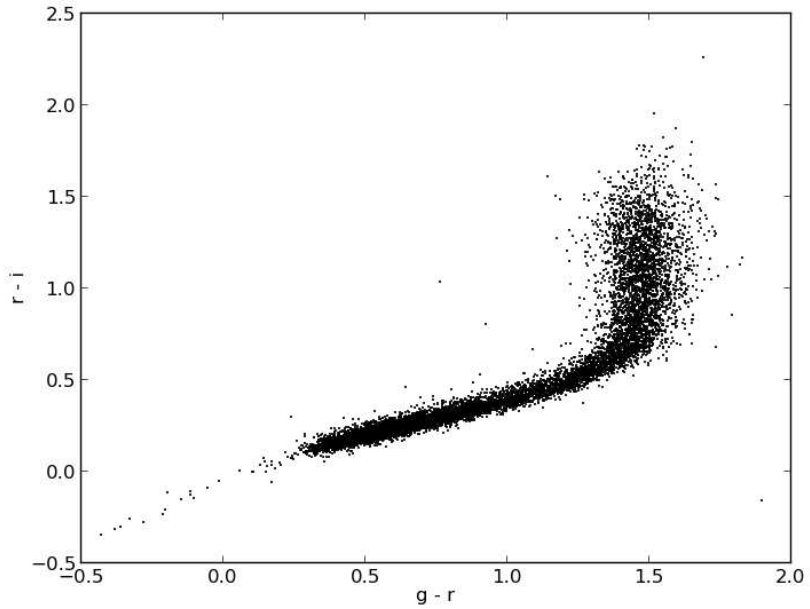


Figura 12.7: Esempio di diagramma colore-colore $g - r$ contro $r - i$ ottenuto con dati della SDSS.

uno certo strumento (telescopio + filtro + CCD), un certo tempo di esposizione e con l'oggetto che si trovava ad una certa altezza sull'orizzonte. La formula generale per ottenere una magnitudine calibrata, che corrisponde quindi a un flusso in unità fisiche, è la seguente:

$$m = m_0 - 2.5 \log \left(\frac{F_{stella} - n_{px} < f_{cielo} >}{T_{exp}} \right) - kX + c$$

dove m_0 è detto **punto-zero** del sistema fotometrico ed è una costante che converte da conteggi di fotoni in unità fisiche, cioè permette di calibrare la magnitudine che altrimenti si chiama semplicemente **strumentale**, F_{stella} è il flusso totale di fotoni provenienti dalla stella all'interno dell'apertura, $< f_{cielo} >$ è l'intensità media del cielo in conteggi di fotoni per pixel e n_{pix} il numero di pixel contenuti nell'apertura, T_{exp} è il tempo di esposizione con cui è stata ottenuta l'immagine, X è la massa d'aria e k è il coefficiente di estinzione atmosferica alla lunghezza d'onda del filtro utilizzato, c è il termine di colore, una correzione che tiene conto del fatto che il filtro utilizzato non è identico a quello con cui sono state ottenute le magnitudini delle stelle standard per la calibrazione fotometrica.
Per questa prima parte dell'esperienza si hanno a disposizione 3 immagini della stessa area di cielo, estratte dall'archivio della SDSS, ottenute rispettivamente con i filtri g, r e i. Le immagini sono state preventivamente allineate in modo che le stelle occupino la stessa posizione XY in pixel nelle tre immagini. Nelle immagini grezze questo di solito non si verifica ed è bene procedere all'allinea-

mento prima di eseguire l'analisi fotometrica. L'allineamento è possibile con il comando **imalign** di IRAF.

Operazioni di misura:

- Utilizzare il programma IRAF e il comando **PHOT**.
- Aprire l'immagine in banda g direttamente nel DS9 con **File** ⇒ **Open** ⇒ *nomefile.fits*. Una scale lineare al 99% è in genere sufficiente a visualizzare bene l'immagine.
- Misurare la FWHM media delle stelle. Utilizzare il comando **imexamine**:

  ecl> imexamine

  il comando è interattivo, il cursore si sposta sul display, posizionarlo su una stella non troppo debole e nemmeno satura e premere il tasto **a**. Sulla finestra dei comandi compare un risultato del tipo:

```
#   COL    LINE    COORDINATES
#     R     MAG     FLUX     SKY     PEAK     E   PA      ENCLOSED GAUSSIAN DIRECT
 350.25 1301.28 350.25 1301.28
  20.00  11.54 242462.   1123.  24156. 0.07    4          3.06     2.63   2.57
```

Figura 12.8: Esempio di output del comando **imexamine+a**.

  Il penultimo valore è la FWHM della stella in unità di pixel.
  Se non compare la voce GAUSSIAN, tornare con il cursore sul display e premere **:**, tornare sulla finestra dei comandi e aggiungere **fittype gaussian**, poi dare invio per far accettare il parametro. Misurare una decina di stelle e poi calcolare il valore medio della FWHM.

- Misurare il rumore prodotto dall'emissione del cielo. Utilizzare di nuovo il comando **imexamine** cliccando sull'immagine con il tasto **m** in corrispondenza di zone prive di stelle. Si otterrà un risultato del tipo:

```
#            SECTION     NPIX     MEAN   MEDIAN   STDDEV      MIN      MAX
 [449:453,1037:1041]       25    1121.    1120.    5.768    1112.    1131.
```

Figura 12.9: Esempio di output del comando **imexamine+m**.

  Il valore da considerare è il terz'ultimo (STDDEV), la deviazione standard in unità di conteggi di fotoni per pixel. Il tasto **m** fornisce la statistica dei pixel entro una certa area (in questo caso 25×25 pixel) per cui si può dire che in quella zona l'intensità media (o mediana) del cielo è pari a 1121.0±5.9 cts (conteggi di fotoni). Ripetere la misura una decina di volte e calcolare il valore medio di STDDEV.

  Il valore del rumore del cielo è importante perché viene utilizzato come soglia al di sopra della quale una sorgente di fotoni viene considerata tale.

- Utilizzare il comando **phot** in **noao.digiphot.daophot**.

  ecl> epar phot

image	=	*nomeimmagine*	Input image(s)
coords	=		Input coordinate list(s) (default: image.coo.?)
output	=	default	Output photometry file(s) (default: image.mag.?)
skyfile	=		Input sky value file(s)
(plotfil	=	)	Output plot metacode file
(**datapar**	=	)	Data dependent parameters
(**centerp**	=	)	Centering parameters
(**fitskyp**	=	)	Sky fitting parameters
(**photpar**	=	)	Photometry parameters
(**interac**	=	yes)	Interactive mode?
(radplot	=	no)	Plot the radial profiles?

Editare i parametri: **datapar**, **centerp**, **photpar** e **fitskyp**, posizionandosi sulla keyword, digitando **:e** e dando invio.

DATAPAR

(scale	=	1.)	Image scale in units per pixel
(**fwhmpsf**	=	$< fwhm >$)	FWHM of the PSF in scale units
(emissio	=	yes)	Features are positive?
(**sigma**	=	$< stddev >$)	Standard deviation of background in counts
(datamin	=	INDEF)	Minimum good data value
(datamax	=	INDEF)	Maximum good data value
(noise	=	poisson)	Noise model
(**ccdread**	=	rdnoise)	CCD readout noise image header keyword
(**gain**	=	gain)	CCD gain image header keyword
(readnoi	=	0.)	CCD readout noise in electrons
(epadu	=	1.)	Gain in electrons per count
(**exposur**	=	exptime)	Exposure time image header keyword

Ritornare al menù precedente con **:q**.

CENTERP

(**calgori**	=	centroid)	Centering algorithm
(**cbox**	=	$2\times < fwhm >$)	Centering box width in scale units
(cthresh	=	0.)	Centering threshold in sigma above background
(minsnra	=	1.)	Minimum signal-to-noise ratio for centering algorithim
(cmaxite	=	10)	Maximum iterations for centering algorithm
(maxshif	=	1.)	Maximum center shift in scale units

Il parametro **cbox** serve a definire l'area entro cui il programma **phot** trova il centroide della stella.

PHOTPAR

(weighti	=	constant)	Photometric weighting scheme
(**apertur**	=	*Rap*)	List of aperture radii in scale units
(**zmag**	=	*ZP*)	Zero point of magnitude scale

Rap è il valore del **raggio dell'apertura** (in unità di pixel) entro cui si è scelto di misurare la magnitudine della stella. Poiché la distribuzione di luce delle stelle ha un profilo gaussiano solo nella parte centrale e ali abbastanza estese, un criterio empirico è quello di utilizzare un'apertura con un raggio pari a **4 o 5 volte la <FWHM>**. È bene comunque

verificare prima se questa scelta è adatta oppure no, utilizzando il DS9: scegliere una stella non troppo debole e non troppo intensa (escludere quelle sature!), zoomare sulla stella, aumentare il contrasto dell'immagine usando come scala histogram equalization, disegnare un cerchio più o meno centrato sulla stella e assegnare al cerchio un raggio pari a quello dell'apertura scelta. Se tutta la stella è contenuta nel cerchio, l'apertura va bene, se il cerchio si trova al bordo della stella o dentro la stella, l'apertura dovrà essere aumentata, ma non troppo per evitare di includere troppo contributo da parte del cielo oppure la luce di stelle vicine.

ZP è invece una costante additiva. Se si conoscono le costanti di calibrazione fotometrica, si può inserire la quantità $m_0 - kX$ in modo da ottenere magnitudini calibrate. In caso contrario è una costante del tutto arbitraria, ad esempio se si usa 0 come valore, tutte le magnitudini strumentali verranno negative. Se si preferisce lavorare con numeri positivi, una costante utile è 25 (valore vicino ai punti-zero dei sistemi fotometrici). Bisogna ricordarsi che al momenti di applicare le costanti di calibrazione, questo valore (se diverso da zero) va sottratto alle magnitudini strumentali!

FITSKYP

(**salgori**	=	mode)	Sky fitting algorithm
(**annulus**	=	*Rann*)	Inner radius of sky annulus in scale units
(**dannulu**	=	*Wann*)	Width of sky annulus in scale units
(skyvalu	=	0.)	User sky value
(smaxite	=	10)	Maximum number of sky fitting iterations

Per poter sottrarre il contributo del cielo, il comando deve calcolare in modo automatico la sua **intensità media per pixel**. Per fare questo si definisce un'area a forma di **anello** concentrica con l'apertura. All'interno dell'anello il comando calcola la **moda** della distribuzione d'intensità dei pixel (così da escludere sorgenti spurie come raggi cosmici o stelle nelle vicinanze) e il **numero di pixel** contenuti. *Rann* è il **raggio interno** dell'anello in unità di pixel. Il suo valore dovrà essere maggiore di *Rap*, un buon criterio è quello di calcolare il valore corrispondente a **6 o 7 volte la <FWHM>**. *Wann* è invece il suo spessore (la differenza fra raggio interno ed esterno), come criterio empirico si può usare il **25% del raggio interno** (Fig. 12.10).

- Una volta settati con attenzione tutti parametri, lanciare il comando **phot**. Avendo scelto l'opzione **interac=yes**, il cursore si attiverà sull'immagine. Zoomare su una stella, portare il cursore vicino al centro della stella (a occhio) e premere **c**, sulla finestra dei comandi comparirà una serie di numeri che sono le coordinate XY del centroide della stella, controllare che l'ultima voce a destra sia **ok**, altrimenti spostare leggermente il cursore e ripetere finché il comando non ha trovato il centroide. Dopodiché, senza spostare il cursore, premere **s** per calcolare il valore medio del cielo. Comparirà un'altra serie di numeri, controllare che vi sia **ok** alla fine. Infine, premere **o** per calcolare la magnitudine strumentale, cioè il valore in magnitudini del flusso totale della stella entro l'apertura scelta, a cui è stato sottratto il contributo del cielo, diviso per il tempo di esposizione. La terza riga che compare riporta le coordinate della stella, l'intensità

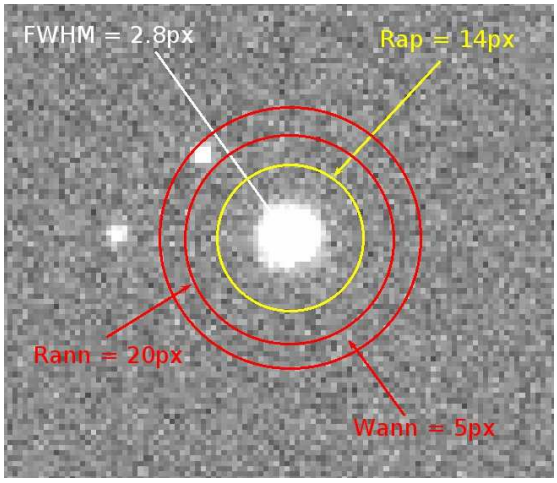


Figura 12.10: Metodo della fotometria di apertura. Il raggio dell'apertura (in giallo) entro cui calcolare la magnitudine è pari a 5 volte la FWHM della stella. Il contributo del cielo è valutato in un anello esterno e concentrico (in rosso), con raggio interno pari a circa 7 volte la FWHM e con spessore pari a 1/4 del raggio interno. La presenza della stella all'interno dell'anello è ininfluente in quanto si tiene conto della moda delle intensità dei pixel del cielo.

del cielo (in conteggi per pixel) e la magnitudine strumentale. Anche in questo caso controllare che via sia **ok** alla fine (Fig. 12.11).

```
ima_g   367.61  430.31  367.01  430.34    0.00   0.00  ok
ima_g    367.01   430.34  1121.023  5.86618  2.63643    653    28  ok
ima_g    367.02   430.33  1121.023   18.121  ok
```

Figura 12.11: Esempio di risultato quando si applica phot in modo interattivo. Le tre righe si riferiscono all'output dopo aver premuto **c**, **s** e **o**.

- Ripetere quest'ultima operazione per tutte le stelle dell'immagine, escludendo quelle chiaramente sature e quelle troppo deboli. Terminata la sequenza, premere **q** sul display e poi **w** sulla finestra dei comandi. In questo modo tutte le misure saranno salvate in un file di testo *nomeimmagine.mag.1*. Se fosse necessario interrompere, uscire dal comando e rilanciarlo, si creerà un nuovo file *nomeimmagine.mag.2* con i nuovi dati e così via.

- Estrarre dal file *.mag* le informazioni utili per questa esperienza, cioè le coordinate delle stelle e la magnitudine strumentale. Utilizzare il comando **txdump** nel seguente modo:

  ecl> **txdump** *nomeimmagine.mag.*∗ xcen,ycen,mag yes > *nomefile.txt*

  Al posto dell'asterisco inserire il numero (1,2,3,...) del file *.mag* che si intende utilizzare! L'output del comando viene reindirizzato in un file di testo.

- Applicare le costanti per la calibrazione fotometrica con **TOPCAT**.

Utilizzare la formula:

$$m_{cal} = m_0 + m_s - k \times X$$

dove m_s è la magnitudine strumentale estratta dal file .mag. Se si è applicata la costante arbitraria **ZP** in **photpar**, bisogna sottrarre questo valore alla magnitudine strumentale. La formula diventa:

$$m_{cal} = m_0 + (m_s - ZP) - k \times X$$

- Ripetere la misura della magnitudine di apertura alle immagini *r* e *i*.

  È possibile utilizzare il comando **phot** in modo **non interattivo**.

  ecl> epar phot

image	=	*nomeimmagine*	Input image(s)
coords	=	*nomefile.txt*	Input coordinate list(s) (default: image.coo.?)
output	=	default	Output photometry file(s) (default: image.mag.?)
skyfile	=		Input sky value file(s)
(plotfil	=	)	Output plot metacode file
(**datapar**	=	)	Data dependent parameters
(**centerp**	=	)	Centering parameters
(**fitskyp**	=	)	Sky fitting parameters
(**photpar**	=	)	Photometry parameters
(**interac**	=	no)	Interactive mode?
(radplot	=	no)	Plot the radial profiles?

  Al posto di *nomefile.txt* va inserito il file che si ottenuto estraendo le coordinate e le magnitudini strumentali in banda *g* con il comando txdump. Prima di lanciare il comando, modificare (se necessario) i parametri **datapar**, **centerpar**, **fitskyp** e **photpar**. Non sempre è necessario farlo, ma è obbligatorio prima controllare!

  Al termine si otterranno altri due file .mag, uno per l'immagine in banda *r* e uno per l'immagine in banda *i*.

- Estrarre le posizioni e le magnitudini strumentali *r* e *i* dai due file appena ottenuti con il comando txdump e calibrare le magnitudini.

- Incrociare i tre file contenenti le magnitudini calibrate con **TOPCAT** usando **Joins** ⇒ **Triple Match** ⇒ **Algorithm: 2d - Cartesian** e **Error: 2.0** (o 3.0). Utilizzare le coordinate XY delle stelle per unire correttamente le magnitudini *gri* delle stelle. Le immagini sono state allineate prima di iniziare l'analisi, ma i centroidi delle stelle non saranno perfettamente coincidenti, ecco perché è ncessario considerare un margine di errore di 2 o 3 pixel. La tabella risultante potrà avere lo stesso numero di stelle di partenza, oppure un numero inferiore. Questo dipende dal fatto che la fotometria di apertura abbia funzionato o meno sulle stesse stelle nelle tre diverse bande.

- Dopo aver salvato la nuova tabella, calcolare gli indici di colore *g*-*r* e *r*-*i* e riportarli in un grafico. Confrontare il risultato con la Fig. 12.7.

12.3.2 Fotometria di PSF

Quando le stelle sono troppo vicine le une alle altre, la fotometria di apertura non può più essere efficacemente utilizzata. Questo accade ad esempio in ammassi aperti e ancora di più in ammassi globulari. La singola apertura centrata su una stella finisce per includere anche le stelle circostanti e inoltre la misura del contributo del cielo è errata (Fig. 12.12).

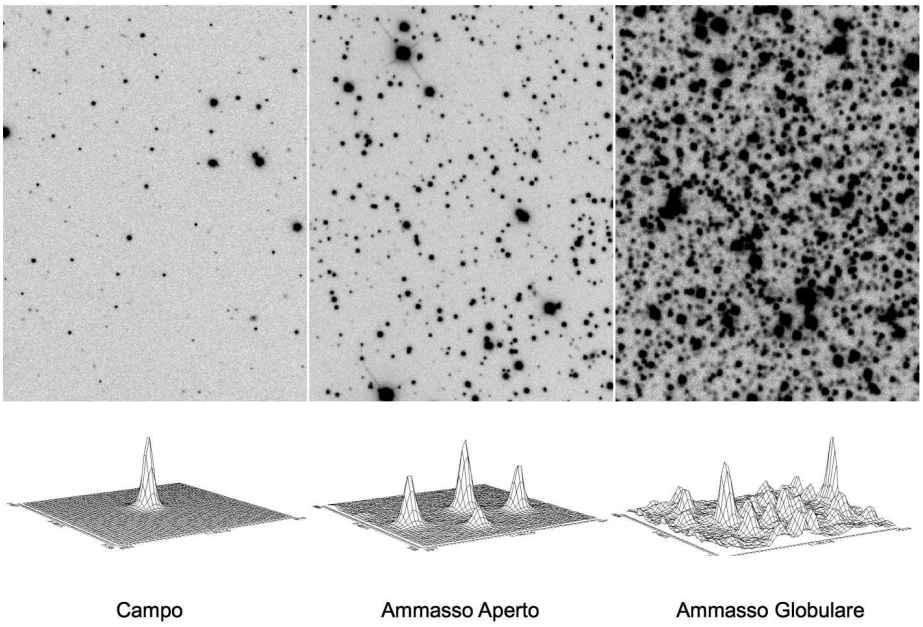


Figura 12.12: Confronto fra stelle di campo ben separate (a sinistra), stelle di un ammasso aperto (al centro) e stelle di un ammasso globulare (a destra). Si noti l'aumento della densità superficiale di stelle.

Per poter misurare la magnitudine di stelle in ambienti densi è necessario ricorrere alla tecnica della **fotometria di PSF**. Si tratta di modellare matematicamente la **point spread function** dell'immagine che si sta analizzando e utilizzare questo modello per riprodurre la distribuzione di luce di ogni singola stella indipendentemente dalle stelle vicine e, integrando, ottenerne la magnitudine (Fig. 12.13).
La PSF dipende dalle caratteristiche dello strumento utilizzato e dal seeing (in caso di osservazioni da Terra). Questa tecnica funziona bene se si riesce a ottenere un buon modello di PSF ed eventualmente a conoscere come questo modello varia al variare della posizione di una stella nell'immagine.

Operazioni di misura:

- Utilizzare il comando **psf** di IRAF sull'immagine in banda *g*. Il comando ha bisogno che prima sia stata eseguita la fotometria di apertura (con **phot**) delle stelle che poi verranno usate per calcolare la PSF.

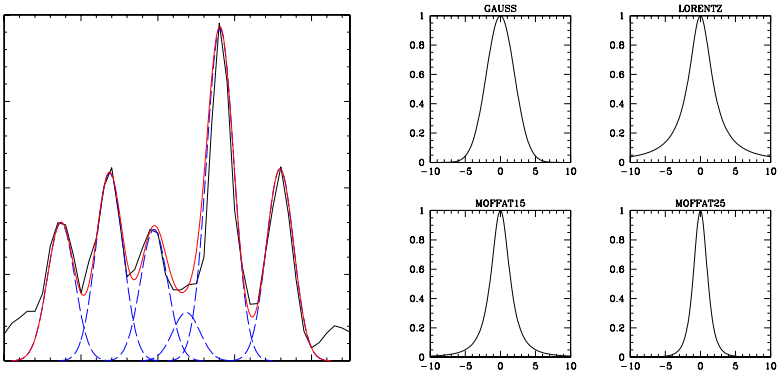


Figura 12.13: (A sinistra) Grafico monodimensionale della distribuzione di luce di stelle molto vicine e sovrapposte, come accade negli ammassi globulari. Il profilo globale è riprodotto dalla somma di una serie di funzioni gaussiane che permettono di separare ogni stella dalle sue vicine. (A destra) Esempi di funzioni matematiche utilizzabili per modellare la PSF.

ecl> epar psf

image	=	*nomeimmagine*	Input image(s) for which to build PSF
photfile	=	default	Input photometry file(s) (default: image.mag.?)
pstfile	=	*nomeimmagine.mag.∗*	Input psf star list(s) (default: image.pst.?)
psfimage	=	default	Output PSF image(s) (default: image.psf.?)
opstfile	=	default	Output PSF star list(s) (default: image.pst.?)
groupfil	=	default	Output PSF star group file(s) (default: image.psg.?)
(plotfil	=	)	Output plot metacode file
(datapar	=	)	Data dependent parameters
(**daopars**	=	)	Psf fitting parameters
(matchby	=	yes)	Match psf star list to photometry file(s) by id numbe
(interac	=	yes)	Compute the psf interactively?
(mkstars	=	no)	Mark deleted and accepted psf stars?
(showplo	=	yes)	Show plots of PSF stars?
(plottyp	=	mesh)	Default plot type (mesh—contour—radial)

Nel terzo parametro **pstfile** va inserito il file *.mag* che contiene la fotometria di apertura delle stelle dell'immagine che si sta analizzando. Al posto dell' $*$ va inserito il numero relativo al file che si vuole utilizzare.

- Editare i parametri di **daopars**, con **:e** come fatto prima.

(**functio**	=	auto)	Form of analytic component of psf model
(varorde	=	0)	Order of empirical component of psf model
(nclean	=	0)	Number of cleaning iterations for computing psf model
(saturat	=	no)	Use wings of saturated stars in psf model computation?
(**matchra**	=	$2\times < fwhm >$)	Object matching radius in scale units
(**psfrad**	=	4 o 5 $\times < fwhm >$)	Radius of psf model in scale units
(**fitrad**	=	$< fwhm >$)	Fitting radius in scale units
(recente	=	yes)	Recenter stars during fit?
(**fitsky**	=	yes)	Recompute group sky value during fit?
(groupsk	=	yes)	Use group rather than individual sky values?
(**sannulu**	=	6 o 7 $\times < fwhm >$)	Inner radius of sky fitting annulus in scale units
(**wsannul**	=	$0.25 \times sannulu$)	Width of sky fitting annulus in scale units
(flaterr	=	0.75)	Flat field error in percent
(proferr	=	5.)	Profile error in percent
(maxiter	=	50)	Maximum number of fitting iterations
(clipexp	=	6)	Bad data clipping exponent
(clipran	=	2.5)	Bad data clipping range in sigma
(mergera	=	INDEF)	Critical object merging radius in scale units
(critsnr	=	1.)	Critical S/N ratio for group membership
(maxnsta	=	10000)	Maximum number of stars to fit
(maxgrou	=	60)	Maximum number of stars to fit per group
(mode	=	ql)	

Il parametro **functio=auto** permette al comando di provare le funzioni (gauss, moffat, ...) a disposizione e scegliere la migliore. **matchra** è il raggio entro cui la stella viene centrata, mentre **psfrad** è la dimensione della PSF sulle ali.

- Ritornare a **psf** con **:q** e lanciare il comando che agirà in modo interattivo.

  Il cursore si attiva sul display. Posizionarlo su una stella e premere il tasto **a**, sulla finestra grafica apparirà un grafico tridimensionale della stella. Controllare che il profilo sia regolare e premere **a** per accettare la stella oppure **d** per rifiutarla, nel caso il profilo sia irregolare (più di un picco oppure picco piatto). Passare ad un'altra stella e ripetere la procedura, selezionare anche stelle brillanti (ma non sature!) e stelle deboli (ma non troppo immerse nel rumore del fondocielo!) distribuite in modo omogeneo nell'immagine. È importante che le stelle scelte siano isolate, che non abbiano altre stelle vicine!

  10 o 20 stelle sono già sufficienti per modellare la PSF. Ovviamente, più stelle si utilizzano, più la PSF è precisa.

  Al termine della procedura, rimanendo sul display, premere **f** per attivare il fit dei dati raccolti e ottenere il modello. Poi premere **w** per scrivere su file la soluzione, infine premere **q** e poi ancora **q** questa volta con il cursore sulla finestra dei comandi (Fig. 12.14). Compariranno nuovi file: *nomeimmagine.psf.∗, nomeimmagine.pst.∗, nomeimmagine.psg.∗*.

- Ricostruire l'immagine della PSF. A questo scopo si utilizza il comando **seepfs**, che converte i dati contenuti nel file .psf in un'immagine (Fig. 12.15).

  ecl> epar seepsf

```
Trying function gauss norm scatter = 0.03586162
Trying function lorentz norm scatter = 0.03860237
Trying function moffat15 norm scatter = 0.02615657
Trying function moffat25 norm scatter = 0.01931171
Trying function penny1 norm scatter = 0.01920634
Trying function penny2 norm scatter = 0.01924735
Best fitting function is penny1

Analytic PSF fit
    Function: penny1  X: 1023.5  Y: 744.  Height: 301.0707  Psfmag: 20.387
    Par1: 1.432904  Par2: 1.233286  Par3: 0.676125  Par4: -0.1633961

Computed 1 lookup table(s)

Writing PSF image ima_g.psf.3.fits
Writing output PSF star list ima_g.pst.3
Writing output PSF star group file ima_g.psg.3
```

Figura 12.14: Output del comando **psf**: il comando prova varie funzioni analitiche e sceglie quella che meglio riproduce la distribuzione media di luce delle stelle.

psfimage	=	*nomeimmagine.psf.∗.fits*	PSF image name
image	=	*nomepsf*	Output image name
(dimensi	=	INDEF)	Dimension of the output PSF image
(xpsf	=	INDEF)	X distance from the PSF star
(ypsf	=	INDEF)	Y distance from the PSF star
(magnitu	=	INDEF)	Magnitude of the PSF star
(mode	=	ql)	

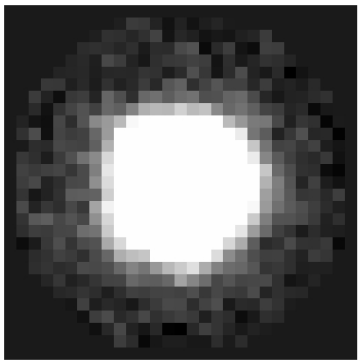


Figura 12.15: Esempio di PSF. L'immagine è quadrata con il lato lungo una trentina di pixel.

- Applicare il modello appena ottenuto alle stelle di cui è stata eseguita la fotometria di apertura per poter calcolare la magnitudine. Si utilizza il comando **allstar**.

  ecl> epar allstar

image	=	*nomeimmagine*	Image corresponding to photometry
photfile	=	default	Input photometry file (default: image.mag.?)
psfimage	=	default	PSF image (default: image.psf.?)
allstarf	=	default	Output photometry file (default: image.als.?)
rejfile	=	default	Output rejections file (default: image.arj.?)
subimage	=	default	Subtracted image (default: image.sub.?)
(datapar	=	)	Data dependent parameters
(daopars	=	)	Psf fitting parameters

Il comando legge automaticamente l'ultimo file .mag e .psf (quelli con il numero più alto), se si vuole utilizzare una versione precedente, bisogna sostituire **default** con il nome del file giusto. L'output è costituito da tre file, due di questi devono essere considerati: 1) il file *nomeimmagine.sub.∗.fits* è l'immagine originale a cui sono state sottratte le stelle di cui è stata effettuata la fotometria di PSF. L'immagine serve a controllare che la procedura abbia funzionato bene: se l'adattamento del modello alle stelle è perfetto, il residuo è nullo e la stella scompare; 2) il file *nomeimmagine.als.∗* contiene le posizioni e le magnitudini delle stelle.

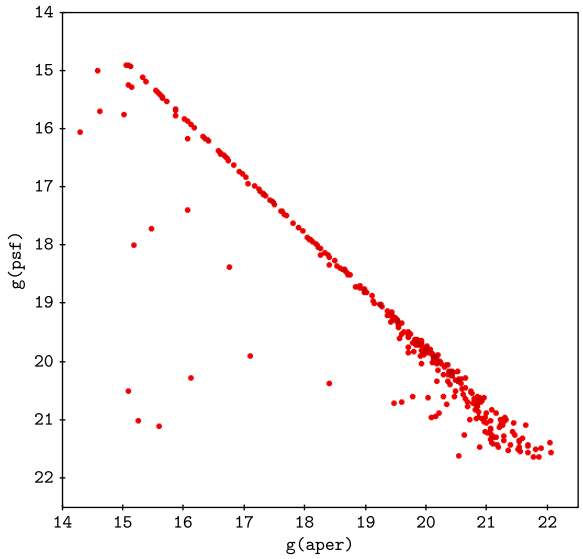


Figura 12.16: Confronto fra fotometria di apertura e di psf.

- Estrarre le informazioni dal file .als con:

  ecl> **txdump** *nomeimmagine.als.∗* xcen,ycen,mag yes > *nomefile.txt*

  Sostituire ∗ con il numero giusto. Come prima, l'output del comando viene reindirizzato in un file di testo.

- Calibrare le magnitudini con la stesse formule usate nella sezione precedente.

- Incrociare i due file contenenti le magnitudini calibrate di apertura e di PSF in banda g con **TOPCAT** usando **Joins** ⇒ **Pair Match** ⇒ **Algo-**

rithm: 2d - Cartesian e **Error: 2.0** (o 3.0). Utilizzare le coordinate XY delle stelle per unire correttamente le magnitudini delle stelle ottenute con i due metodi.

- Dopo aver salvato la nuova tabella riportare i valori delle magnitudini di apertura e di PSF in un grafico. Verificare la linearità della relazione e discutere eventuali deviazioni dall'andamento atteso (Fig. 12.16).

12.4 Morfologia di galassie

Scopo di questa esperienza è determinare il tipo morfologico di due galassie attraverso l'analisi del loro profilo di brillanza. Con il termine **profilo di brillanza** si intende l'andamento medio della brillanza superficiale (μ) in funzione della distanza dal centro della galassia (R). La **brillanza superficiale** è espressa in unità di mag arcsec^{-2} ed è una quantità indipendente dalla distanza a cui si trova la galassia.
Per ottenere il profilo di brillanza si riproducono le isofote della galassia per mezzo di **ellissi**. Ogni ellisse è caratterizzata da 6 parametri: le coordinate del centro (x_c, y_c), il semiasse maggiore (a), l'ellitticità ($e = 1 - \frac{b}{a}$), l'angolo di posizione del semiasse maggiore (PA) e infine l'intensità media dell'isofota riprodotta.
Una volta modellate le isofote, si procede al calcolo dell'intensità di energia contenuta in ogni ellisse. All'intensità viene sottratto il contributo del cielo e infine è necessario dividere per il tempo di esposizione:

$$F = \frac{I_{iso} - N_{px} \times I_{cielo}}{T_{exp}}$$

dove F è il flusso corretto per il contributo del cielo e normalizzato a 1 sec, I_{iso} è l'intensità di luce entro un'ellisse, I_{cielo} è l'intensità media del cielo per pixel, N_{px} è il numero di pixel entro l'ellisse, e infine T_{exp} è il tempo di posa.
Poi si calcola il flusso contenuto in anelli determinati da ellissi successive (Fig. 12.17). Ogni anello avrà un' area che sarà data dalla differenza delle aree delle due ellissi e un flusso che sarà la differenza fra i flussi delle due ellissi. All'anello viene associato un semiasse maggiore che sarà la **media aritmetica dei semiassi delle due ellissi**. L'area dovrà essere espressa in unità di **arcsec**^{2} e il semiasse in unità di **arcsec**. Per fare questo bisogna conoscere il valore della **scala dell'immagine**, cioè la scala spaziale sul piano focale o del telescopio o dello strumento (nel caso siano essi diversi) in unità di arcsec/mm oppure direttamente **arcsec/px**.
Avremo quindi che l'area contenuta in un'ellisse è: $A = N_{px} \times scala^2$, mentre il semiasse maggiore vale: $sma = a \times scala$. E potremo definire la **brillanza superficiale** come:

$$\mu = -2.5 \times \log_{10}\left(\frac{F_1 - F_2}{A_1 - A_2}\right)$$

in unità di mag/arcsec^2. Poiché questi valori sono negativi si può procedere in due modi: 1) aggiungere una costante arbitraria (25 o 30); 2) calibrare i valori di brillanza con le costanti fotometriche. Se lo scopo è solo quello di determinare il tipo morfologico e quindi di calcolare il valore di B/T, la calibrazione fotometrica

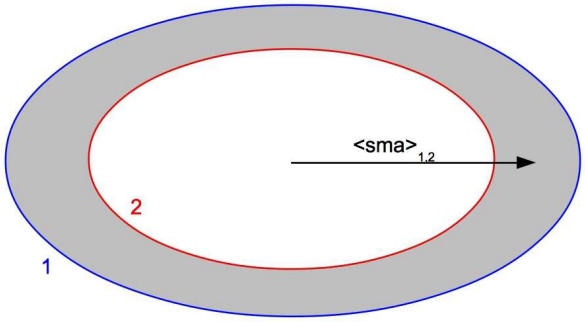


Figura 12.17: La brillanza media della galassia viene calcolata nell'area compresa fra ellissi successive (qui in grigio). Ogni brillanza si riferisce ad un semiasse maggiore intermedio.

non è necessaria. Al contrario, se si vuole avere la magnitudine della galassia e delle sue componenti, non si può prescindere dalle costanti fotometriche (almeno il punto-zero e il coefficiente di estinzione). Queste andranno aggiunte nello stesso modo applicato nell'esperienza precedente.
Per ottenere i parametri morfologici, il profilo di brillanza deve essere riprodotti con una legge o una combinazione di leggi empiriche. Di seguito sono elencati i profili più utilizzati, le espressioni analitiche e il loro integrale, tramite il quale può essere calcolato il flusso totale (o la magnitudine totale).

- **Profilo di De Vaucouleurs o Legge $r^{1/4}$**

$$I_{DeV} = I_e e^{-7.67\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right]}$$

$$\mu_{DeV} = \mu_e + 8.325\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right]$$

$$F_{DeV} = \int_0^\infty I_{DeV}\ 2\pi r\ dr = 22.66 I_e r_e^2$$

- **Profilo per il bulge esponenziale**

$$I_{exp} = 5.36 I_e e^{-1.68\left(\frac{r}{r_e}\right)}$$

$$\mu_{exp} = \mu_e + 1.824\left(\frac{r}{r_e} - 1\right)$$

$$F_{exp} = \int_0^\infty I_{exp}\ 2\pi r\ dr = 11.93 I_e r_e^2$$

- **Profilo di Sérsic**

$$I_{Ser} = I_e e^{-b_n\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]}$$

$$F_{Ser} = \int_0^\infty I_{Ser}\ 2\pi r\ dr = \frac{2\pi n e^{b_n}}{b_n^{2n}}(2n-1)!I_e r_e^2 = K(n)I_e r_e^2$$

dove $b_n = 1.9992n - 0.3271$. Per praticità possiamo calcolare i valori di b_n e di $K(n)$ con n che varia da 1 a 4:

n	b_n	$K(n)$
1.0	1.6721	11.9630
1.5	2.6717	14.2969
2.0	3.6713	16.3120
2.5	4.6709	18.1082
3.0	5.6705	19.7434
3.5	6.6701	21.2540
4.0	7.6697	22.6648

La Fig. 12.18 mostra l'andamento del profilo di Sérsic al variare dell'indice n.

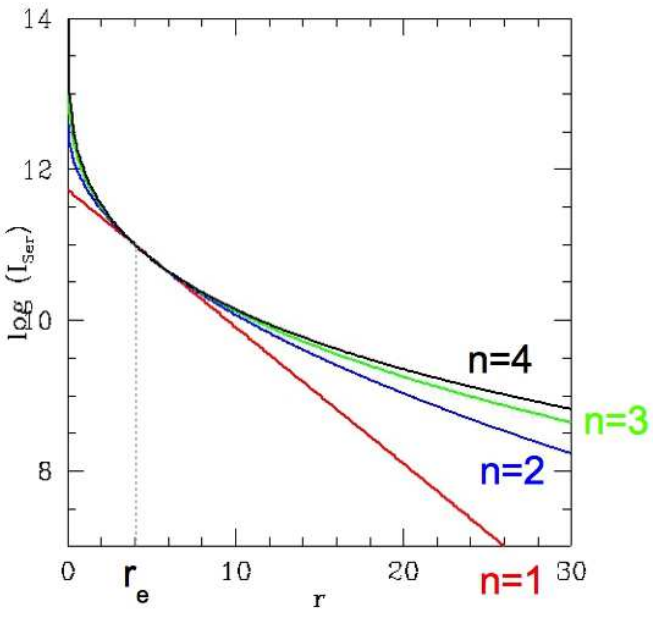


Figura 12.18: Funzione di Sérsic in funzione del suo indice n.

- **Profilo di Freeman per il disco**

$$I_{disk} = I_0 e^{-\frac{r}{h}}$$

$$\mu_{disk} = \mu_0 + 1.085 \left(\frac{r}{h}\right)$$

$$F_{disk} = \int_0^\infty I_{disk}\ 2\pi r\ dr = 2\pi I_0 h^2$$

In queste formule, I_e e μ_e sono l'intensità e la brillanza superficiale al raggio efficace r_e, mentre I_0 e μ_0 sono l'intensità e la brillanza superficiale al centro del disco della galassia ($r = 0$). h è la lunghezza di scala del disco.
Si faccia attenzione che se il profilo di brillanza richiede due o più componenti per essere efficacemente riprodotto, **non si devono mai sommare le brillanze**, ma si deve trasformare in brillanza la somma delle intensità superficiali! Ad esempio, per una galassia a spirale si avrà almeno: $\mu_{tot} = -2.5 \times \log_{10}(I_{bulge} + I_{disk})$.

Operazioni di misura:

- Utilizzare il programma IRAF e il comando **ELLIPSE**, che si trova in *stsdas.analysis.isophote*.
- Per poter eseguire il fit delle ellissi, ELLIPSE ha bisogno di alcuni parametri di input. In particolare, serve un'ellisse di partenza e bisogna fornire al comando le **coordinate del centro** di questa ellisse, che coincideranno con il centro della galassia, il valore del **semiasse maggiore**, l'**ellitticità** e l'**angolo di posizione** del semiasse maggiore. Per ottenere questi valori utilizziamo il display di IRAF DS9.
- Aprire l'immagine nel display (direttamente dal DS9). Contrastare l'immagine in modo da saturarla nelle regioni centrali e mettere in evidenza le regioni esterne a più bassa brillanza superficiale. Poi andare sul menù del DS9 e selezionare *Region – Shape – Ellipse*. Posizionare il cursore sul centro della galassia e cliccare per far apparire un'ellisse (Fig. 12.19). Cliccare due volte con il cursore all'interno dell'ellisse e modificarne i parametri nella finestra che si è aperta. Se l'immagine è astrometrizzata, il DS9 leggerà automaticamente le coordinate e nelle due caselle *Center* ci saranno α e δ del centro dell'ellisse. In questo caso aprire il menù a destra (dove sarà scritto *fk5*) e selezionare la voce *Image* per avere le coordinate in pixel. Selezionare *Image* anche nel menù appena sotto. Modificare *Center*, *Radius* e *Angle* finché l'ellisse non riproduce la forma globale della galassia (Fig. 12.19). Non è necessaria un' elevata precisione perché questi parametri servono ad ELLIPSE come punto di partenza, ma vengono poi ricalcolati isofota per isofota. Fare attenzione al valore di *Angle*, perché il DS9 lo misura a partire dall'asse X in senso antiorario, mentre ELLIPSE dall'asse Y in senso sempre antiorario!

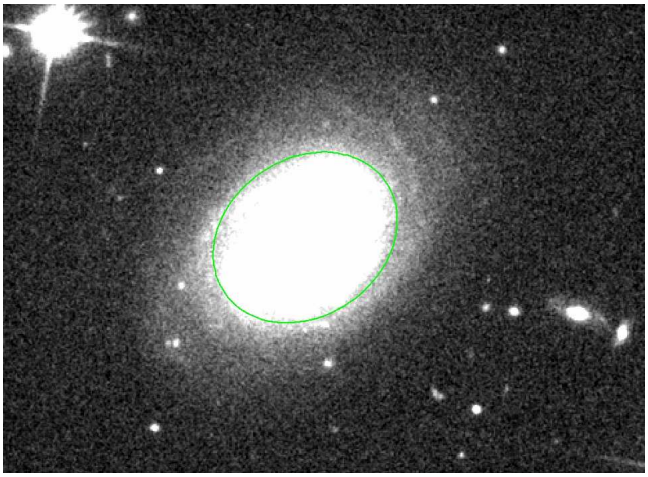


Figura 12.19: Immagine di una galassia ottenuta con DS9 saturando le regioni centrali. L'ellisse verde è stata ottenuta con DS9 e i suoi parametri vengono utilizzati come input per ELLIPSE.

- Editare i parametri di ELLIPSE:

  isophote> epar ellipse

input	=	*nomeimmagine*	input image name
output	=	*nometabella*	output table name
(dqf	=	.c1h)	data quality file name or extension
(inellip	=	)	table with input ellipses for no-fit mode
(**geompar**	=	)	geometric parameters (pset)
(**control**	=	)	algorithm control parameters (pset)
(samplep	=	)	sampling control parameters (pset)
(**magpar**	=	)	magnitude scale parameters (pset)
(**interac**	=	**yes**)	interactive ?
(device	=	red)	graphics output device
(icomman	=	)	image cursor
(gcomman	=	)	graphics cursor
(**masksz**	=	**20**)	pixel square mask size ('m' cursor key)
(region	=	no)	region masking mode ?
(memory	=	yes)	memory-intensive (versus disk-intensive) ?
(verbose	=	yes)	list summary at STDOUT ?
(mode	=	al)	

- Editare i parametri **geompar**, **control** e **magpar** posizionando il cursore sulla keyword e digitando **:e**. Tornare ai parametri di ellipse con **:q**.

GEOMPAR

(**x0**	=	x_c)	initial isophote center X
(**y0**	=	y_c)	initial isophote center Y
(**ellip0**	=	e)	initial ellipticity
(**pa0**	=	pa)	initial position angle (degrees)
(**sma0**	=	a)	initial semi-major axis lenght
(**minsma**	=	**1.**)	minimum semi-major axis lenght
(maxsma	=	INDEF)	maximum semi-major axis lenght
(step	=	0.1)	sma step between successive ellipses
(linear	=	no)	linear sma step ?
(maxrit	=	INDEF)	maximum sma lenght for iterative mode
(recente	=	yes)	allows finding routine to re-center x0-y0 ?
(xylearn	=	yes)	updates pset with new x0-y0 ?
(physica	=	yes)	physical coordinate system ?
(mode	=	al)	

Inserire i valori dell'ellisse di partenza determinata con DS9: coordinate del centro (x_c, y_c), ellitticità (e), angolo di posizione del semiasse maggiore (pa) e lunghezza del semiasse maggiore (a). Settare a 1 px il minimo valore del semiasse maggiore.

CONTROLPAR

(conver	=	0.05)	convergency criterion (maximum harmonic amplitude)
(minit	=	10)	minimun no. of iterations at each sma
(**maxit**	=	**2000**)	maximun no. of iterations at each sma
(**hcenter**	=	**yes**)	hold center fixed ?
(hellip	=	no)	hold ellipticity fixed ?
(hpa	=	no)	hold position angle fixed ?
(wander	=	INDEF)	maximum wander in successive isophote centers
(maxgerr	=	0.5)	maximum acceptable gradient relative error
(olthres	=	1.)	object locator's k-sigma threshold
(soft	=	no)	soft stop ?
(mode	=	al)	

Aumentare il numero massimo di iterazioni e tenere bloccato il centro delle ellissi.

MAGPAR

(**mag0**	=	**25.**)	magnitude of reference source
(refer	=	1.)	intensity of reference source
(zerolev	=	0.)	intensity of zero (bias) level
(mode	=	al)	

Non è fondamentale modificare il parametro $mag0$. Se si lascia il valore di *default* le magnitudini saranno tutte negative, quindi può essere utile avere dei valori più simili a quelli reali. Se si conoscono le costanti di calibrazione fotometrica, inserendo la costante corretta si può avere direttamente la magnitudine della galassia a varie distanze dal centro e ottenere una curva di crescenza che permette di calcolare la magnitudine di apertura dell'oggetto considerato.

- Tornare ai parametri di **ELLIPSE** e lanciare il comando.

  Sul display viene caricata l'immagine e appare un'ellisse rossa sulla galassia di cui si vuole ottenere il profilo di brillanza. Prima di tutto, controllare che non vi siano stelle brillanti nelle vicinanze della galassia, la loro luce falsificherebbe il profilo di brillanza. Nel caso in cui siano presenti, portare il cursore su ognuna di essere e premere il tasto **m** per mascherarle. **Mascherare una sorgente** significa dire al programma di non considerare i pixel in quell'area. Se la dimensione della maschera non dovesse essere sufficiente (20×20 pixel in questo caso), spostare il cursore e premere ancora m finché la sorgente non è del tutto coperta (Fig. 12.20).

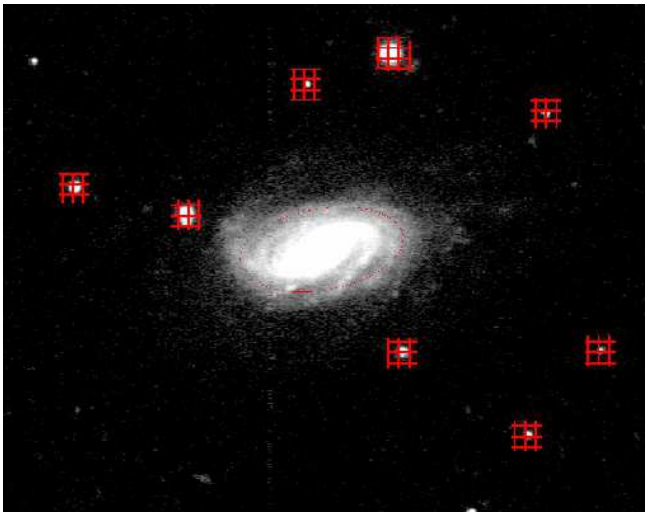


Figura 12.20: Immagine di una galassia con la prima ellisse calcolata da ELLIPSE e con le stelle escluse dal fit.

- Fittare le isofote della galassia **interattivamente**, premendo il tasto **n** e controllando che l'ellisse sia sensata e che il valore dello **stop code** sia **0** o al massimo **2**. Il valore 0 indica che il fit è riuscito, il valore 2 che il fit ha raggiunto il numero massimo di iterazioni, il valore 4 che il fit non ha funzionato e che l'ellisse è identica alla precedente solo con un semiasse maggiore diverso (Fig. 12.21). Se un'ellisse ha una forma strana non compatibile con la forma della galassia, cancellarla con **d**. Si faccia attenzione che l'isofota non sparirà dal display! Cancellare anche le ellissi che si intersecano con le precedenti.

  Il fit procede dalla prima ellisse verso l'esterno, cioè per samiassi maggiori crescenti e poi verso l'interno (Fig. 12.22). Al termine si otterrà una tabella contenente tutti i parametri che il programma calcola. È possibile leggere la tabella con il comando **tread** di IRAF. Si esce con **ctrl-D** e poi **quit**.

- Estrarre dalla tabella le seguenti colonne: semiasse maggiore (**SMA**), flusso totale all'interno di ogni ellisse (**TFLUX_E**) e numero di pixel all'interno di ogni ellisse (**NPIX_E**), con il seguente comando:

```
Running object locator... Done.
#
# Semi-    Isophote      Ellipticity     Position   Grad.  Data Flag Iter. Stop
# major      mean                         Angle     rel.                   code
# axis     intensity                               error
#(pixel)                                (degree)
#
   57.00  1154.10(  5.87) 0.506(0.008) -80.20( 0.63) 0.109  243   0    20    0
   62.70  1146.17(  5.94) 0.498(0.005) -81.10( 0.36) 0.064  270   0    10    0
   68.97  1136.88(  5.87) 0.504(0.006) -81.66( 0.44) 0.086  295   0    10    0
   75.87  1129.05(  5.59) 0.492(0.008) -83.27( 0.67) 0.099  329   0    10    0
   83.45  1124.01(  4.27) 0.479(0.010) -84.68( 0.82) 0.112  367   0    10    0
   91.80  1121.12(  3.29) 0.479(0.014) -83.26( 1.11) 0.187  404   0    12    0
  100.98  1118.29(  3.13) 0.403(0.019) -77.98( 1.76) 0.157  469  11    10    0
  111.08  1116.97(  2.81) 0.397(0.019) -77.40( 1.81) 0.233  508  23    17    0
  122.18  1116.10(  2.67) 0.411(0.012) -75.43( 1.13) 0.157  555  21    11    0
```

Figura 12.21: Output di ELLIPSE sulla finestra di terminale.

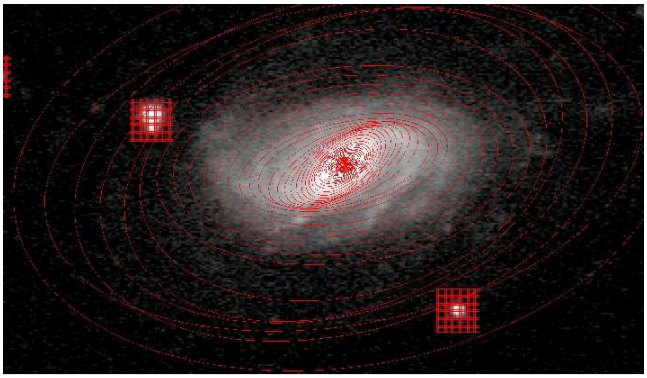


Figura 12.22: Risultato finale al termine dell'esecuzione di ELLIPSE.

isophote> **tdump** *nometabella* col='SMA,TFLUX_E,NPIX_E' > *output.txt*

Editare *output.txt* con un editor di testo ed eliminare le prime 4 righe, rimanendo con 3 colonne di soli numeri. Nella terza colonna, quella con il numero di pixel in ogni ellisse, è possibile che alcuni numeri siano ripetuti, cioè che vi siano ellissi consecutive che contengono lo stesso numero di pixel. Eliminare le ripetizioni dal file prima di procedere!

- Convertire il file *output.txt* in un file a due colonne contenente la **distanza dal centro** e l'**intensità superficiale**.

  Per far questo è necessario un programma che applichi le formule descritte all'inizio. Di seguito è riportato un esempio per fare i calcoli utilizzando il programma SUPERMONGO (*http://www.astro.princeton.edu/∼rhl/sm/*).

```
calc #
data output.txt
read {x1 1 x2 2 x3 3}


set scale = 0.4
set texp = 54.
set sky = 1112.
set sig_sky = 3.5
set gain = 4.725
```

```
set n = 1.

set a = x1 * scale
set inten = (x2 - x3 * sky)/texp
set area = x3 * (scale)**2

set reqx = 0
set intsup = inten[0]/area[0]

set err_1 = x2[0] / (gain * n)
set err_2 = sig_sky * x3[0]
set relerr = sqrt(err_1 + (err_2)**2) / (inten[0] * texp)

print sma_int '%10.3f %10.3f \n' { reqx intsup }
print errors '%10.6f \n' { relerr }

do i=0,dimen(x1)-2
set reqx = (a[$i] + a[$i+1])/2
set intsup = (inten[$i+1] - inten[$i])/ (area[$i+1] - area[$i])

set err_1 = (x2[$i+1] - x2[$i]) / (gain * n)
set err_2 = sig_sky * (x3[$i+1] - x3[$i])
set relerr = sqrt(err_1 + (err_2)**2)/ ((inten[$i+1] - inten[$i])
* texp)

define print_noheader 1
print + sma_int '%10.3f %10.3f \n' { reqx intsup }
print + errors '%10.6f \n' { relerr
}
```

In questa macro devono essere modificate le voci riportate in grassetto: il nome del file che contiene le 3 colonne con i valori dei semiassi maggiori, del flusso e del numero di pixel entro ogni ellisse, la scala spaziale dell'immagine (**scale**) in unità di arcsec/px, il tempo di esposizione (**texp**) in secondi, l'intensità media del cielo (**sky**) in unità di conteggi/px, l'rms del cielo (**sig_sky**) in unità di conteggi/px, il valore del gain (**gain**) in unità di elettroni/ADU, i nomi dei file di output che contengono i raggi, le intensità superficiali (**sma_int**) e gli errori associati (**errors**).

- Aprire una finestra di terminale, portarsi nella directory contenente i dati e i file ottenuti finora, poi usare il comando **sm** per far partire **supermongo**. Utilizzare la macro nel modo seguente:

  : macro read calc.sm calc

  in questo esempio, il file si chiama *calc.sm* mentre *calc* si riferisce alla prima riga all'interno del file. Non è obbligatorio usare questi nomi.

- **Se si conosce un altro linguaggio di programmazione: C, Fortran, IDL, Python, ecc., provare a scrivere una procedura di calcolo equivalente!**

- Editare i due file di output (in questo caso *sma_int* e *errors*) e rimuovere le prime due righe, che iniziano con il #. Scrivere una nuova macro per il calcolo del profilo di brillanza e il fit con le funzioni descritte all'inizio per una galassia ellittica o una spirale. L'esempio che segue non utilizza alcuna minimizzazione automatica dei residui, si deve procedere interattivamente modificando i parametri di input delle funzioni utilizzate cercando di minimizzare i residui visivamente.

```
profili #

data sma_int
read {sma 1 intsup 2}

data errors
read {err 1}

# costanti fotometriche
set m0 = 24.408
set k  = 0.156
set X = 1.117
set cal = m0 - k * X
set dm0 = 0.00122
set dk = 0.
set dcal = dm0 + dk * X

# brillanza calibrata ed errore
set mu = -2.5*lg(intsup) + cal
set dmu = 1.0857 * err + dcal

# parametri del grafico
erase
location 3500 31000 10000 31000
expand 1.2
lweight 2
limits 0 65 27.5 17.5
box 0 2 0 0
ylabel \mu (mag/arcsecˆ2)
ptype 4 3
points sma mu
errorbar sma mu err 2
errorbar sma mu err 4

# Parametri di scala delle funzioni (in arcsec)
```

```
# bulge esponenziale
set Ie = 42.
set re = 2.5

# disco
set I0 = 37.
set h = 11.

# funzioni utilizzate nel fit
set r = 0, 100, 0.01

set Ib = 5.36 * Ie * exp (-1.68 * (r/re))
set Id = I0 * exp (-r/h)

set mb = -2.5 * lg (Ib) + cal
set md = -2.5 * lg (Id) + cal
set mtot = -2.5 * lg(Ib + Id) + cal

# magnitudine del bulge
set m_b_tot = -2.5 * lg(11.93 * re**2 * Ie) + cal

# magnitudine del disco
set m_d_tot = -2.5 * lg(2 * pi * (h**2) * I0) + cal

# rapporto bulge/totale
set BT = (11.93 * re**2 * Ie) / (11.93 * re**2 * Ie + 2
* pi * h**2 * I0)

lweight 2
ctype cyan
ltype 0
connect r mtot
ctype red
ltype 2
connect r mb
ctype blue
ltype 4
connect r md

echo m_bulge =$(m_b_tot)
echo m_disk =$(m_d_tot)
echo B/T = $(BT)
echo ``

# calcolo dei residui
set bul = 5.36 * Ie * exp (-1.68 * (sma/re))
set dis = I0 * exp (-sma/h)
```

```
set tot = -2.5 * lg(bul + dis) + cal
set res = mu - tot

relocate (26500 29000)
ctype red
putlabel 3 bulge
relocate (26500 27800)
ctype blue
putlabel 3 disco
ctype cyan
relocate (26500 26600)
putlabel 3 fit

ctype black

location 3500 31000 3500 10000
limits 0 65 -0.5 0.5
box 1 2 3 0
xlabel sma (arcsec)
ylabel res
points sma res
relocate 0 0
draw 65 0

expand 1.0
```

Anche in questo caso le voci in grassetto sono i punti in cui si deve intervenire modificando i valori o le formule riportate in questo esempio. Inserire gli errori sulle costanti fotometriche solo se a disposizione. Far partire la procedura in modo analogo al precedente:

: macro read *nomefile* profili

sulla finestra grafica apparirà il fit (Fig. 12.23) e su quella dei comandi qualcosa di analogo a:

```
Read lines 1 to 49 from sma_int
Read lines 1 to 49 from errors
m_bulge =15.49432362
m_disk =13.11083059
B/T = 0.1001753098
```

- Una volta determinato il valore di B/T è possibile utilizzare la Fig. 12.24 e la tabella associata (Fig. 12.25), per stimare il tipo morfologico. È prima necessario calcolare la quantità:

$$\Delta m_I = -2.5 \times \log_{10}\left(\frac{B}{T}\right)$$

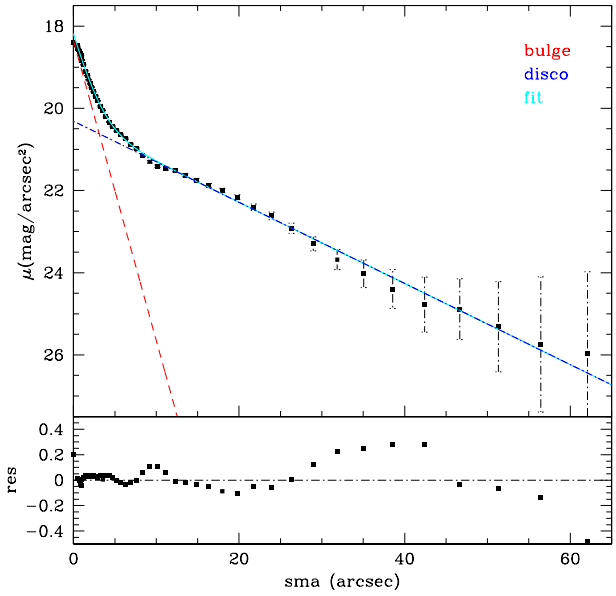


Figura 12.23: Esempio di fit di un profilo di brillanza con un bulge esponenziale (in rosso) e un disco (in blu). Nel pannello in basso sono riportati i residui.

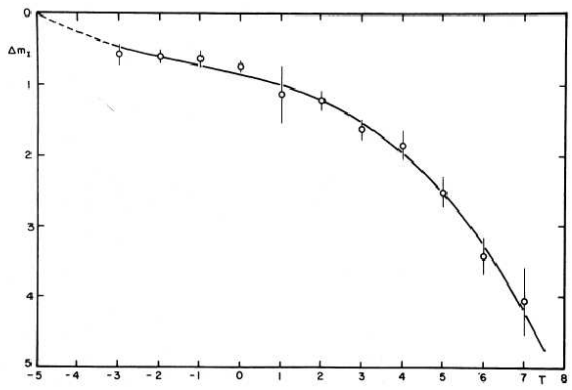


Figura 12.24: Grafico tratto da *Simien & De Vaucouleurs 1986, ApJ, 302, 564.* Il valore della quantità Δm_I è riportato in funzione del tipo morfologico T.

Numerical Hubble stage																	
Hubble stage *T*	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
de Vaucouleurs class[4]	cE	E	E^+	$S0^-$	$S0^0$	$S0^+$	S0/a	Sa	Sab	Sb	Sbc	Sc	Scd	Sd	Sdm	Sm	Im
approximate Hubble class[5]	E			S0			S0/a	Sa	Sa-b	Sb	Sb-c	Sc			Sc-Irr	Irr I	

Figura 12.25: Tabella di conversione dal tipo morfologico T alla classe.